I 2557 T.01 R

1
TOMUL 39
ian. — feb.
1980

1980 MAR 12

STUDII ȘI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. E. CARAFOLI, *redactor şef*

Membri:

Acad. I. ANTON,
Acad. ŞT. BĂLAN,
Acad. D. DUMITRESCU,
Acad. D. MATEESCU,
Acad. R. VOINEA,
Prof. C. AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. R. C. BOGDAN,
Prof. D. PAVELESCU,
Prof. R. PRIŞCU,
Dr. ing. V. VISARION,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Ing. I. CRIŞAN
Prof. CR. PELECUDI,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie*,
Dr. ing. C. TEODOSIU, *secretar de redacţie*.

Colegiul de redacţie

Acad. E. CARAFOLI, redactor şef

Membri:

Acad. I. ANTON,
Acad. D. MATEESCU,
Ing. I. CRIŞAN,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie*,
Dr. ing. C. TEODOSIU, *secretar de redacţie*.

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute, în Editura Academiei R. S. România se vor adresa: ILEXIM, Departamentul export-import carte, Departamentul export-import presă (pentru reviste), 70116, str. 13 Decembrie nr. 3, P.O. Box 136—137, telex 11226, Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Revistele se pot procura (direct sau prin poştă) şi prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele, cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie al revistei, 70701, str. Const. Mille nr. 15. tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
71021, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 39, nr. 1 — ianuarie—februarie 1980

SUMAR

STUDII

pag.

MIRCEA ORĂŞANU, O clasă de mişcări de filtraţie cu suprafaţa liberă . . . 3

MIHAI POPESCU, Asupra transferului optim al vehiculelor spaţiale în punctele de libraţie echidistante din sistemul Pământ-Lună 29

DOINA BUICULESCU-MASSIER, Asupra transformărilor Lorentz 49

GH. MIHĂIŢĂ, Stabilitatea dinamică spaţială a cadrelor din bare cu pereţi subţiri de secţiuni deschise, excitate exterior de forţe periodice urmăritoare . . 59

GEORGE PETRESCU, Teoria generală a sistemelor de bare concurente static nedeterminate 75

RADU NEGRUŢIU, Introducere în analiza dinamică a structurilor cu dale. I 83

IRONIM MARŢIAN, GHEORGHE CIMOCA, Placă dreptunghiulară cu deformaţii mari rezemată pe contur 101

MIHAI BUCULEI, DAN BAGNARU, Multipoli dinamici cu elemente rigide 123

LUCIAN CĂPITANU, Aspecte ale influenţei durităţii asupra coeficientului de frecare uscată, la o cuplă de tip Timken, material plastic armat cu fibre de sticlă/oţel 131

POLIDOR BRATU, Dinamica compactoarelor autopropulsate cu ambele rulouri vibratoare. 139

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
2557
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

Budapesti Műszaki Egyetem
1390/1981

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
1848
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA

O CLASĂ DE MIȘCĂRI DE FILTRAȚIE CU SUPRAFAȚA LIBERĂ

de MIRCEA ORĂȘANU

Liceul Industrial nr. 3 București

Prezenta lucrare este dedicată studiului problemei mișcărilor prin canale ale căror contururi sînt parțial obturate; obturațiile sînt alese astfel, încît să fie dispuse simetric față de verticala notată Oy în sens ascendent. Asupra mișcărilor amintite se fac ipotezele că sînt staționare, plane și supuse legii Henry Darcy, în plus, se neglijează influența capilarității, iar evaporarea sau infiltrația prin suprafețele libere ale acestor mișcări sînt inexistente, mediul poros este omogen.

Se folosesc, în continuare, cunoscutele rezultate legate de rezolvarea problemelor la limită de tip Riemann-Hilbert în semiplan și faptul că un contur circular se poate considera ca o limită de contururi poligonale anume alese. Urmează o discuție a rezultatelor de mai sus. Astfel de probleme nu au fost considerate pînă acum în literatura de specialitate.

1. INTRODUCERE

În baza ipotezelor făcute anterior putem introduce potențialul complex, definit prin egalitatea $f = \varphi + i\psi$, unde $\varphi = -k\left(\frac{p}{\gamma} + y\right)$ — potențialul vitezelor, k — coeficientul de filtrație, p — presiunea, γ — greutatea specifică a lichidului, y — ordonata, ψ — funcția de curent, apoi vom folosi inversa vitezei complexe notată $W = \frac{I}{w}$, unde $w = u - iv$, și ecuația diferențială

$$\frac{dz}{df} = W. \tag{1}$$

2. ENUNȚUL PROBLEMEI

În figura 1 este prezentat domeniul mișcării, iar la adîncimea $y = -T$ se află un dren orizontal. Deci, frontiera domeniului mișcării este compusă din: arcele libere AB, $A'B'$, DE, $D'E'$, arcele de alimentare BC, $B'C'$, $A'F$, AF și arcele impermeabile DC, $D'C'$. Întrucît mișcarea este simetrică față de verticala Oy [2], va fi suficient să o studiem, de exemplu, numai în cadranul IV. Atunci, frontiera domeniului în care cercetăm mișcarea este compusă din: arcele libere AB, DE, arcele de alimentare

BC, FA și arcul impermeabil DC. În ceea ce privește arcul EF, acesta poate fi asimilat cu unul impermeabil întrucît fluidul de filtrație alunecă de-a lungul lui.

Din natura arcelor ce compun frontiera domeniului mișcării, rezultă și felul condițiilor la limită, impuse părților reală și imaginară ale potențialului complex f. Astfel, liniile libere sînt în același timp linii de curent (deci $\psi = \text{const.}$) și linii izobare ($\varphi + ky = \text{const.}$) [1]; liniile impermeabile au semnificația unor linii de curent, iar liniile de alimentare joacă rolul liniilor echipotențiale ($\varphi = \text{const}$).

Să observăm acum că toate punctele domeniului mișcării sînt raportate la ordonate negative. Pe de altă parte, pe drena FA viteza fluidului de filtrație cade perpendicular. Cu alte cuvinte acest arc este o linie echipotențială și deci potențialul vitezelor este constant în lungul acestei linii. Cum pe AB putem lua $\varphi + ky = 0$, dacă neglijăm presiunea atmosferică p_0, iar în A avem $y = -T$, urmează că

$$\varphi = kT \text{ pe } FA. \tag{2}$$

În ce privește arcul liber DE, pe care presiunea este constantă dar neapărat diferită de zero, vom lua condițiile :

$$\psi = 0, \quad \varphi + ky = \frac{k}{\gamma} p_D, \tag{3}$$

unde p_D este presiunea în punctul D, γ — greutatea specifică a fluidului. Pe restul frontierei domeniului mișcării, condițiile limită sînt :

$$\begin{aligned} &\varphi = 0 \quad \text{pe } BC, \\ &\psi = 0 \quad \text{pe } CD \cup EF, \\ &\psi = q \quad \text{pe } AB. \end{aligned} \tag{4}$$

Odata cunoscute valorile lui φ și ψ în lungul lui C_z (frontiera domeniului mișcării), putem construi domeniul lui f (fig. 2)

Introducem semiplanul auxiliar $\operatorname{Im}\{\zeta\} > 0$ (fig. 3), iar domeniul din figura 2 îl reprezentăm conform pe acest semiplan, aplicînd formula lui Schwartz-Christoffel [3]. Avem :

$$f(\zeta) = N \int_0^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(1-\zeta)(c-\zeta)}} + i\frac{q}{2}, \tag{5}$$

unde

$$N = -\frac{q\varkappa^{-1} i}{4K}; \quad kT = \frac{q}{2}\frac{K'}{K},$$

iar K este integrala eliptică completă de prima speță și modul $\varkappa = c^{-\frac{1}{2}}$. Cînd $\xi_0 \in O\xi$, din (5) și (6) deducem :

$$\varphi = k\,T - \frac{q}{2K} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{1-\varkappa^2\xi_0}{\varkappa'^2}}, \varkappa'\right) \text{ pentru } 1<\xi_0<c, \tag{7}$$

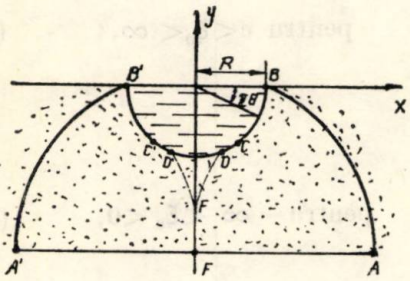


Fig. 1

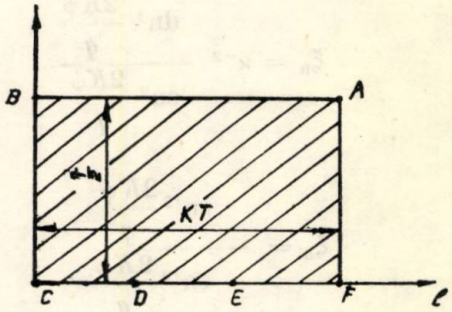


Fig. 2

$$Im\{\zeta\} > 0$$

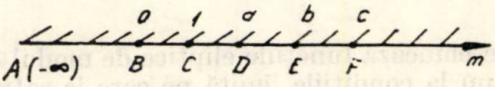


Fig. 3

$$\psi = \frac{q}{2K}\left[K - F\left(\arcsin \frac{1}{\varkappa\sqrt{\xi_0}}, \varkappa'\right)\right] \text{ pentru } c<\xi_0<\infty, \tag{8}$$

$$\varphi = \frac{q}{2K} F\left(\arcsin \sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_0-1}}, \varkappa'\right) \text{ pentru } -\infty<\xi_0<0, \tag{9}$$

$$\psi = \frac{q}{2K}\left[K - F(\arcsin \sqrt{\xi_0}, \varkappa)\right] \text{ pentru } 0<\xi_0<1, \tag{10}$$

unde

$$\varkappa' = (1-\varkappa^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

iar $F(\omega, \varkappa)$, $F(\omega, \varkappa')$ reprezintă integralele eliptice de prima speță incomplete de module $\varkappa$, respectiv $\varkappa'$.

Folosind proprietatea de inversiune a funcţiilor F, cu ajutorul funcţiilor dublu periodice ale lui Jacobi, din (7)—(10) avem [4]

$$\xi_0 = \frac{1}{\mathrm{dn}'^2 \dfrac{2K\varphi}{q}} \qquad \text{pentru } 1 < \xi_0 < c, \tag{12}$$

$$\xi_0 = \varkappa^{-2} \frac{\mathrm{dn}^2 \dfrac{2K\psi}{q}}{\mathrm{cn}^2 \dfrac{2K\psi}{q}} \qquad \text{pentru } c < \xi_0 < \infty, \tag{13}$$

$$\xi_0 = -\frac{\mathrm{sn}'^2 \dfrac{2K\varphi}{q}}{\mathrm{cn}'^2 \dfrac{2K\varphi}{q}} \qquad \text{pentru } -\infty < \xi_0 < 0, \tag{14}$$

$$\xi_0 = \frac{\mathrm{cn}^2 \dfrac{2K\psi}{q}}{\mathrm{dn}^2 \dfrac{2K\psi}{q}} \qquad \text{pentru } 0 < \xi_0 < 1, \tag{15}$$

unde accentele desemnează funcţiile eliptice de modul complementar.

Trecînd acum la condiţiile limită pe care le satisface componentele u şi v ale vitezei complexe w, avem [1]:

$$\begin{aligned} &\frac{v}{u} = -\operatorname{tg}\pi\theta && \text{pe } BC, \\ &\frac{v}{u} = \operatorname{ctg}\pi\theta && \text{pe } CD, \\ &u^2 + v^2 + kv = 0 && \text{pe } DE\ AB, \\ &u = 0 && \text{pe } EFA, \end{aligned} \tag{16}$$

unde $\pi\theta$ este unghiul făcut de raza R cu direcţia pozitivă a axei Ox. Viteza complexă fiind o funcţie olomorfă de ζ, prin intermediul lui (5) am avea de rezolvat o problemă la limită în $\operatorname{Im}\{\zeta\} > 0$ cu condiţiile (16). Întrucît apar dificultăţi matematice de neînlăturat este mai util să formulăm condiţii la limită pentru componentele U şi V ale mărimii $W = \dfrac{1}{w}$, care, de

asemenea, este olomorfă în Im $\{\zeta\} > 0$. Din (16) şi din egalităţile

$$U = \frac{u}{u^2 + v^2}\,; \quad V = \frac{v}{u^2 + v^2} \tag{17}$$

rezultă

$$\begin{aligned}
&V(\xi_0) = -k^{-1} && \text{pentru } \xi_0 \in (-\infty, 0),\\
&U(\xi_0)\sin\pi\theta + V(\xi_0)\cos\pi\theta = 0 && \text{pentru } \xi_0 \in (0, 1),\\
&U(\xi_0)\cos\pi\theta - V(\xi_0)\sin\pi\theta = 0 && \text{pentru } \xi_0 \in (1, a),\\
&V(\xi_0) = -k^{-1} && \text{pentru } \xi_0 \in (a, b),\\
&U(\xi_0) = 0 && \text{pentru } \xi_0 \in (b, +\infty).
\end{aligned} \tag{18}$$

Dacă în (18) s-ar cunoaşte felul în care depinde θ de ξ_0, atunci am avea de-a face cu o problemă Hilbert neomogenă cu coeficienţi discontinui în semiplan [5].

3. METODA DE REZOLVARE

În cercul de rază R înscriem un poligon regulat cu $4 \cdot n$ laturi, unde n este un număr natural oarecare (fig. 4). Fie $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ vîrfurile acestui poligon în cadranul IV ; A_1 este chiar punctul ce se obţine prin intersecţia axei Ox cu cercul amintit, în timp ce A_{n+1} se obţine prin intersecţia cercului de rază R cu axa Oy. Ajungem astfel la studiul unei probleme auxiliare de mişcare plană cu suprafaţă liberă dintr-un canal poligonal cu $2n$ laturi (simetricele lui $A_1, A_2, \ldots A_n$ faţă de Oy sînt $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$). Admitem că fundul noului canal este de asemenea parţial obturat de placa impermeabilă A'_jA_j (unde j este un număr natural cuprins între 1 şi n) simetric dispusă faţă de Oy.

Ipotezele în care cercetăm mişcarea sînt aceleaşi de la începutul lucrării. Presupunem şi aici că de sub A'_jA_j este posibil să plece două linii libere $A_m E$, A'_mE simetrice faţă de Oy dacă ţinem seama de configuraţia canalului. Atunci, pe baza simetriei mişcării este suficient să o studiem numai în cadranul IV. Să observăm că punctele A_m şi A'_m nu pot fi vîrfuri ale poligonului menţionat, întrucît viteza este continuă în fiecare punct al liniei de curent A_jE (respectiv A'_jE). Unghiurile făcute de razele OA_2, $OA_3, \ldots, OA_n$ cu direcţia pozitivă a axei Ox sînt, respectiv, $-\frac{\pi}{2n}$, $-2\frac{\pi}{2n}, \ldots, -j\frac{\pi}{2n}, -(j+1)\frac{\pi}{2n}, \ldots, (n-1)\frac{\pi}{2n}$, în timp ce unghiurile făcute de laturile $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_nA_{n+1}$ cu direcţia pozitivă

a aceleeași axe sînt :

$$-\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{2n}\right), -\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3}{2n}\right), \ldots, -\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2(j-1)-1}{2n}\right)\ldots,$$

$$-\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{2(n-1)-1}{2n}\right).$$

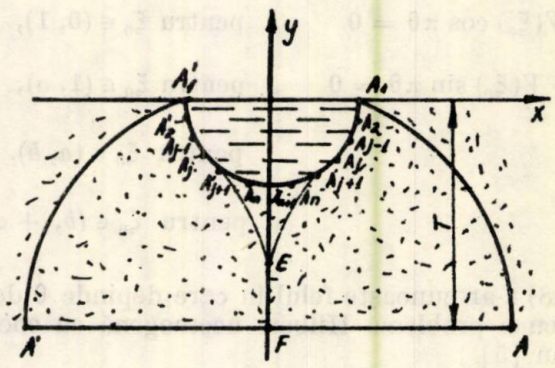


Fig. 4

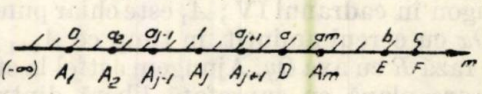


Fig. 5

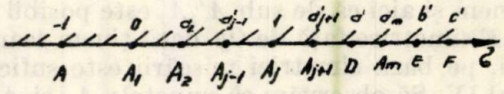


Fig. 6

Să notăm prin $w_n = u_n - iv_n$ viteza complexă a mișcării, inversa acesteia fiind :

$$W_n = \frac{1}{w_n}. \tag{19}$$

Introducem semiplanul auxiliar $\operatorname{Im}\{\zeta\} > 0$ cu corespondența indicată în figura 5. Întrucît pe frontiera de alimentare A_1A_j componentele u_n, v_n ale lui w_n satisfac condiția [1]

$$\frac{v_n}{u_n} = -\operatorname{tg}\pi\frac{2(p-1)-1}{4n}, \qquad 1 \leqslant p < j, \tag{20}$$

iar pe partea obturată A_jA_m, $A_m \in (A_j, A_n)$

$$\frac{v_n}{u_n} = +\operatorname{ctg}\pi\frac{2(p-1)-1}{4n}, \qquad j+1 \leqslant p \leqslant m, \tag{21}$$

componentele U_n, V_n ale lui W_n satisfac pe frontiera domeniului mișcării condițiile :

$$V_n(\xi_0) = -k^{-1} \qquad \text{pentru } \xi_0 \in (-\infty, 0),$$

$$U_n(\xi_0)\sin\frac{(2p-3)\pi}{4n} + V_n(\xi_0)\cos\frac{(2p-3)\pi}{4n} = 0 \qquad \text{pentru } \xi_0 \in (a_{p-1}, a_p),\ 2 \leqslant p \leqslant j,$$

$$U_n(\xi_0)\cos\frac{(2p-3)\pi}{4n} - V_n(\xi_0)\sin\frac{(2p-3)\pi}{4n} = 0 \qquad \text{pentru } \xi_0 \in (a_{p-1}, a_p),\ j+1 \leqslant p \leqslant m,$$

$$V_n(\xi_0) = -k^{-1} \qquad \text{pentru } \xi_0 \in (a, b)$$

$$U_n(\xi_0) = 0 \qquad \text{pentru } \xi_0 \in (b, +\infty). \tag{22}$$

O formă echivalentă a acestor condiții o obținem derivîndu-le în lungul axei $O\xi$ în raport cu ξ_0. Avem :

$$\frac{dV_n}{d\xi_0} \qquad \xi_0 \in (-\infty, 0),$$

$$\frac{dU_n}{d\xi_0}\sin\frac{(2p-3)\pi}{4n} + \frac{dV_n}{d\xi_0}\cos\frac{(2p-3)\pi}{4n} = 0 \quad \xi_0 \in (a_{p-1}, a_p),\ 2 \leqslant p \leqslant j, \tag{23}$$

$$\frac{dU_n}{d\xi_0}\cos\frac{(2p-3)\pi}{4n} - \frac{dV_n}{d\xi_0}\sin\frac{(2p-3)\pi}{4n} = 0 \quad \xi_0 \in (a_{p-1}, a_p),\ j+1 \leqslant p \leqslant m,$$

$$\frac{dV_n}{d\xi_0} = 0 \qquad \text{pentru } \xi_0 \in (a, b),$$

$$\frac{dU_n}{d\xi_0} = 0 \qquad \text{pentru } \xi_0 \in (b, +\infty),$$

unde $a_1 = 0$, $a_j = 1$, $a_j < a < a_m$. Introducem acum identitățile :

$$\frac{dU_n}{d\xi_0} = \frac{1}{2}\left[\frac{dW_n}{d\xi_0} + \frac{d\overline{W}_n}{d\xi_0}\right], \frac{dV_n}{d\xi_0} = \frac{1}{2i}\left[\frac{dW_n}{d\xi_0} - \frac{d\overline{W}_n}{d\xi_0}\right] \tag{24}$$

și definim funcțiile olomorfe pe porțiuni

$$F_n(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{dW_n}{d\zeta} & \text{pentru } \zeta \in S^+, S^+ = \text{Im}\{\zeta\} > 0, \\ \dfrac{\overline{dW_n}}{d\zeta} & \text{pentru } \zeta \in S^-, S^- = \text{Im}\{\zeta\} < 0. \end{cases} \tag{25}$$

Cînd $\zeta \in S^+$ și $\zeta \to \xi_0 \in 0\xi$, din (25) deducem [5]

$$F_n^+(\xi_0) = \frac{dW_n}{d\xi_0}, \tag{26}$$

de asemenea, cînd $\zeta \in S^-$ și $\zeta \to \xi_0 \in 0\xi$, găsim

$$F_n^-(\xi_0) = \frac{\overline{dW_n}}{d\xi_0} \tag{27}$$

și au loc egalitățile

$$F_n^+(\xi_0) = \overline{F_n^-(\xi_0)}; F_n^-(\xi_0) = \overline{F_n^+(\xi_0)}. \tag{28}$$

Înlocuind în (23) egalitățile (24), după ce am ținut seama de (26) și (27), ajungem la relații :

$$\begin{aligned}
&F_n^+(\xi_0) = F_n^-(\xi_0) && \text{pentru } \xi_0 \in (-\infty, 0), \\
&F_n^+(\xi_0) = e^{-i\frac{2p-3}{2n}\pi} F_n^-(\xi_0) && \text{pentru } \xi_0 \in (a_{p-1}, a_p), \\
&&& 2 \leqslant p \leqslant j, \\
&F_n^+(\xi_0) = e^{-\pi i\left(1+\frac{2p-3}{2n}\right)} F_n^-(\xi_0) && \text{pentru } \xi_0 \in (a_{p-1}, a_p), \\
&&& j+1 \leqslant p \leqslant m, \\
&F_n^+(\xi_0) = F_n^-(\xi_0) && \text{pentru } \xi_0 \in (a, b), \\
&F_n^+(\xi_0) = -F_n^-(\xi_0) && \text{pentru } \xi_0 \in (b, +\infty),
\end{aligned} \tag{29}$$

pe care le scriem sub forma compactă :

$$F_n^+(\xi_0) = m_n(\xi_0) F_n^-(\xi_0) \text{ pentru } \xi_0 \in 0\,\xi - E, \tag{30}$$

unde

$$m_n(\xi_0) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } \xi_0 \in (-\infty, 0), \\ e^{-\pi i \frac{2p-3}{2n}} & \text{pentru } \xi_0 \in (a_{p-1}, a_p), \\ & 2 \leqslant p \leqslant j \\ e^{\pi i \left(1 - \frac{2p-3}{2n}\right)} & \text{pentru } \xi_0 \in (a_{p-1}, a_p), \\ & j+1 \leqslant p \leqslant m, \\ 1 & \text{pentru } \xi_0 \in (a, b), \\ -1 & \text{pentru } \xi_0 \in (b, +\infty), \end{cases} \tag{31}$$

iar E este mulţimea punctelor de discontinuitate de prima speţă ale funcţiei $m(\xi_0)$. Egalitatea (30) reprezintă cunoscuta problemă Riemann-Hilbert, omogenă, cu coeficienţi discontinui (coeficienţii sînt constante pe porţiuni) în semiplan pentru funcţiile olomorfe pe porţiuni $F_n(\zeta)$. Soluţia canonică a problemei (30) este de forma :

$$X_n(\zeta) = Me^{\Gamma_n(\zeta)}, \tag{32}$$

unde

$$\Gamma_n(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln m_n(\xi)}{\xi - \zeta} \, d\xi. \tag{33}$$

Întrucit funcţia $m(\xi)$ are un punct de discontinuitate în $\xi = \infty$, fapt ce face imposibilă calcularea integralei de tip Cauchy (33), vom face transformarea omografică

$$\zeta = + \frac{2\tau}{\tau + 1} \tag{34}$$

a semiplanului Im $\{\zeta\} > 0$ în semiplanul Im $\{\tau\} > 0$. Punctelor $\xi = -\infty$, 0, 1 le vor corespunde valorile $\sigma = -1, 0, 1$, rezolvînd apoi (34) în raport cu τ deducem :

$$\tau = -\frac{\zeta}{\zeta - 2}. \tag{35}$$

În figura 6 este indicată corespondenţa pe $O\sigma$ a punctelor $A, A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_{j-1}, A_j \ldots D \ldots A_m, E$. Atunci, cu (34) din (33) rezultă :

$$\Gamma_n(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln m_n(\sigma)}{\sigma - \tau} \, d\sigma + \Gamma_{n0}, \tag{36}$$

unde

$$\Gamma n_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln m_n(\sigma)}{\sigma + 1}\, d\sigma,$$

iar

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln m_n(\sigma)}{\sigma - \tau}\, d\sigma = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{-1} \frac{d\sigma}{\sigma - \tau} + \frac{1}{2}\int_{b'}^{\infty} \frac{d\sigma}{\sigma - \tau} + \tag{38}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{j}\int_{a'_{p-1}}^{a'_p} \frac{-\frac{2p-3}{2n}}{\sigma - \tau}\, d\sigma + \frac{1}{2}\sum_{p=j+1}^{m-1}\int_{a'_{p-1}}^{a'_p} \frac{1 - \frac{2p-3}{2n}}{\sigma - \tau}\, d\sigma +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{a'_{m-1}}^{a'} \frac{1 - \frac{2m-3}{2n}}{\sigma - \tau}\, d\sigma.$$

Integrînd și reducînd termenii asemenea în (38), găsim :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln m_n(\sigma)}{\sigma - \tau}\, d\sigma = \frac{1}{2}\ln\frac{\tau + 1}{\tau - b'} + \frac{1}{2}\ln\frac{\tau^{\frac{1}{2n}}}{\tau - 1} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m-3}{2n}\right)\ln(\tau - a') + \frac{1}{2n}\ln\prod_{p=2}^{m-1}(\tau - a'_p(n)). \tag{39}$$

Revenind la variabila ζ prin transformarea (35), din (36), (37), (39) deducem :

$$\Gamma n(\zeta) = \frac{1}{2}\ln\frac{\zeta^{\frac{1}{2n}}}{\zeta - 1} - \frac{1}{2}\ln(\zeta - b) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m-3}{2n}\right)\ln(\zeta - a) +$$

$$+ \frac{1}{2n}\ln\prod_{p=2}^{m-1}(\zeta - a_p(n \tag{40}$$

încît una din soluțiile canonice ale problemei (30) este

$$\overset{*}{X}_n(\zeta) = M_n \cdot \exp\left\{\frac{1}{2}\ln\frac{\zeta^{\frac{1}{2n}}}{\zeta - 1} - \frac{1}{2}\ln(\zeta - b) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2m-3}{2n}\right)\ln(\zeta - a) + \frac{1}{2n}\sum_{p=2}^{m-1}\ln(\zeta - a_p(n))\right\}. \tag{32'}$$

În acord cu cerințele lucrării vom alege soluția canonică [5]:

$$X_n(\zeta) = M_n \exp\left\{\ln\left[\frac{\zeta^{\frac{1}{4n}-1}(\zeta-1)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta-b)^{\frac{1}{2}}}(\zeta-a)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{2m-3}{2n}\right)}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2n}\sum_{p=2}^{m-1}\ln(\zeta-a_p(n))\right\}. \qquad (32'')$$

În continuare vom lua

$$F_n = X_n. \qquad (41)$$

Din (29) și (41) găsim expresia inversei vitezei complexe în canalul poligonal considerat; avem:

$$W_n(\zeta) = M_n\int_{\zeta_0}^{\zeta}\zeta^{\frac{1}{4n}-1}\frac{(\zeta-1)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta-a_p(n))^{\frac{2m-3}{4n}}}\left(\frac{\zeta-a(n)}{\zeta-b\,(n)}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{p=2}^{m-1}\zeta-a_p(n))^{\frac{1}{2n}}\,\mathrm{d}\zeta+$$

$$+\ W_n\,(\zeta_0), \qquad (42)$$

considerînd că pentru fiecare n există cîte o pereche de valori a, b corespunzătoare punctelor D și E.

Să deducem că:

$$W_n(-\infty) = -k^{-1}\,\mathrm{i}, \qquad (43)$$

$$W_n(0) = k^{-1}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4n}-\mathrm{i}\right) = k^{-1}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\pi\mathrm{i}}{4n}}}{\sin\frac{\pi}{4n}}, \qquad (44)$$

$$W_n(1) = 0, \qquad (45)$$

$$W_n(a(n)) = -k^{-1}\mathrm{i}\left(1-\mathrm{itg}\frac{2m-3}{4n}\pi\right) = -k\mathrm{i}^{-1}\frac{\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\frac{2m-3}{4n}}}{\cos\left(\frac{2m-3}{4n}\pi\right)}, \qquad (46)$$

$$W_n(b(n)) = -k^{-1}\mathrm{i}. \qquad (47)$$

Cînd n tinde spre infinit, din (43)—(47) deducem (notînd limita tot cu W în punctele menționate):

$$W(-\infty) = \lim_{n\to\infty} W_n(-\infty) = -k^{-1}\mathrm{i}, \qquad (48)$$

$$W(0) = \lim_{n\to\infty} W_n(0) = \infty, \qquad (49)$$

$$W(a) = \lim_{n,m\to\infty} W_n\,(a(n)) = -k^{-1}\,\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{-\pi\mathrm{i}\vartheta_0}}{\cos\pi\vartheta_0}, \qquad (50)$$

unde

$$\theta_0 = \lim_{m,n\to\infty} \frac{2m-3}{4n} \tag{51}$$

dacă există $\lim_{n\to\infty} a(n) = a < \infty$.

În sfîrșit,

$$W(1) = \lim_{n\to\infty} W_n(1) = 0, \tag{52}$$

$$W(b) = \lim_{n} W_n(b(n)) = -k^{-1}\,\mathrm{i} \tag{53}$$

dacă există $\lim_{n\to\infty} b(n) = b < \infty$. Să trecem acum la verificarea condițiilor (30). Din (32) și (33) rezultă, folosind formulele lui Plemelj-Sohoțki [5],

$$m_n(\xi_0) = \frac{X_n^+(\xi_0)}{X_n^-(\xi_0)} = \frac{F_n^+(\xi_0)}{F_n^-(\xi_0)} \quad \text{pentru} \quad \xi_0 \in 0\xi - E, \tag{54}$$

iar cu (41) și (54) găsim relații de același tip pentru $W_n^{\pm}(\xi_0)$ deci

$$W_n^{\pm}(\xi_0) = \begin{cases} M_n \displaystyle\int_{-\infty}^{\xi_0} (-\xi_0)^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(1-\xi_0)^{\frac{1}{2}}}{(a-\xi_0)^{\frac{2m-3}{4n}}} \left(\frac{a-\xi_0}{b-\xi_0}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{p=2}^{m-1} (a_p(n)-\xi_0)^{\frac{1}{2n}}\, \mathrm{d}\xi_0 \mp k^{-1}\mathrm{i}, \\ \qquad \xi_0 \in (-\infty, 0), \\ M_n\, \mathrm{e}^{\mp \pi \mathrm{i} \frac{2p-1}{4n}} \displaystyle\int_{\xi_0}^{1} \xi_0^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(1-\xi_0)^{\frac{1}{2}}}{(a-\xi_0)^{\frac{2m-3}{4n}}} \left(\frac{a-\xi_0}{b-\xi_0}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{p=2}^{m-1} |a_p(n)-\xi_0|^{\frac{1}{2n}}\, \mathrm{d}\xi_0, \\ \qquad \xi_0 \in (a_{p-1}, a_p), \\ \qquad 1 \leqslant p \leqslant j, \\ \mp \mathrm{i} M_n\, \mathrm{e}^{\mp \pi \mathrm{i} \frac{2p-3}{4n}} \displaystyle\int_{1}^{\xi_0} \xi_0^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(\xi_0-1)^{\frac{1}{2}}}{(a-\xi_0)^{\frac{2m-3}{4n}}} \left(\frac{a-\xi_0}{b-\xi_0}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{p=2}^{m-1} |a_p(n)-\xi_0|^{\frac{1}{2n}}\, \mathrm{d}\xi_0, \\ \qquad \xi_0 \in (a_{p-1}, a_p), \\ \qquad j+1 \leqslant p \leqslant m, \\ M_n \displaystyle\int_{a(n)}^{\xi_0} \xi_0^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(\xi_0-1)^{\frac{1}{2}}}{(\xi_0-a)^{\frac{2m-3}{4n}}} \left(\frac{\xi_0-a}{b-\xi_0}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{p=2}^{m-1} (\xi_0-a_p(n))^{\frac{1}{2n}}\, \mathrm{d}\xi_0 \mp \\ \qquad \mp k^{-1}\,\mathrm{i}\, \frac{\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i} \frac{2m-3}{4n}}}{\sin \frac{2m-3}{4n}\pi}, \quad \xi_0 \in (a, b), \\ \mp \mathrm{i} M_n \displaystyle\int_{b(n)}^{\xi_0} \xi_0^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(\xi_0-1)^{\frac{1}{2}}}{(\xi_0-a)^{\frac{2m-3}{4n}}} \left(\frac{\xi_0-a}{\xi_0-b}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{p=2}^{m-1} (\xi_0-a_p(n))^{\frac{1}{2n}}\, \mathrm{d}\xi_0 \mp \\ \qquad \mp k^{-1}\mathrm{i}, \ \xi_0 \in (b_1 + \infty), \end{cases}$$

Din (55) vom alege valorile cu semnul plus, întrucît întreaga mişcare este raportată la semiplanul Im $\{\zeta\} > 0$. Scriind acum în ultima expresie a egalităţii (55) că $\xi_0 = \infty$ deducem, ţinînd seama de (43) şi (47),

$$0 = Mn\int_{b(n)}^{\infty} \xi_0^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(\xi_0-1)^{\frac{1}{2}}}{(\xi_0-a)^{\frac{2m-3}{4n}}} \left(\frac{\xi_0-a}{\xi_0-b}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{p=2}^{m-1} (\xi_0-a_p(n))^{\frac{1}{2n}} \, d\xi_0, \quad (56)$$

egalitatea fiind posibilă dacă

$$M_n = 0 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots . \quad (57)$$

Or, mişcare în acest caz nu există. Situaţia s-a creat, admiţînd că există arcul liber DE. Pentru a evita contradicţia sîntem nevoiţi să-l eliminăm din consideraţiile anterioare sau cu alte cuvinte $a \to b$. Dar aceasta implică că punctul ce se obţine din intersecţia axei Oy cu conturul canalului este acelaşi pentru toate canalele a căror secţiune este poligonală. În mod natural atunci a sau b nu mai depind de numărul natural n. O altă consecinţă este aceea că

$$\theta_0 = \frac{1}{2}. \quad (58)$$

Să remarcăm faptul că $\pi\ \theta_0$ este unghiul pe care îl face raza în punctul D cu direcţia pozitivă a axei Ox. Cu acestea, din (42) găsim

$$W_n(\zeta) = M_n \int_{\zeta_0}^{\zeta} \zeta^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(\zeta-1)^{\frac{1}{2}}}{(\zeta-a)^{\frac{2m-3}{4n}}} \prod_{p=2}^{m-1} (\zeta-a_p(n))^{\frac{1}{2n}} \, d\zeta + W_n(\zeta_0). \quad (59)$$

Cînd $\zeta \to \xi_0 \in O\xi$ cu $\zeta \in S^{\pm}$ din (59) vom obţine egalităţi identice cu cele din (55), în afară de intervalul (a, b) care se reduce la un punct. Scrise detaliat aceste egalităţi, avem :

$$W_n^{\pm}(\xi_0) = \mp i M_n \int_c^{\xi_0} \xi_0^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(\xi_0-1)^{\frac{1}{2}}}{(\xi_0-a)^{\frac{2m-3}{4n}}} \prod_{p=2}^{m-1} (\xi_0-a_p(n))^{\frac{1}{2n}} \, d\xi_0 \mp$$
$$\mp k^{-1} i\, U_n(c), \qquad \xi_0 \in (c, +\infty), \quad (60)$$

$$W_n^{\pm}(\xi_0) = M_n \int_{-\infty}^{\xi_0} (-\xi_0)^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(1-\xi_0)^{\frac{1}{2}}}{(a-\xi_0)^{\frac{2m-3}{4n}}} \prod_{p=2}^{m-1} (a_p(n)-\xi_0)^{\frac{1}{2n}} \, d\xi_0 \mp k^{-1} i,$$
$$\xi_0 \in (-\infty, 0), \quad (61)$$

$$W_n^{\pm}(\xi_0) = M_n e^{\mp \pi i \frac{2p-1}{4n}} \int_{\xi_0}^{1} \xi_0^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(1-\xi_0)^{\frac{1}{2}}}{(a-\xi_0)^{\frac{2m-3}{4n}}} \prod_{p=2}^{m-1} |a_p(n) - \xi_0|^{\frac{1}{2n}} \, d\xi_0 \quad (62)$$

$$\xi_0 \in (a_{p-1}, a_p), \quad 1 \leqslant p \leqslant j,$$

$$W_n^{\pm}(\xi_0) = \mp i M_n e^{\mp \pi i \frac{2p-3}{4n}} \int_{1}^{\xi_0} \xi_0^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(\xi_0-1)^{\frac{1}{2}}}{(a-\xi_0)^{\frac{2m-3}{4n}}} \prod_{p=2}^{m-1} |a_p(n) - \xi_0|^{\frac{1}{2n}} \, d\xi_0 \quad (63)$$

$$\xi_0 \in (a_{p-1}, a_p), \quad j+1 \leqslant p \leqslant m,$$

$$W_n^{\pm}(\xi_0) = \mp i M_n \int_{0}^{\xi_0} \xi_0^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(\xi_0-1)^{\frac{1}{2}}}{(\xi_0-a)^{\frac{2m-3}{4n}}} \prod_{p=2}^{m-1} (\xi_0 - a_p(n))^{\frac{1}{2n}} d\xi_0 \mp \quad (64)$$

$$\mp V_n(a) i \frac{e^{-\pi i \frac{2m-3}{4n}}}{\cos\left(\frac{2m-3}{4n}\pi\right)}, \qquad \xi_0 \in (a, c),$$

unde am pus

$$U_n(c) = ik \cdot W_n(c). \quad (65)$$

Să observăm că dacă numărul laturilor liniei poligonale înscrise în semicercul de rază R crește nedefinit, limita nu este alta decît semicercul menționat.

Pe de altă parte șirul $\{F_n(\zeta)\}$ de funcții olomorfe pe porțiuni în planul de variabilă este uniform convergent, deci limita sa este de asemenea o funcție olomorfă pe porțiuni [6]. Într-adevăr, fie funcția de parametru $\zeta(\zeta \neq \lambda)$

$$h(\lambda) = \ln(\zeta - \lambda) \quad (66)$$

definită în intervalul $[0, a]$. Funcția h este vizibil integrabilă în $[0, a]$ cu condiția $(\lambda \neq \zeta)$. Fie $\{d_n\}$ un șir de diviziuni a lui $[0, a]$ și λ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ punctele de diviziune, iar $a_p \in [0, a]$ punctele intermediare. Atunci sumele integrale corespunzătoare acestei funcții vor fi:

$$\sigma_n = \sum_{p=2}^{n-1} \ln(\zeta - a_p) \, \Delta\lambda_p, \quad (67)$$

unde

$$\Delta\lambda_p = \lambda_p - \lambda_{p-1} = \frac{a}{n}. \quad (68)$$

Însă

$$\lim_{\nu(d_n)\to 0} \sigma_n = \int_0^a \ln(\zeta - \lambda)\, d\lambda, \tag{69}$$

unde prin $\nu(d_n)$ am notat norma diviziunii $\{d_n\}$. Un calcul simplu dă

$$\int_0^a \ln(\zeta - \lambda)\, d\lambda = \ln\left(\frac{\zeta}{\zeta - a}\right)^{\zeta} + \ln(\zeta - a)^a - a. \tag{70}$$

Atunci, notînd $F(\zeta) = \lim\limits_{n\to\infty} F_n(\zeta)$; $W(\zeta) = \lim\limits_{n\to\infty} W_n(\zeta)$, din (32″) şi (41), cu $a \to b$, deducem

$$F(\zeta) = \mathrm{Mex}p\left\{\frac{1}{2}\ln(\lim \zeta^{\frac{1}{2n}}) + \frac{1}{2}\ln(\zeta - 1) - \right. \tag{71}$$

$$\left. - \ln(\zeta - a) \lim_{n,m\to\infty} \frac{2m-3}{4n} + \frac{1}{2a} \lim_{\nu(d_n)\to 0} \sigma_n\right\},$$

unde $\{\sigma_n\}$ sînt daţi de (67), în timp ce coeficientul penultimului termen din acoladă are, după cum s-a văzut, valoarea $\theta_0 = \frac{1}{2}\ln(\lim\limits_{n\to\infty} \zeta^{\frac{1}{2n}}) = \ln 1 = 0$. În sfîrşit, vom lua $M = e^{-\frac{a}{2}} \lim\limits_{n\to\infty} M_n$.

Atunci,

$$F(\zeta) = M(\zeta - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{\zeta^{\frac{\zeta}{2a} - 1}}{(\zeta - a)^{\frac{\zeta}{2a}}}. \tag{71'}$$

Cum $F_n^{\pm}(\zeta) = \left(\frac{dW_n}{d\zeta}\right)^{\pm}$, evident $F^{\pm}(\zeta) = \frac{dW^{\pm}}{d\zeta}$ sau

$$W(\zeta) = M \int_{\zeta_0}^{\zeta} (\zeta - 1)^{\frac{1}{2}} \frac{\zeta^{\frac{\zeta}{2a} - 1}}{(\zeta - a)^{\frac{\zeta}{2a}}}\, d\zeta + W(\zeta_0), \tag{72}$$

unde ζ_0 este un punct fixat în planul ζ, iar $W(\zeta_0) = \lim\limits_{n\to\infty} W_n(\zeta_0)$. Funcţia definită în (72) este inversul vitezei în cazul canalului semicircular.

PESTI MUSZAKI EGYETEM 1948

Să observăm în continuare că

$$\lim_{n,p\to\infty}\frac{2p-3}{2n}=2\theta. \tag{73}$$

Trecînd la limită egalitățile (60) — (64) și ținînd seama de (72), avem :

$$W^{\pm}(\xi_0)=\begin{cases} M\int_{-\infty}^{\xi_0}(1-\xi_0)^{\frac{1}{2}}\dfrac{(-\xi_0)^{\frac{\xi_0}{2a}-1}}{(a-\xi_0)^{\frac{\xi_0}{2a}}}\,d\xi_0\mp k^{-1}i, & \xi_0\in(-\infty,0), \\ Me^{\mp\pi i\theta(\xi_0)}\int_{-\xi_0}^{1}(1-\xi_0)^{\frac{1}{2}}\dfrac{\xi_0^{\frac{\xi_0}{2a}-1}}{(a-\xi_0)^{\frac{\xi_0}{2a}}}\,d\xi_0, & \xi_0\in(0,1), \\ \mp iMe^{\mp\pi i\theta(\xi_0)}\int_{1}^{\xi_0}(\xi_0-1)^{\frac{1}{2}}\dfrac{\xi_0^{\frac{\xi_0}{2a}-1}}{(a-\xi_0)^{\frac{\xi_0}{2a}}}\,d\xi_0, & \xi_0\in(1,a), \\ \mp iM\int_{a}^{\xi_0}(\xi_0-1)^{\frac{1}{2}}\dfrac{\xi_0^{\frac{\xi_0}{2a}-1}}{(\xi_0-a)^{\frac{\xi_0}{2a}}}\,d\xi_0+W^{\pm}(a), & \xi_0\in(a,c), \\ \mp iM\int_{c}^{\xi_0}(\xi_0-1)^{\frac{1}{2}}\dfrac{\xi_0^{\frac{\xi_0}{2a}-1}}{(\xi_0-a)^{\frac{\xi_0}{2a}}}\,d\xi_0\mp k^{-1}iU(c), & \xi_0\in(c,+\infty), \end{cases} \tag{74}$$

unde $U(c)=\lim_{n\to\infty}U_n(c)$. Dacă scriem condițiile (18) sub forma complexă, atunci aceste egalități evident le verifică.

Cum aici $W_n(a)=V_n(a)\,i\dfrac{e^{-i\pi\frac{2n-3}{4n}}}{\cos\left(\frac{2n-3}{4n}\pi\right)}$ și

$$V_n(a)=-M_n\cos\frac{2n-3}{4n}\pi\int_1^a\xi_0^{\frac{1}{4n}-1}\frac{(\xi_0-1)^{\frac{1}{2}}}{(a-\xi_0)^{\frac{2m-3}{4n}}}\prod_{p=2}^{n-1}|a_p(n)-\xi_0|^{\frac{1}{2n}}\,d\xi_0 \tag{75}$$

$$k^{-1}+V_n(a)\frac{e^{-\pi i\frac{2m-3}{4n}}}{\cos\left(\frac{2m-3}{4n}\pi\right)}=M_n\int_a^{\infty}\xi_0^{\frac{1}{4n}-1}\frac{(\xi_0-1)^{\frac{1}{2}}}{(\xi_0-a)^{\frac{2m-3}{4n}}}\prod_{p=2}^{n-1}(\xi_0-a_p(n))^{\frac{1}{2n}}\,d\xi_0 \tag{76}$$

rezultă că trebuie să luăm $V_n(a) = 0$; deci

$$W_n(a) = 0\,;\ W(a) = \lim_{n\to\infty} W_n(a) = 0, \tag{77}$$

iar

$$M_n = k^{-1}\left[\int_a^{\infty} \xi_0^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(\xi_0-1)^{\frac{1}{2}}}{(\xi_0-a)^{\frac{2n-3}{4n}}} \prod_{p=2}^{n-1} (\xi_0 - a_p(n))^{\frac{1}{2n}}\, \mathrm{d}\xi_0\right]^{-1}, \tag{78}$$

$$M = \lim_{n\to\infty} M_n = k^{-1}\left[\int_a^{\infty} (\xi_0-1)^{\frac{1}{2}} \frac{\xi_0^{\frac{\xi_0}{2a}-1}}{(\xi_0-a)^{\frac{\xi_0}{2a}}}\, \mathrm{d}\xi_0\right]^{-1}. \tag{79}$$

4. CALCULUL PARAMETRILOR MIŞCĂRII

În primul rînd, din (5) prin derivare în raport cu $\xi_0 \in 0\xi$ avem

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi_0} = -\frac{q\varkappa^{-1}}{4K} \frac{1}{\sqrt{(-\xi_0)(1-\xi_0)(c-\xi_0)}} && \text{pentru } \xi_0 \in (-\infty, 0),\\
&\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi_0} = -\frac{q\varkappa^{-1}\mathrm{i}}{4K} \frac{1}{\sqrt{\xi_0(1-\xi_0)(c-\xi_0)}} && \text{pentru } \xi_0 \in (0, 1),\\
&\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi_0} = \frac{q\varkappa^{-1}}{4K} \frac{1}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(c-\xi_0)}} && \text{pentru } \xi_0 \in (1, c),\\
&\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi_0} = \frac{q\varkappa^{-1}\mathrm{i}}{4K} \frac{1}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(\xi_0-c)}} && \text{pentru } \xi_0 \in (c, +\infty).
\end{aligned} \tag{80}$$

În continuare, folosim relaţia diferenţială (1), care pentru canalele a căror secţiune este un poligon regulat cu $2n$ laturi, devine :

$$\frac{\mathrm{d}z_n}{\mathrm{d}\xi_0} = W_n(\xi_0)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi_0} \quad \text{pentru} \quad \xi_0 \in 0\xi. \tag{81}$$

Din (60) — (64), (80), (81) avem :

$$\frac{\mathrm{d}z_n}{\mathrm{d}\xi_0} = -\frac{qM_n^*}{4\varkappa k K} \frac{1}{\sqrt{(-\xi_0)(1-\xi_0)(c-\xi_0)}} \cdot \int_{-\infty}^{\xi_0} (-\xi_0)^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(1-\xi)^{\frac{1}{2}}}{(a-\xi)^{\frac{2n-3}{4n}}} \prod_{p=2}^{m-1} (a_p(n)-\xi)^{\frac{1}{2n}}\, \mathrm{d}\xi +$$

$$+ \frac{q\mathrm{i}}{4\varkappa k K} \frac{1}{\sqrt{(-\xi_0)(1-\xi_0)(c-\xi_0)}}, \qquad \xi_0 \in (-\infty, 0), \tag{82}$$

$$\frac{dz_n}{d\xi_0} = -\frac{q\overset{*}{M}_n i}{4\varkappa kK} \frac{e^{-\pi i \frac{2p-1}{4n}}}{\sqrt{\xi_0(1-\xi_0)(c-\xi_0)}} \int_{\xi_0}^{1} \xi^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(1-\xi)^{\frac{1}{2}}}{(a-\xi)^{\frac{2n-3}{4n}}} \prod_{p=2}^{n-1} |a_p(n)-\xi|^{\frac{1}{2n}} d\xi,$$

$$\xi_0 \in (0, 1), \tag{83}$$

$$\frac{dz_n}{d\xi_0} = -\frac{q\overset{*}{M}_n i}{4\varkappa kK} \frac{1}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(c-\xi_0)}} \int_{1}^{\xi_0} \xi^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(\xi-1)^{\frac{1}{2}}}{(a-\xi)^{\frac{2n-3}{4n}}} \prod_{p=2}^{n-1} |a_p(n)-\xi|^{\frac{1}{2}} d\xi,$$

$$\xi_0 \in (1, a), \tag{84}$$

$$\frac{dz_n}{d\xi_0} = -\frac{q\overset{*}{M}_n i}{4\varkappa kK} \frac{1}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(c-\xi_0)}} \int_{a}^{\xi_0} \xi^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(\xi-1)^{\frac{1}{2}}}{(\xi-a)^{\frac{2n-3}{4n}}} \prod_{p=2}^{n-1} (\xi-a_p(n))^{\frac{1}{2n}} d\xi,$$

$$\xi_0 \in (a, c), \tag{85}$$

$$\frac{dz_n}{d\xi_0} = \frac{q\overset{*}{M}_n}{4\varkappa kK} \frac{1}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(\xi_0-c)}} \int_{c}^{\xi_0} \xi^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(\xi-1)^{\frac{1}{2}}}{(\xi-a)^{\frac{2n-3}{4n}}} \prod_{p=2}^{n-1} (\xi-a_p(n))^{\frac{1}{2n}} d\xi +$$

$$+ \frac{qU_n(c)}{4\varkappa kK} \frac{1}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(\xi_0-c)}}, \qquad \xi_0 \in (c, +\infty), \tag{86}$$

unde am pus

$$\overset{*}{M}_n = \left[\int_a^{\infty} \xi^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(\xi-1)^{\frac{1}{2}}}{(\xi-a)^{\frac{2n-3}{4n}}} \prod_{p=2}^{n-1} (a_p(n)-\xi)^{\frac{1}{2n}} d\xi \right]^{-1} \tag{87}$$

iar cînd $n \to \infty$

$$\overset{*}{M} = \lim_{n\to\infty} \overset{*}{M}_n = \left[\int_a^{\infty} (\xi-1)^{\frac{1}{2}} \frac{\xi^{\frac{\xi}{2a}-1}}{(\xi-a)^{\frac{\xi}{2a}}} d\xi \right]^{-1}. \tag{87'}$$

În cazul limită a canalului semicircular avem

$$\frac{dz}{d\xi_0} = \lim_{n\to\infty} \frac{dz_n}{d\xi_0} \tag{88}$$

şi deci din (82) — (86) deducem

$$\frac{dz}{d\xi_0} = -\frac{q^*M}{4\varkappa kK}\frac{1}{\sqrt{(-\xi_0)(1-\xi_0)(c-\xi_0)}}\int_{-\infty}^{\xi_0}(1-\xi)^{\frac{1}{2}}\frac{(-\xi)^{\frac{\xi}{2a}-1}}{(a-\xi)^{\frac{\xi}{2a}}}d\xi + \\ + \frac{qi}{4\varkappa kK}\frac{1}{\sqrt{(-\xi_0)(1-\xi_0)(c-\xi_0)}}, \quad \xi_0 \in (-\infty, 0), \tag{89}$$

$$\frac{dz}{d\xi_0} = -\frac{q^*Mi}{4\varkappa kK}\frac{e^{-\pi i\theta(\xi_0)}}{\sqrt{\xi_0(1-\xi_0)(c-\xi_0)}}\int_{\xi_0}^{1}(1-\xi)^{\frac{1}{2}}\frac{\xi^{\frac{\xi}{2a}-1}}{(a-\xi)^{\frac{\xi}{2a}}}d\xi, \\ \xi_0 \in (0, 1) \tag{90}$$

$$\frac{dz}{d\xi_0} = -\frac{q^*Mi}{4\varkappa kK}\frac{e^{-\pi i\theta(\xi_0)}}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(c-\xi_0)}}\int_{1}^{\xi_0}(\xi-1)^{\frac{1}{2}}\frac{\xi^{\frac{\xi}{2a}-1}}{(a-\xi)^{\frac{\xi}{2a}}}d\xi, \quad \xi_0 \in (1, a) \tag{91}$$

$$\frac{dz}{d\xi_0} = -\frac{q^*Mi}{4\varkappa kK}\frac{1}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(c-\xi_0)}}\int_{a}^{\xi_0}(\xi-1)^{\frac{1}{2}}\frac{(\xi-a)^{-\frac{\xi}{2a}}}{\xi^{1-\frac{\xi}{2a}}}d\xi, \\ \xi_0 \in (a, c) \tag{92}$$

$$\frac{dz}{d\xi_0} = \frac{q^*M}{4\varkappa kK}\frac{1}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(\xi_0-c)}}\int_{c}^{\xi_0}(\xi-1)^{\frac{1}{2}}\frac{(\xi-a)^{-\frac{\xi}{2a}}}{\xi^{1-\frac{\xi}{2a}}}d\xi + \\ + q\frac{U(c)}{4\varkappa kK}\frac{1}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(\xi_0-c)}}, \quad \xi_0 \in (c, +\infty) \tag{93}$$

Întrucît pe conturul canalului semicircular avem

$$z = \mathrm{Re}^{-\pi i\theta(\xi_0)}; \quad \frac{dz}{d\xi_0} = -i\,\mathrm{Re}^{-\pi i\theta(\xi_0)}\frac{d\theta}{d\xi_0} \tag{94}$$

din (90) şi (91) găsim ecuaţiile diferenţiale:

$$\frac{d\theta}{d\xi_0} = \frac{q^*M}{4\varkappa k\pi RK}\frac{1}{\sqrt{\xi_0(1-\xi_0)(c-\xi_0)}}\int_{\xi_0}^{1}(1-\xi)^{\frac{1}{2}}\frac{(a-\xi)^{-\frac{\xi}{2a}}}{\xi^{1-\frac{\xi}{2a}}}d\xi, \quad \xi_0 \in (0, 1) \tag{95}$$

$$\frac{d\theta}{d\xi_0} = \frac{q\overset{*}{M}}{4\varkappa k\pi RK} \frac{1}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(c-\xi_0)}} \int_1^{\xi_0} (\xi-1)^{\frac{1}{2}} \frac{(a-\xi)^{-\frac{\xi}{2a}}}{\xi^{1-\frac{\xi}{2a}}} d\xi, \quad \xi_0 \in (1, a), \tag{96}$$

Integrîndu-le, obținem

$$\theta(t) = \frac{q\overset{*}{M}}{4\varkappa\pi RK} \int_0^t \frac{d\xi_0}{\sqrt{\xi_0(1-\xi_0)(c-\xi_0)}} \int_{\xi_0}^1 (1-\xi)^{\frac{1}{2}} \frac{(a-\xi)^{-\frac{\xi}{2a}}}{\xi^{1-\frac{\xi}{2a}}} d\xi,$$
$$t \in (0, 1), \tag{97}$$

$$\theta(t) - \theta(1) = \frac{q\overset{*}{M}}{4\varkappa k\pi RK} \int_1^t \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(c-\xi_0)}} \int_1^{\xi_0} (\xi-1)^{\frac{1}{2}} \frac{(a-\xi)^{-\frac{\xi}{2a}}}{\xi^{1-\frac{\xi}{2a}}} d\xi,$$
$$t \in (1, a). \tag{98}$$

De aici deducem :

$$\theta(1) = \frac{q\overset{*}{M}}{4\varkappa k\pi RK} \int_0^1 \frac{d\xi_0}{\sqrt{\xi_0(1-\xi_0)(c-\xi_0)}} \int_{\xi_0}^1 (1-\xi)^{\frac{1}{2}} \frac{(a-\xi)^{-\frac{\xi}{2a}}}{\xi^{1-\frac{\xi}{2a}}} d\xi, \tag{99}$$

$$\frac{1}{2} - \theta(1) = \frac{q\overset{*}{M}}{4\varkappa k\pi RK} \int_1^a \frac{d\xi_0}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(c-\xi_0)}} \int_1^{\xi_0} (\xi-1)^{\frac{1}{2}} \frac{(a-\xi)^{-\frac{\xi}{2a}}}{\xi^{1-\frac{\xi}{2a}}} d\xi. \tag{100}$$

Integrînd (99) prin părți și apoi făcînd schimbarea de variabilă [4]

$$\xi_0 = \mathrm{sn}^2 u_0, \qquad 0 < \xi_0 < 1, \tag{101}$$

avem

$$\theta(1) = \frac{q\overset{*}{M}}{k\pi RK} \cdot \int_0^K u\,\mathrm{cn}^2 u \cdot \mathrm{dn} u \cdot (a - \mathrm{sn}^2 u)^{-\frac{\mathrm{sn}^2 u}{2a}} (\mathrm{sn}\, u)^{\frac{\mathrm{sn}^2 u}{a} - 1} du. \tag{102}$$

De asemenea în (100) cu

$$\xi = \frac{\mathrm{dn}'^2 u}{\varkappa^2}, \quad d\xi = -\frac{2\varkappa'^2}{\varkappa^2} \mathrm{sn}' u \cdot \mathrm{dn}' u \cdot \mathrm{cn}' u\, du, \quad 1 < \xi < c, \tag{103}$$

unde accentul reprezintă funcțiile lui Jacobi de modul complementar avem :

$$\frac{1}{2} - \theta(1) = \frac{q\overset{*}{M}}{k\pi RK} \frac{\varkappa'}{\varkappa} \int_{\tilde{u}}^{K'} u\,\mathrm{sn}' u \cdot \mathrm{dn}' \cdot u\,\mathrm{cn}'^2 u \frac{\left(a - \frac{\mathrm{dn}'^2 u}{\varkappa^2}\right)^{-\frac{\mathrm{dn}'^2 u}{2a\varkappa^2}}}{\left(\frac{\mathrm{dn}' u}{\varkappa}\right)^{2 - \frac{\mathrm{dn}'^2 u}{a\varkappa^2}}} du, \tag{104}$$

unde

$$\tilde{u} = F\left(\arcsin\sqrt{\frac{c-a}{c-1}},\ \varkappa'\right). \tag{105}$$

În continuare,

$$z(c) - z(a) = -\,\mathrm{i}(T - R) \tag{106}$$

şi integrînd ecuaţia (92) între a şi c găsim :

$$T - R = \frac{q\overset{*}{M}}{4\varkappa kK}\int_a^c \frac{\mathrm{d}\xi_0}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(c-\xi_0)}}\int_a^{\xi_0}(\xi-1)^{\frac{1}{2}}\frac{\xi^{\frac{\xi}{2a}-1}}{(\xi-a)^{\frac{\xi}{2a}}}\mathrm{d}\xi, \tag{107}$$

în timp ce cu

$$z(\infty) - z(c) = S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}[z_n(\infty) - z_n(c)] \tag{108}$$

şi integrînd ecuaţia (86) între c şi ∞ găsim

$$S_n = \frac{qU_n(c)}{4\varkappa kK}\int_c^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\xi(\xi-1)(\xi-c)}} + \tag{109}$$

$$+\frac{q\overset{*}{M}_n}{4\varkappa kK}\int_c^\infty \frac{\mathrm{d}\xi_0}{\sqrt{\xi_0(\xi_0-1)(\xi_0-c)}}\int_c^{\xi_0}\xi^{\frac{1}{4n}-1}\frac{(\xi-1)^{\frac{1}{2}}}{(\xi-a)^{\frac{2m-3}{4n}}}\prod_{p=2}^{m-1}\left(\frac{\xi-a_p(n)}{\xi-a_{p-1}(n)}\right)^{-\frac{2p-1}{4n}}\mathrm{d}\xi.$$

Cu aceeaşi transformare (103), egalitatea (107) devine :

$$T - R = \frac{q\overset{*}{M}}{kK}\frac{\varkappa'}{\varkappa}\int_0^{\tilde{u}} u\,\mathrm{cn}'^2 u\,\mathrm{dn}' u\,\frac{\left(\frac{\mathrm{dn}' u}{\varkappa}\right)^{\frac{\mathrm{dn}'^2 u}{a\varkappa^2}-2}}{\left(\frac{\mathrm{dn}'^2 u}{\varkappa^2}-a\right)^{\frac{\mathrm{dn}'^2 u}{2a\varkappa^2}}}\mathrm{d}u - \frac{q\cdot\tilde{u}\cdot U(c)}{2kK}. \tag{110}$$

În (109) facem transformarea

$$\xi = (\varkappa\,\mathrm{sn} u)^{-2}; \qquad c < \xi < \infty, \tag{111}$$

vom avea

$$S_n = \frac{q}{2k}U_n(c) + \frac{q\overset{*}{M}_n}{kK}\varkappa^{\frac{1}{2n}}\int_0^K \frac{u(\mathrm{sn}\,u)^{-1-\frac{1}{2n}}\,\mathrm{cn} u\,\mathrm{dn}^2 u}{(1-a\varkappa^2\,\mathrm{sn}^2 u)^{\frac{2m-3}{4n}}}\prod_{p=2}^{m-1}(1-a_p\varkappa^2\mathrm{sn}^2 u)^{\frac{1}{2n}}\mathrm{d}u \tag{112}$$

Se vede imediat că

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{q}{2k}U(c)+\frac{q\overset{*}{M}}{kK}\int_0^K\frac{u\,\mathrm{cn}\,u\cdot\mathrm{dn}^2u}{\mathrm{sn}\,u}(1-a\varkappa^2\,\mathrm{sn}^2u)^{-\frac{1}{2a\varkappa^2\mathrm{sn}^2u}}\mathrm{d}u. \quad (113)$$

Această egalitate corespunde canalului semicircular.

Integrînd acum ecuația diferențială (82) și separînd apoi părțile reală și imaginară ale acesteia, găsim :

$$x_n(t)-S_n=-\frac{q\overset{*}{M}_n}{4\varkappa kK}\int_{-\infty}^{t}\frac{\mathrm{d}\xi_0}{\sqrt{(-\xi_0)(1-\xi_0)(c-\xi_0)}}\int_{-\infty}^{\xi_0}(-\xi)^{\frac{1}{4n}-1}\times$$

$$\times\frac{(1-\xi)^{\frac{1}{2}}}{(a-\xi)^{\frac{2m-3}{4n}}}\prod_{p=2}^{m-1}\left(\frac{a_p(u)-\xi}{a_{p-1}(u)-\xi)}\right)^{-\frac{2p-1}{4n}}\mathrm{d}\xi,\qquad t\in(-\infty,0), \quad (114)$$

$$y_n(t)=\frac{q}{4\varkappa kK}\int_{-\infty}^{t}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{(-\xi)(1-\xi)(c-\xi)}}-T.$$

Egalitățile (114) reprezintă forma parametrică a ecuației arcelor libere AB pentru canalele de contur poligonal.

O integrare prin părți, urmată de o schimbare de variabilă

$$t=-\frac{\mathrm{sn}'^2u}{\mathrm{cn}'^2u}=-\mathrm{tn}'^2u,\qquad -\infty<t<0, \quad (115)$$

unde accentul înseamnă ca mai înainte, funcțiile lui Jacobi de modul complementar, implică forma :

$$x_n(u_0)-S_n=\chi\frac{q\overset{*}{M}_n}{kK}\int_{u_0}^{K'}(u_0-u)(\mathrm{tn}'u)^{\frac{1}{2n}-1}\frac{\mathrm{dn}'u}{\mathrm{cn}'^2u}\times$$

$$\times\frac{\prod_{p=2}^{m-1}(a_p(u)\,\mathrm{cn}'^2u+\mathrm{sn}'^2u)^{\frac{1}{2n}}}{(1-\chi'^2\mathrm{sn}'^2u)^{\frac{2m_2-3}{4n}}}\,\mathrm{d}u\qquad 0<u_0<K', \quad (116)$$

$$y_n(u_0)=-\frac{q}{2kK}u_0,$$

unde

$$u_0=F\left(\arcsin\sqrt{\frac{\xi_0}{\xi_0-1}},\ \varkappa\right).\qquad -\infty<\xi_0<0, \quad (117)$$

$$\chi=a^{-\frac{1}{2}},\ \chi'^2+\chi^2=1. \quad (118)$$

În a doua ecuaţie (116) am ţinut seama de a doua egalitate din (6). Cînd $u_0 = K'$ evident $x_n(K') = S_n$, iar cînd $u_0 = 0$, $x_n(0) = R$. Din prima ecuaţie (116) rezultă

$$S_n - R = \chi \frac{q\overset{*}{M}_n}{kK} \int_0^{K'} u(\mathrm{tn}'u)^{\frac{1}{2n}-1} \frac{\mathrm{dn}'u}{\mathrm{cn}'^2 u} \frac{\prod_{p=2}^{m-1} (a_p(u)\,\mathrm{cn}'^2 u + \mathrm{sn}'^2 u)^{\frac{1}{2n}}}{(1-\chi'^2 \mathrm{sn}'^2 u)^{\frac{2m-3}{4n}}}\,\mathrm{d}u. \tag{119}$$

Cînd $n \to \infty$ din (116), pentru linia liberă AB a canalului semicircular, avem ecuaţiile :

$$x(u_0) - S = \chi^{1-\frac{3}{2\chi^2}} \cdot \frac{q\overset{*}{M}}{kK} \cdot \int_{u_0}^{K'} \frac{(u_0 - u)\,\mathrm{dn}'u}{\mathrm{sn}'u \cdot \mathrm{cn}'u} \frac{(1-\chi'^2 \mathrm{sn}'u)^{\frac{\chi^2}{2}\mathrm{tn}'^2 u}}{(\chi\,\mathrm{sn}'u)^{\chi^2 \mathrm{tn}'^2 u}}\,\mathrm{d}u,$$

$$0 < u_0 < K', \tag{120}$$

$$y(u_0) = -\frac{q}{2kK} u_0,$$

în consecinţă, din (119) pentru $n \to \infty$, obţinem

$$S - R = \chi^{1-\frac{3}{2\chi^2}} \frac{q\overset{*}{M}}{kK} \int_0^{K'} \frac{u\,\mathrm{dn}'u}{\mathrm{sn}'u \cdot \mathrm{cn}'u} \frac{(1-\chi'^2 \mathrm{sn}^2 u)^{\frac{\chi^2}{2}\mathrm{tn}'^2 u}}{(\chi\,\mathrm{sn}'u)^{\chi^2 \mathrm{tn}'^2 u}}\,\mathrm{d}u. \tag{121}$$

În ce privesţe constantele $\overset{*}{M}_n$, definite în (87) prin transformarea

$$\xi_0 = (\chi \sin\alpha)^{-2}, \qquad 0 < \xi_0 < \infty, \tag{122}$$

avem

$$\overset{*}{M}_n = \frac{\chi^{\frac{2}{n}-1}}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\alpha)^{-\frac{2}{n}} (\cos\alpha)^{\frac{3}{2n}} (1-\chi^2 \sin^2\alpha)^{\frac{1}{2}} \prod_{p=2}^{n-1} (1 - a_p \chi^2 \sin^2\alpha)^{\frac{1}{2n}}\,\mathrm{d}\alpha \right]^{-1} \tag{123}$$

Pentru χ foarte mic în paranteza pătrată deducem :

$$\overset{*}{M}_n \approx \frac{\chi^{\frac{2}{n}-1}}{2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\alpha)^{-\frac{2}{n}} (\cos\alpha)^{\frac{3}{2n}}\,\mathrm{d}\alpha \right]^{-1} \tag{124}$$

sau ţinînd seama că

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\alpha)^{-\frac{2}{n}} (\cos\alpha)^{\frac{3}{2n}}\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4n}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{2n}\right)}, \tag{125}$$

avem

$$\overset{*}{M}_n \approx \chi^{\frac{2}{n}-1} \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4n}\right)}. \tag{126}$$

Cînd $n \to \infty$, din (126) obținem

$$\overset{*}{M} \approx \frac{1}{\pi\chi} \tag{127}$$

dacă avem în vedere formula

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{n!}. \tag{128}$$

Pentru constanta $U(c)$ care intervine în (113), găsim din (70) și (64) expresia

$$U(c) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\pi\chi}\int_a^c \xi_0^{\frac{1}{4n}-1} \frac{(\xi_0-1)^{\frac{1}{2}}}{(\xi_0-a)^{\frac{2n-3}{4n}}} \prod_{p=2}^{m-1}\left(\frac{\xi_0-a_p(n)}{\xi_0-a_{p-1}(n)}\right)^{-\frac{2p-1}{4n}} \mathrm{d}\xi_0\right]. \tag{129}$$

Evident, cînd $c \to \infty$ avem $U(c) \to 1$ și

$$W(c) \to -k^{-1}\mathrm{i}. \tag{130}$$

Pentru cazul cînd c este finit, în (129) facem transformarea (103); obținem

$$U(c) = \frac{2}{\pi\chi}\frac{x'}{\chi}\int_0^{\tilde{u}} \mathrm{cn}'^2u\,\mathrm{dn}'u \frac{\left(\frac{\mathrm{dn}'u}{\chi}\right)^{\frac{\mathrm{dn}'^2u}{ax^2}-2}}{\left(\frac{\mathrm{dn}'^2u}{\chi^2}-a\right)^{\frac{\mathrm{dn}'^2u}{2ax^2}}}\mathrm{d}u \tag{129'}$$

5. *Cazuri particulare.*

I. În cazul cînd $a \to 1$, din (105) avem $\tilde{u} = K'$, iar din (104 deducem :

$$\theta(1) = \frac{1}{2}. \tag{131}$$

Acest rezultat corespunde situației cînd canalul semicircular este neobturat. Eliminînd apoi între (102), (110), (113), (112) și a doua relație (6) mărimile R, T, S, q, găsim o ecuație pentru necunoscuta c. Ecuațiile arcului liber AB se obțin imediat din (120):

$$x(u_0) - S = \frac{q}{\pi\chi k K}\int_{u_0}^{K'} (u_0 - u)\,\mathrm{dn}'u(\mathrm{sn}'u)^{-1-\mathrm{tn}'^2 u}(\mathrm{cn}'u)^{\mathrm{tn}'^2 u - 1}\,du,$$

$$0 < u_0 < K', \tag{132}$$

$$y(u_0) = -\frac{q}{2kK}u_0.$$

Din (129') rezultă

$$u(c) = \frac{2\varkappa'}{\pi\chi\varkappa}\int_0^{K'} \mathrm{cn}'u\,\mathrm{dn}'u\,\frac{\left(\dfrac{\mathrm{dn}'u}{\varkappa}\right)^{\frac{\mathrm{dn}'^2 u}{\varkappa^2}-2}}{\left(\dfrac{\varkappa'}{\varkappa}\mathrm{cn}'u\right)^{\frac{\mathrm{dn}'^2 u}{\varkappa^2}}}\,du. \tag{133}$$

II. În cazul $c \to \infty$, din a doua formulă (6) deducem $K' \to \infty$ și deci $T \to \infty$. Cu alte cuvinte, stratul drenant este aruncat la infinit. Cum $U(\infty) = 1$, din (122) găsim

$$S_n = \frac{q}{2k}. \tag{134}$$

Evident, cînd $n \to \infty$

$$S = \frac{q}{2k}. \tag{135}$$

Pentru această situație forma ecuațiilor arcului AB este:

$$x_n(\alpha_0) - S_n = \frac{2q}{k\chi\pi^2}\int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{(\alpha_0 - \alpha)\,(\mathrm{sh}\,\alpha)^{-1-\frac{1}{2n}}}{(a + \mathrm{sh}^2\alpha)^{\frac{2m-3}{2n}}}\cdot \mathrm{ch}^2\alpha \cdot \prod_{p=2}^{m-1}(a_p(u) + \mathrm{sh}^2\alpha)^{\frac{1}{2n}}\,d\alpha, \tag{136}$$

$$y_n(\alpha_0) = -\frac{q}{k\pi}\alpha_0, \qquad 0 < \alpha_0 < \infty,$$

dacă facem transformarea

$$\xi_0 = -\mathrm{sh}^2\alpha, \qquad -\infty < \xi_0 < 0. \tag{137}$$

Cînd $\alpha_0 = 0$, atunci

$$S_n - R = \frac{2q}{\chi\pi^2 k} \int_0^\infty \frac{\alpha(\mathrm{sh}\,\alpha)^{-1-\frac{1}{2n}} \mathrm{ch}^2\alpha}{(a + \mathrm{sh}^2\alpha)^{\frac{2m-3}{4n}}} \prod_{p=2}^{m-1} (a_p(u) + \mathrm{sh}^2\alpha)^{\frac{1}{2n}}\, \mathrm{d}\alpha, \tag{138}$$

iar dacă și $a \to 1$

$$S_n - R = \frac{2q}{k\pi^2} \int_0^\infty \alpha \cdot (\mathrm{sh}\,\alpha)^{-1-\frac{1}{2n}} \cdot (\mathrm{ch}\,\alpha)^{1+\frac{3}{2n}} \prod_{p=2}^{n-1} (a + \mathrm{sh}^2\alpha)^{\frac{1}{2n}}\, \mathrm{d}\alpha. \tag{139}$$

În cazul particular, $a \to 1$, avem ($n \to \infty$) :

$$x(\alpha_0) - S = \frac{2q}{k\pi^2} \int_{\alpha_0}^\infty (\alpha_0 - \alpha)(\mathrm{sh}\,\alpha)^{-1-\mathrm{sh}^2\alpha}(\mathrm{ch}\,\alpha)^{\mathrm{sh}^2\alpha}\, \mathrm{d}\alpha$$

$$0 < \alpha_0 < \infty \tag{140}$$

$$y(\alpha_0) = -\frac{q}{k\pi}\alpha_0$$

Pentru $\alpha_0 = 0$, din (141) rezultă

$$S - R = \frac{2q}{k\pi^2} \int_0^\infty (\mathrm{sh}\,\alpha)^{-1-\mathrm{sh}^2\alpha} (\mathrm{ch}\,\alpha)^{\mathrm{sh}^2\alpha}\, \mathrm{d}\alpha. \tag{141}$$

Să luăm în (102) $a \to 1$, $\varkappa \to 0$ ($c \to \infty$). Obținem

$$R = \frac{4q}{k\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \alpha\, (\sin\alpha)^{\sin^2\alpha - 1} (\cos\alpha)^{2-\sin^2\alpha}\, \mathrm{d}\alpha. \tag{142}$$

Primită la redacție la 21 februarie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. Șt. I. Gheorghiță, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Edit. Academiei R. S. România, București (1966).
2. B. K. Rizenkampf, *Ghidravlika gruntovîh vod*, ceast tretea. Ucen. zap. Saratovskogo gos. un-ta, XV (1940), 5,
3. A. M. Juravski, *Spravocinik poellipticeskih funkțiam*, Izd-vo AN SSSR, M. — L (1941).
4. Iu. S. Sikorski, *Elementi teorii ellipticeskih funcții prilojeniami s mehanike*, ONTI, M. — L (1936).
5. N. I. Mushelisvili, *Singuliarnîe integralnîe uravnenia*, Izdanie trete, ispravlennoe i dopolnennoe. Moskva (1968).
6. S. Stoilow, *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, Vol. I, București (1962).

ASUPRA TRANSFERULUI OPTIM AL VEHICULELOR SPAȚIALE ÎN PUNCTELE DE LIBRAȚIE ECHIDISTANTE DIN SISTEMUL PĂMÎNT-LUNĂ

de MIHAI POPESCU
Institutul național pentru creație științifică și tehnică

Se determină traiectoria optimală care asigură transferul vehiculelor spațiale în punctele de librație echidistante din sistemul Pământ-Lună cu consum minim de combustibil.

1. NOTAȚII

Gxy	— sistem rotitor de axe de coordonate cu originea în baricentrul G al sistemului Pământ-Lună (fig. 1),
x, y	— coordonate ale vehiculului în sistemul de axe, $G \times y$
$L\xi\eta$	— sistem rotitor de axe de coordonate cu originea în punctul de librație (fig. 1),
ξ, η	— coordonate ale vehiculului în sistemul de axe $L\xi\eta$,
$\bar{x}$, $\bar{y}$	— coordonate ale punctului de librație în sistemul Gxy,
r	— distanța de la Pământ la punctul de librație,
ρ	— distanța de la Lună la punctul de librație,
S_1	— distanța dintre baricentru și Pământ,
S_2	— distanța dintre baricentru și Lună,
D	— distanța dintre Pământ și Lună,
T	— timpul de evoluție al vehiculului,
ω	— viteza unghiulară de rotație în jurul baricentrului,
μ	— parametrul gravitațional al Pământului,
m	— masa vehiculului,
m_1	— masa Pământului,
m_2	— masa Lunii,
m^*	— raportul dintre masa Lunii și a Pământului,
V_ξ, V_η	— componente ale vitezei vehiculului în direcția axelor sistemului,
a_ξ, a_η	— componente ale accelerației datorită tracțiunii în direcția axelor sistemului,
g	— accelerația gravitației.

,T. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 1, 1980, P. 29–47

2. INTRODUCERE

Problema atingerii punctelor de libraţie a vehiculelor spaţiale care se află plasate pe orbite ale Pămîntului sau ale Lunii comportă dificultăţi folosind metoda impulsurilor. Astfel, la variaţii mici ale vitezelor iniţiale s-a constatat o deviere importantă faţă de ţintă, respectiv faţă de punctele de libraţie. Aşa cum s-a arătat în [1] acest inconvenient poate fi înlăturat prin utilizarea continuă a unei tracţiuni mici. În aceste condiţii, o problemă deosebit de importantă care se impune a fi rezolvată este aceea a găsirii legilor optime care guvernează mişcarea unui vehicul spaţial în vederea atingerii punctelor de libraţie echidistante, astfel încît traiectoria urmată de acesta să determine un consum minim de combustibil. Aceasta implică rezolvarea unei probleme de tip Lagrange cu extremităţi fixe.

3. PROBLEMA DE OPTIMUM

Ecuaţiile de mişcare ale vehiculului sub acţiunea instalaţiei de propulsie de mică tracţiune în sistemul $L\xi\eta$ (fig. 1) sînt :

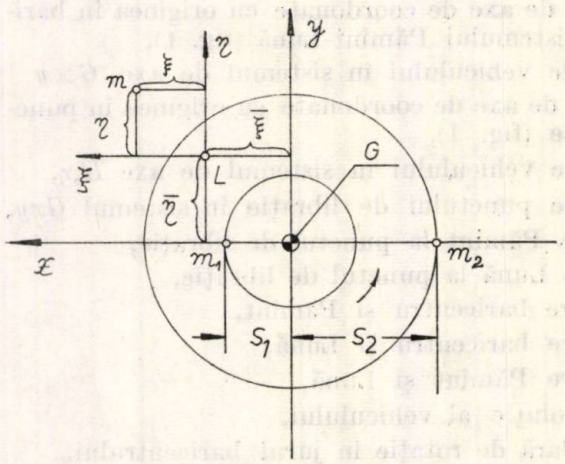


Fig. 1

$$\begin{aligned}
&\frac{d\xi}{dt} = V_\xi,\\
&\frac{dV_\xi}{dt} = 2\omega V_\eta + K_1\xi + \\
&\qquad + K_3\eta + a_\xi,\\
&\frac{d\eta}{dt} = V_\eta,\\
&\frac{dV_\eta}{dt} = -2\omega V_\xi + K_2\eta + \\
&\qquad + K_3\xi + a_\eta,
\end{aligned} \tag{1}$$

unde

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{3}{4}(1 + m^*),\\
K_2 &= \frac{9}{4}(1 + m^*),\\
K_3 &= \mp\frac{3}{4}\sqrt{3}(1 - m^*).
\end{aligned} \tag{2}$$

Sistemul de unităţi adoptat este $D = 1$ şi unitatea de timp aleasă este astfel încît $\mu = 1$.

3.1. PROBLEMA VARIAȚIONALĂ DE TIP LAGRANGE

Fie sistemul de ecuații diferențiale

$$\varphi_i \equiv \frac{dx_i}{dt} - f_i(x_1 \dots x_n,\ u_1 \dots u_r) = 0,\ i = 1, \dots, n, \tag{3}$$

unde x_i, u_r sînt variabile de stare, respectiv de comandă, iar funcțiile f_i sînt definite de valori ale variabilelor vectoriale $x \in X$ și valorile $u \in U$. Aceste funcții sînt presupuse continui în $x_1 \dots x_n$, $u_1 \dots u_r$ și continui derivabile în $x_1 \dots x_n$, ceea ce înseamnă că funcțiile

$$f_i\ (x_1 \dots x_n,\ u),\ \frac{\partial f_i\ (x_1 \dots x_n,\ u)}{\partial x_j},\ i, j = 1, \dots, n, \tag{4}$$

sînt definite și continui pe produsul $X \times U$.

Fiind date în spațiul fazelor X două puncte x_0 și x_1 printre comenzile admisibile $u = u(t)$ care transferă punctul reprezentativ din x_0, în x_1, să se găsească aceea care minimizează funcționala

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t),\ u(t))\ dt, \tag{5}$$

$x(t)$ însemnînd soluția ecuației (3) cu condiția inițială $x(t_0) = x_0$ asociată comenzii $u(t)$, și t_1 momentul cînd această soluție trece prin punctul x_1.

Dacă curba γ_0 realizează extremumul funcționalei J cu condiția (3) și dacă de-a lungul acestei curbe unul dintre determinanții principali ai matricei funcționale

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\right),\quad i, j = 1, \dots, n, \tag{6}$$

este tot timpul diferit de zero, atunci γ_0 este o curbă integrală a următorului sistem de ecuații diferențiale

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0,\qquad i = 1, \dots, n, \tag{a}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_k} = 0,\qquad k = 1, \dots, r, \tag{b}$$

$$\varphi_j = 0,\qquad j = 1, \dots, n \tag{c}$$

(7)

în care

$$L = f_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j,$$

$$\lambda_j = \lambda_j\ (t). \tag{8}$$

Se demonstrează uşor că funcţionala consumului de combustibil este dată de

$$J = \int_0^T (u_1^2 + u_2^2)\mathrm{d}t\,. \tag{9}$$

3.2. NATURA EXTREMULUI

1) Pentru ca funcţia L definită în (8) să aibă un minim în raport cu u, nu este suficient ca derivatele ei de ordinul întîi să fie nule, relaţie exprimată de relaţia (7b). Este necesar în plus ca forma pătratică

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r} \frac{\partial^2}{\partial u_k\,\partial u_l}\left(f_0 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\,\varphi_j\right)\alpha_k\,\alpha_l \tag{10}$$

să fie pozitivă pentru orice versor α de coordonate $\alpha_1 \ldots \alpha_r$. Cu notaţiile din (8) această condiţie devine în cazul problemei noastre

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} \frac{\partial^2 L}{\partial u_k\,\partial u_l}\,\alpha_k\,\alpha_l > 0 \tag{11}$$

şi se numeşte condiţia lui Legendre. Într-adevăr, fie funcţia $L(u)$ şi fie vectorul unitar α de coordonate α_1, α_2.
Definim funcţia :

$$l(s) = L(u + s\alpha). \tag{12}$$

Dacă u realizează un minimum pentru L, atunci 0 realizează un minimum pentru l. Aşadar

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial L}{\partial u_k}\,(u)\alpha_k = l'(0) = 0, \tag{13}$$

relaţie care coincide cu (7b).

Pentru ca funcţia $l(s)$ să aibă un minimum pentru $s = 0$, este necesar în plus ca

$$l''(s)\,|_{s=0} > 0. \tag{14}$$

Deoarece

$$l''(s) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2} \frac{\partial^2 L}{\partial u_k\,\partial u_l}\,(u + s\alpha)\,\alpha_k\,\alpha_l, \tag{15}$$

folosirea condiţiei (14) ne conduce la relaţia (11) care în cazul problemei noastre se reduce la

$$\sum_{i=1}^{2} \alpha_i^2 > 0, \tag{16}$$

adevărată pentru orice α_i, aşa încît condiţia lui Legendre este satisfăcută.

2) Satisfacerea condiției lui Legendre nu exclude posibilitatea unui minimum relativ. De aceea, pentru demonstrarea existenței unui minimum absolut (în raport cu întreaga mulțime U) este necesar să avem îndeplinită condiția lui Weierstrass

$$f_0(x,u)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x,u)\leqslant f_0(x,u^*)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f_i(x,u^*) \tag{17}$$

pentru orice $u(t)\neq u^*(t)$, $t\in[t_0,\ t_1]$,
unde am notat cu semnul stelat valorile pe care le iau parametrii de comandă pe extremală. În cazul tratat de noi, condiția lui Weierstrass devine

$$-u_1^2-u_2^2+\lambda_2u_1+\lambda_4u_2\geqslant -u_1^{*2}-u_2^{*2}+\lambda_2u_1^*+\lambda_4u_2^*. \tag{18}$$

Pentru realizarea condiției (18) este necesar și suficient să avem

$$-u_1^2-u_2^2+\lambda_2u_1+\lambda_4u_2=\max(-u_1^{*2}-u_2^{*2}+\lambda_2u_1^*+\lambda_4u_2^*). \tag{19}$$

Analizînd expresia din dreapta egalității (30) se observă că ea va fi maximă cînd sînt îndeplinite simultan condițiile

$$u_1^{*2}+u_2^{*2}=\min(u_1^2+u_2^2), \tag{20}$$

$$\lambda_2u_1^*+\lambda_4u_2^*=\max(\lambda_2u_1+\lambda_4u_2). \tag{21}$$

Presupunem adevărată relația (20), astfel încît avem

$$u_1^{*2}+u_2^{*2}\leqslant u_1^2+u_2^2. \tag{22}$$

Fie intervalul compact $[0,\ T]$ și funcțiile

$$h^*(t)=u_1^{*2}+u_2^{*2}, \tag{23}$$
$$h(t)=u_1^2+u_2^2,$$

definite pe intervalul compact $[0,\ T]$.
Ținînd seama de (22) și (23),

$$h^*(t)\leqslant h(t). \tag{24}$$

Potrivit proprietății de monotonie a integralei definite rezultă

$$\int_0^T h^*(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T h(t)\mathrm{d}t. \tag{25}$$

Relația (25) exprimă de fapt că pentru valorile parametrilor de comandă situate pe extremală se obține valoarea minimă a integralei

$$J=\int_0^T(u_1^2+u_2^2)\mathrm{d}t. \tag{26}$$

Pe de altă parte, din (21) se observă că produsul scalar între vectorii $\bar{\lambda}(\lambda_2, \lambda_4)$ și $\bar{u}^*(u_1^*, u_2^*)$ este maxim atunci cînd vectorii $\bar{\lambda}$ și $\bar{u}^*$ sînt coliniari, ceea ce rezultă din satisfacerea relației (7b).

În concluzie, sînt îndeplinite simultan (20) și (21). Cu aceasta, condiția lui Weierstrass este demonstrată.

2) Considerăm funcția

$$\mathscr{F} = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i(t)\varphi_i. \tag{27}$$

Pentru ecuațiile (3) se poate ușor vedea că extremalele problemei de optim considerate sînt nesinguläre deoarece valoarea determinantului

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathscr{F}_{\dot{x}_k\lambda_i} & \mathscr{F}_{\dot{x}_k\dot{x}_i} \\ 0 & \varphi_{k\dot{x}_i} \end{vmatrix} \neq 0, \quad i,k = 1, \ldots, 4. \tag{28}$$

într-adevăr,

$$\{\mathscr{F}_{\dot{x}_k\lambda_i}, \quad \varphi_{k\dot{x}_i}\} = \delta_{ki}, \tag{29}$$

unde δ_{ki} este simbolul lui Kroneker.

4. DETERMINAREA EXTREMALELOR

4.1. INTEGRAREA ECUAȚIILOR LUI LAGRANGE

Efectuînd calculele, ecuațiile (7a) devin :

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= -K_1\lambda_2 - K_3\lambda_4, \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 + 2\omega\lambda_4, \\ \dot{\lambda}_3 &= -K_3\lambda_2 - K_2\lambda_4, \\ \dot{\lambda}_4 &= -2\omega\lambda_2 - \lambda_3 \end{aligned} \tag{30}$$

sau

$$\dot{\bar{\lambda}} = L\bar{\lambda}, \tag{30'}$$

unde L este matricea sistemului (30).

Un sistem fundamental de soluții pentru (30) se obține căutînd soluții de forma

$$\lambda_i = A_i e^{rt}, \qquad i = 1, \ldots, 4. \tag{31}$$

Înlocuind în sistemul (30) se obține un sistem liniar și omogen în raport cu necunoscutele A_i, iar condiția ca acest sistem să aibă soluții nu toate nule conduce la ecuația algebrică

$$\Delta = |L - rE| = 0, \tag{32}$$

E fiind matricea unitate.

Se găsește :

$$r^4 + (4\omega^2 - K_2 - K_1)r^2 + K_1K_2 - K_3^2 = 0, \tag{32'}$$

cu soluțiile

$$r_{1.2} = \pm ia_1, \tag{33}$$
$$r_{3.4} = \pm ib_1,$$

a_1, b_1 avînd expresiile

$$a_1 = \sqrt{\frac{K_1 + K_2 - 4\omega^2 + \sqrt{(4\omega^2 - K_1 - K_2)^2 - 4(K_1K_2 - K_3^2)}}{2}},$$
$$b_1 = \sqrt{\frac{K_1 + K_2 - 4\omega^2 - \sqrt{(4\omega^2 - K_1 - K_2)^2 - 4(K_1K_2 - K_3^2)}}{2}}. \tag{34}$$

Rădăcinilor distincte ale ecuației (30) le corespund patru vectori proprii coloană $\overline{V}_i$ și patru soluții particulare de forma (31) ce constituie un sistem fundamental de soluții în domeniul $|t| < +\infty$, $|\lambda_i| < +\infty$ ($i = 1, \ldots, 4$) cu ajutorul cărora soluția generală a sistemului de ecuații (30) se scrie imediat. Expresiile vectorilor proprii sînt date de

$$\overline{V}_i = (L_{kj})_{r=r_i}, \qquad i, k, j = 1, \ldots, 4, \tag{35}$$

unde L_{kj} sînt complementii algebrici ai liniei k a determinantului $\Delta(r_i)$.

Dacă notăm cu $\lambda_i^p (i = 1 \ldots 4)$ soluțiile particulare obținute din (31), un sistem fundamental de soluții poate fi luat

$$\overline{\lambda}_1^p = \frac{\lambda_1^p + \lambda_2^p}{2}, \quad \overline{\lambda}_2^p = \frac{\lambda_1^p - \lambda_2^p}{2i}, \quad \overline{\lambda}_3^p = \frac{\lambda_3^p + \lambda_4^p}{2}, \quad \overline{\lambda}_4^p = \frac{\lambda_3^p - \lambda_4^p}{2i}$$

Soluția generală scrisă cu ajutorul sistemului fundamental de soluții (36) va fi

$$\overline{\lambda} = C_1\overline{\lambda}_1^p + C_2\overline{\lambda}_2^p + C_3\overline{\lambda}_3^p + C_4\overline{\lambda}_4^p, \tag{37}$$

unde $\overline{\lambda}$, $\overline{\lambda}_i^p$ sînt vectori coloană, iar C_i ($i = 1, \ldots, 4$) sînt constante arbitrare. Din relația (37) și pe baza dezvoltării calculelor se obțin soluțiile pentru sistemul (30)

$$\lambda_1(t) = C_1[-a_1(4\omega^2 - K_2 - a_1^2)\sin a_1t - 2\omega K_3 \cos a_1t] +$$
$$+ C_2[a_1(4\omega^2 - K_2 - a_1^2)\cos a_1t - 2\omega K_3 \sin a_1t] +$$
$$+ C_3[-b_1(4\omega^2 - K_2 - b_1^2)\sin b_1t - 2\omega K_3 \cos b_1t] +$$
$$+ C_4[b_1(4\omega^2 - K_2 - b_1^2)\cdot \cos b_1t - 2\omega K_3 \sin b_1t],$$

$$\lambda_2(t) = C_1(a_1^2 + K_2)\cos a_1 t + C_2(a_1^2 + K_2)\sin a_1 t +$$

$$+ C_3(b_1^2 + K_2)\cos b_1 t + C_4(b_1^2 + K_2)\sin b_1 t, \tag{38}$$

$$\lambda_3(t) = C_1(-K_3 a_1 \sin a_1 t - 2\omega K_2 \cos a_1 t) +$$

$$+ C_2(K_3 a_1 \cos a_1 t - 2\omega K_2 \sin a_1 t) +$$

$$+ C_3(-K_3 b_1 \sin b_1 t - 2\omega K_2 \cos b_1 t) + C_4(K_3 b_1 \cos b_1 t - 2\omega K_2 \sin b_1 t),$$

$$\lambda_4(t) = C_1(-2\omega a_1 \sin a_1 t - K_3 \cos a_1 t) + C_2(2\omega a_1 \cos a_1 t - K_3 \sin a_1 t) +$$

$$+ C_3(-2\omega b_1 \sin b_1 t - K_3 \cos b_1 t) + C_4(2\omega b_1 \cos b_1 t - K_3 \sin b_1 t).$$

Ţinînd seama de ecuaţiile (7b), se găsesc comenzile optimale ca funcţii de timp

$$a_\xi = u_1(t) = \frac{1}{2}[C_1(a_1^2 + K_2)\cos a_1 t + C_2(a_1^2 + K_2)\sin a_1 t +$$

$$+ C_3(b_1^2 + K_2)\cos b_1 t + C_4(b_1^2 + K_2)\sin b_1 t], \tag{39}$$

$$a_\eta = u_2(t) = \frac{1}{2}[C_1(-2\omega a_1 \sin a_1 t - K_3 \cos a_1 t) +$$

$$+ C_2(2\omega a_1 \cos a_1 t - K_3 \sin a_1 t) + C_3(-2\omega b_1 \sin b_1 t - K_3 \cos b_1 t) +$$

$$+ C_4(2\omega b_1 \cos b_1 t) - K_3 \sin b_1 t)].$$

Expresiile funcţiilor de comandă (39) permit determinarea extremalelor pentru problema considerată.

4.2. LEGILE MIŞCĂRII OPTIMALE

Determinarea traiectoriei optime care asigură transferul vehiculelor spaţiale în punctele echidistante de libraţie din sistemul Pămînt-Lună cu minimum de combustibil se reduce la integrarea sistemului de ecuaţii

$$\dot{x}_i - \sum_{j=1}^{4} a_{ij} x_j = \psi_i(t), \qquad i = 1, \ldots, 4, \tag{40}$$

unde a_{ij} sînt coeficienţii constanţi ai matricei ecuaţiilor de mişcare (1), iar $\psi_i(t)$ sînt funcţii de timp definite astfel:

$$\psi_{2k+1}(t) = 0, \quad k = 0, 1,$$

$$\psi_{2k}(t) = u_i \quad k, i = 1, 2. \tag{41}$$

Soluția sistemului (40) se scrie sub forma

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{ij}(t)\, x_j(0) + \sum_{j=1}^{4} \int_0^t K_{ij}(t, \tau)\psi_j(\tau)\, d\tau, \; i=1, \ldots, 4, \tag{42}$$

unde $R_{ij}(t)$ este matricea soluției fundamentale normale în $t_0 = 0$ a sistemului (40) la $\psi_i(t) = 0$ $(i = 1, \ldots, 4)$.
Rezultă

$$R_{ij}(0) = \delta_{ij}. \tag{43}$$

De asemenea, am notat

$$K_{ij}(t, \tau) = \sum_{m=1}^{4} R_{im}(t)\, R_{mj}^{-1}(\tau), \tag{44}$$

R_{mj}^{-1} fiind elementele matricei fundamentale inverse.

Fie $\bar{x}_i$ $(i = 1, \ldots 4)$ soluția sistemului (40) la $\psi_i(t) \equiv 0$.
Avem

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{4} \bar{c}_j f_j^i\,(t), \tag{45}$$

unde

$$\begin{aligned}
f_1^1(t) &= -a_1(4\omega^2 - K_2 - a_1^2)\sin a_1 t + 2\omega K_3 \cos a_1 t,\\
f_2^1(t) &= a_1(4\omega^2 - K_2 - a_1^2)\cos a_1 t + 2\omega K_3 \sin a_1 t,\\
f_3^1(t) &= -b_1(4\omega^2 - K_2 - b_1^2)\sin b_1 t + 2\omega K_3 \cos b_1 t,\\
f_4^1(t) &= b_1(4\omega^2 - K_2 - b_1^2)\cos b_1 t + 2\omega K_3 \sin b_1 t,\\
f_1^2(t) &= [-K_1(a_1^2 + K_2) + K_3^2]\cos a_1 t - 2\omega K_3 a_1 \sin a_1 t,\\
f_2^2(t) &= [-K_1(a_1^2 + K_2) + K_3^2]\sin a_1 t + 2\omega K_3 a_1 \cos a_1 t,\\
f_3^2(t) &= [-K_1(b_1^2 + K_2) + K]\cos b_1 - 2\omega b_1 \sin b_1 t\\
f_4^2(t) &= [-K_1 b_1^2 + K_2] + K_3^2]\sin b_1 t + 2\omega K_3 b_1 \cos b_1 t,\\
f_1^3(t) &= -2\omega K_1 \cos a_1 t - a_1 K_3 \sin a_1 t,\\
f_2^3(t) &= -2\omega K_1 \sin a_1 t - u_1 K_3 \cos a_1 t,\\
f_3^3(t) &= -2\omega K_1 \cos b_1 t - b_1 K_3 \sin b_1 t,\\
f_4^3(t) &= -2\omega K_1 \sin b_1 t - b_1 K_3 \cos b_1 t,\\
f_1^4(t) &= 2\omega K_1 a_1 \sin a_1 t - a_1^2 K_3 \cos a_1 t,
\end{aligned} \tag{46}$$

$$f_2^4(t) = -2\omega K_1 a_1 \cos a_1 t - a_1^2 K_3 \sin a_1 t,$$

$$f_3^4(t) = 2\omega K_1 b_1 \sin b_1 t - b_1^2 K_3 \cos b_1 t,$$

$$f_4^4(t) = -2\omega K_1 b_1 \cos b_1 t - b_1^2 K_3 \sin b_1 t,$$

iar $\bar{C}_i$ $(j = 1, \ldots, 4)$ sînt constante oarecare.

Ţinînd seama de (45) termenii matricei soluţiei fundamentale a sistemului omogen pot fi scrişi sub forma

$$R_{1j} = \sum_{i=1}^{4} c_{ij} f_i^1(t); \quad R_{2j} = \sum_{i=1}^{4} c_{ij} f_i^2(t); \quad R_{3j} = \sum_{i=1}^{4} c_{ij} f_i^3(t), \quad R_{4j} = \sum_{i=1}^{4} c_{ij} f_i^4(t). \tag{47}$$

Coeficienţii c_{ij} sînt determinaţi din condiţia (43) care devine

$$\begin{aligned}
\delta_{1j} &= c_{1j} f_1^1(0) + c_{2j} f_2^1(0) + c_{3j} f_3^1(0) + c_{4j} f_4^1(0), \\
\delta_{2j} &= c_{1j} f_1^2(0) + c_{2j} f_2^2(0) + c_{3j} f_3^2(0) + c_{4j} f_4^2(0), \\
\delta_{3j} &= c_{1j} f_1^3(0) + c_{2j} f_2^3(0) + c_{3j} f_3^3(0) + c_{4j} f_4^3(0), \\
\delta_{4j} &= c_{1j} f_1^4(0) + c_{2j} f_2^4(0) + c_{3j} f_3^4(0) + c_{4j} f_4^4(0).
\end{aligned} \tag{48}$$

Rezolvînd sistemul (48) se găseşte

$$\begin{aligned}
c_{11} &= 0, \\
c_{12} &= \frac{4\omega^3 K_1^2 - b_1^2 K_3^2}{K_3^2(a_1^2 - b_1^2)[K_1(b_1^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]}, \\
c_{13} &= \frac{-2\omega\{K_1[K_1(b_1^2 + K_2) - K_3^2] + K_3^2 b_1\}}{K_3^2(a_1^2 - b_1^2)[K_1(b_1^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]}, \\
c_{14} &= \frac{4\omega^2 K_1 + [K_1(b_1^2 + K_2) - K_3^2]}{K_3(a_1^2 - b_1^2)[K_1(b_1^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]}, \\
c_{21} &= -\frac{[4\omega^2 K_1(K_1^2 + K_3^2) + K_3^2(K_1 K_2 - K_3^2)]}{K_3^2 a_1(a_1^2 - b_1^2)[K_1(b_1^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]}, \\
c_{22} &= \frac{2\omega[K_3^2 - K_1(4\omega^2 - K_2 - b_1^2)]}{a_1 K_3(a_1^2 - b_1^2)[K_1(b_1^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]}, \\
c_{23} &= \frac{4\omega^2(K_1^2 - K_3^2) - (4\omega^2 - K_2 - b_1^2)(K_3^2 - K_1 K_2)}{K_3 a_1(a_1^2 - b_1^2)[K_1(b_1^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},
\end{aligned} \tag{49}$$

$$c_{24} = \frac{2\omega K_1[(4\omega^2 - K_2 - b_1^2) - K_3^2]}{K_3^2 a_1(a_1^2 - b_1^2)[K_1(b_1^2 + K_2) - K_3^2 - 4\omega^2 K_1]},$$

$$c_{32} = \frac{a_1^2 K_3^2 - 4\omega^2 K_1^2}{K_3^2(a_1^2 - b_1^2)[K_1(b_1^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{33} = \frac{2\omega\{a_1^2 K_3^2 - K_1[-K_1(a_1^2 + K_2) + K_3^2]}{K_3(a_1^2 - b_1^2)[K_1(b_1^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{34} = \frac{-K_1(a_1^2 + K_2) + K_3^2 - 4\omega^2 K_1}{K_3^2(a_1^2 - b_1^2)[K_1(b_1^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{41} = \frac{[-K_1(b_1^2 + K_2) + K_3^2] - 4\omega^2 K_1}{b_1(a_1^2 - b_1^2)\{[-K_1(b_1^2 + K_2) + K_3^2] - 4\omega^2 K_1},$$

$$c_{42} = \frac{2\omega[K_1(4\omega^2 - K_2 - a_1^2) - K_3^2]}{K_3 b_1(a_1^2 - b_1^2)[K_1(b_1^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{43} = \frac{K_1[(a_1 + K_2)(K_1 K_2 - K_3^2) - 4\omega^2(K_1 + K_2)]}{b_1 K_3^2(a_1^2 - b_1^2)[K_1(b_1^2 + K_2 - 4\omega^2) - K_3^2]},$$

$$c_{44} = \frac{2\omega K_1[(a_1^2 + K_2 - 4\omega^2) + K_3^2]}{b_1 K_3^2(a_1^2 - b_1^2)[K_1(b_1^2 + K_2 - 4\omega^2)^- - K_3^2]},$$

$$c_{31} = 0.$$

Din (42) rezultă

$$x_1(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{1j}(t)x_j(0) + \int_0^t [R_{12}(t-\tau)u_1(\tau) + R_{14}(t-\tau)u_2(\tau)]\mathrm{d}\tau, \qquad (50)$$

$$x_2(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{2j}(t)x_j(0) + \int_0^t [R_{22}(t-\tau)u_1(\tau) + R_{24}(t-\tau)u_2(\tau)]\mathrm{d}t,$$

$$x_3(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{3j}(t)x_j(0) + \int_0^t [R_{32}(t-\tau)u_1(\tau) + R_{34}(t-\tau)u_2(\tau)]\,\mathrm{d}\tau,$$

$$x_4(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{4j}(t)x_j(0) + \int_0^t [R_{42}(t-\tau)u_1(\tau) + R_{44}(t-\tau)u_2(\tau)]\mathrm{d}\tau.$$

Rezolvarea problemei de tip Lagrange cu extremităţi fixe implică folosirea condiţiilor la capete cunoscute

$$x_i(0) = x_i^0, \qquad x_i(T) = 0. \qquad (51)$$

Dezvoltînd calculele și utilizînd notațiile din anexă se găsește :

$$x_i(t) = H_1^i \sin a_1 t + H_2^i \cos a_1 t + H_3^i \sin b_1 t + H_4^i \cos b_1 t +$$

$$+ \sum_{j=1}^{4} C_j [A_j^i \sin a_1 t + B_j^i \cos a_1 t + D_j^i \sin b_1 t + E_j^i \cos b_1 t] + \tag{52}$$

$$+ t \sum_{j=1}^{2} [C_j [K_j^i \sin a_1 t + L_j^i \cos a_1 t) + C_{j+2} (K_{j+2}^i \sin b_1 t + L_{j+2}^i \cos b_1 t)],$$

$$i = 1, \ldots, 4.$$

Relațiile (52) se pot scrie sub forma :

$$x_i(t) = F_0^i(t) + \sum_{j=1}^{4} C_j F_j^i(t), \quad i = 1, \ldots, 4. \tag{53}$$

Din ultima relație (51) rezultă sistemul :

$$\sum_{j=1}^{4} C_j F_j^i(T) = -F_0^i(T), \quad i = 1, \ldots, 4, \tag{54}$$

de unde se determină

$$C_j = \frac{\Delta_{ji}}{\Delta}, \tag{55}$$

unde Δ_{ij} se obține prin înlocuirea coloanei coeficienților lui C_j cu $-F_0^i(T)$, iar

$$\Delta = |F_j^i(T)| (i, j = 1, \ldots, 4). \tag{56}$$

Cu aceasta, legile optimale care asigură transferul vehiculelor spațiale în punctele echidistante de librație ale sistemului Pămînt-Lună pot fi reprezentate prin soluția generală a sistemului (1)

$$x_i(t) = \left[H_1^i + \sum_{j=1}^{4} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} A_j^i \right] \sin a_1 t + \left[H_2^i + \sum_{j=1}^{4} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} B_j^i \right] \cos a_1 t +$$

$$+ \left[H_3^i + \sum_{j=1}^{4} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} D_j^i \right] \sin b_1 t + \left[H_4^i + \sum_{j=1}^{4} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} E_j^i \right] \cos b_1 t +$$

$$+ t \left\{ \sum_{j=1}^{4} \left[\frac{\Delta_{ij}}{\Delta} K_j^i \sin a_1 t + \frac{\Delta_{ij+1}}{\Delta} K_{j+1}^i \sin b_1 t \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{2} \left[\frac{\Delta_{ij}}{\Delta} K_j^i \cos a_1 t + \frac{\Delta_{ij+1}}{\Delta} L_{j+1}^i \cos b_1 t \right] \right\}. \tag{57}$$

4.3. CONSIDERAȚII PRIVIND DOMENIUL DE STABILITATE AL PARAMETRILOR MIȘCĂRII OPTIMALE

Fie sistemul perturbat al ecuației de mișcare, care, ținînd seama de (40), se poate scrie

$$\dot{y}_i - \sum_{j=1}^{4} a_{ij} y_i = \delta\psi_i(t), \tag{58}$$

unde y_i sînt perturbațiile variabilelor de stare x_i, iar $\delta\psi_i(t)$ perturbația funcției de comandă.

Presupunem că $\delta\psi_i(t)$ este continuă și satisface condiția

$$|\delta\psi_i(t)| \leqslant m_i, \tag{59}$$

m_i fiind constante pozitive ce reprezintă valori limite admisibile pentru perturbațiile variabilelor de comandă.

Din expresiile (39) care dau comenzile optime, se vede că acestea sînt funcții mărginite de timp. (60)

Soluția generală pentru sistemul (58) se scrie

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{4} R_{ij}(t) y_i(0) + \sum_{j=1}^{4} \int_0^t K_{ij}(t, \tau)\delta\psi_j(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{61}$$

unde R_{ij}, K_{ij} au semnificațiile specificate anterior.

Presupunem perturbațiile inițiale nule $y_j(0) = 0$ $(j = 1, \ldots, 4)$ așa încît putem scrie

$$|y(t)| \leqslant \sum_{j=1}^{4} m_j \int_0^t |K_{ij}(t, \tau)|\mathrm{d}\tau. \tag{62}$$

Inegalitatea (62) va fi întărită dacă limita superioară a integralei (62) ia valoarea infinită

$$|y_i(t)| \leqslant \sum_{j=1}^{4} m_j \int_0^{\infty} |K_{ij}(t, \tau)|\mathrm{d}\tau. \tag{63}$$

Fie sistemul

$$\dot{y}_i - \sum_{j=1}^{4} a_{ij} y_j = m_i. \tag{64}$$

Soluția acestui sistem la condiții inițiale nule se poate scrie

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{4} m_j \int_0^t K_{ij}(t, \tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{65}$$

ceea ce implică

$$y_i(\infty) = \sum_{j=1}^{4} m_j \int_0^{\infty} K_{ij}(t, \tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{66}$$

Coordonatele stării stabile sînt soluţiile sistemului algebric

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij} y_j(\infty) = -m_i, \qquad i = 1, \ldots, 4), \tag{67}$$

de unde

$$y_j(\infty) = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta}. \tag{67'}$$

Am notat cu Δ determinantul matricei $||ya_{ij}||$, iar cu Δ_{ij} complementii algebrici ai elementelor a_{ij} ai determinantului Δ.

Comparînd expresiile (66) şi (67') se găseşte

$$\int_0^\infty K_{ij}(t, \tau)\, \mathrm{d}\tau = -\frac{\Delta_{ij}}{\Delta}. \tag{68}$$

Rezultă

$$\int_0^\infty |K_{ij}(t, \tau)|\, \mathrm{d}\tau \geqslant \left| \int_0^\infty K_{ij}(t, \tau) \mathrm{d}\tau \right| = \left| \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} \right|, \tag{69}$$

soluţii care exprimă domeniul stărilor stabile pentru sistemul perturbat (58).

CONCLUZII

Din clasa curbelor care definesc traiectoria unui vehicul spaţial privind transferul dintr-un punct dat în punctele de libraţie echidistante s-au determinat extremalele ce realizează minimumul consumului de combustibil. Analizînd expresiile comenzilor care dau acceleraţiile optime ale forţei de propulsie se observă că acestea sînt comenzi admisibile, neprezentînd puncte de discontinuitate. De asemenea, sînt funcţii mărginite, de timp, valorile lor fiind situate într-un domeniu închis, compatibil cu domeniul tracţiunilor mici.

În finalul lucrării se prezintă o metodă de evaluare a domeniului stărilor stabile pentru mişcarea optimală considerată.

Primită la redacţie la 15 aprilie 1979

ANEXĂ

Dezvoltînd calculele în produsele $R_{ks}(t)\, u_i(t)$ $(K, s = 1, \ldots, 4)$ $i = 1, 2$, se obţin pentru $(j = 0,2)$:

$$\frac{1}{2}\left[- C_{1j+2}\, a_1(4\omega^2 - K_2 - a_1) + C_{2j+2}(2\omega K_3)\right] = A^1_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[C_{1j+2}(2\omega K_1)+C_{2j+2}\,a_1(4\omega^2-K_2-a_1^2)\right]=B^1_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[-C_{3j+2}\,b_1(4\omega^2-K_2-b_1^2)+C_{4j+2}(2\omega K_3)\right]=D^1_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[C_{3j+2}(2\omega K_3)+C_{4j+2}\,b_1(4\omega^2-K_2-b_1^2)\right]=E^1_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left\{-C_{1j+2}\,a_1(2\omega K_3)+C_{2j+2}\left[-K_1(a_1^2+K_2)+K_3^2\right]=A^2_{1j+1},\right.$$

$$\frac{1}{2}\left\{C_{1j+2}\left[-K_1(a_1^2+K_2)+K_2^3\right]+C_{2j+2}(2\omega K_3 a_1)\right\}=B^2_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left\{C_{3j+2}(-2\omega b_1)+C_{4j+2}\left[-K_1(b_1^2+K_2)+K_3^2\right]\right\}=D^2_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left\{C_{3j+2}\left[-K_1(b_1^2+K_2)+K_3^2\right]+C_{4j+2}(2\omega K_3 b_1)\right\}=E^2_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[C_{1j+2}(-a_1K_3)+C_{2j+2}(-2\omega K_1)\right]=A^3_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[C_{1j+2}(-2\omega K_1)+C_{2j+2}(-a_1K_3)\right]=B^3_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[C_{3j+2}(-b_1K_3)+C_{4j+2}(-2\omega K_1)\right]=D^3_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[C_{3j+2}(-2\omega K_1)+C_{4j+2}(-b_1K_3)\right]=E^3_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[C_{1j+2}(2\omega K_1a_1)+C_{2j+2}\,(-a_1^2K_3)\right]=A^4_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[C_{1j+2}(-a_1^2K_3)+C_{2j+2}(-b_1^2K_3)\right]=B^4_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[C_{3j+2}(2\omega K_1b_1)+C_{4j+2}(-b_1^2K_3)\right]=D^4_{1j+1},$$

$$\frac{1}{2}\left[C_{3j+2}(-b_1^2K_3)+C_{4j+2}(-2\omega K_1b_1)\right]=E_{1j+1}^4,$$

unde A_{1j+1}^k, B_{1j+1}^k, D_{1j+1}^k, E_{1j+1}^k sînt termenii de sub integrală ai expresiilor 50 pentru x_k $(k=1,\ldots,4)$.
Ţinînd seama de notaţiile

$$C_{11}^1=\sum_{j=1}^{4}C_{1j}\,x_j^0;\quad C_{12}^1=\sum_{j=1}^{4}C_{2j}\,x_j^0,\quad C_{13}^1=\sum_{j=1}^{4}C_{3j}\,x_j^0;\quad C_{14}^1=\sum_{j=1}^{4}C_{4j}\,x_j^0,$$

se obţine

$$C_{11}^1[-a_1(4\omega^2-K_2-a_1^2)]+C_{12}^1(2\omega K_3)=H_1^1,$$

$$C_{11}^1(2\omega K_3)+C_{12}^1[a_1(4\omega^2-K_2-a_1^2)]=H_2^1,$$

$$C_{13}^1[-b_1(4\omega^2-K_2-b_1^2)]+C_{14}^1(2\omega K_3)=H_3^1,$$

$$C_{13}^1(2\omega K_3)+C_{14}^1[b_1(4\omega^2-K_2-b_1^2)]=H_4^1,$$

$$C_{11}^1(-2\omega a_1K_3)+C_{12}^1[-K_1(a_1^2+K_2)+K_3^2]=H_1^2,$$

$$C_{11}^1[-K_1(a_1^2+K_2)+K_3^2]+C_{12}^1(2\omega K_3a_1)=H_2^2,$$

$$C_{13}^1(-2\omega b_1)+C_{14}^1[-K_1(b_1^2+K_2)+K_3^2]=H_3^2,$$

$$C_{13}^1[-K_1(b_1^2+K_2)+K_3^2]+C_{14}^1(2\omega K_3b_1)=H_4^2,$$

$$C_{11}^1(-a_1K_3)+C_{12}^1(-2\omega K_1)=H_1^3,$$

$$C_{11}^1(-2\omega K_1)+C_{12}^1(-a_1K_3)=H_2^3,$$

$$C_{13}^1(-b_1K_3)+C_{14}^1(-2\omega K_1)=H_3^3,$$

$$C_{13}^1(-2\omega K_1)+C_{14}^1(-b_1K_3)=H_4^3,$$

$$C_{11}^1(2\omega K_1a_1)+C_{12}^1(-a_1^2K_3)=H_1^4,$$

$$C_{11}^1(-a_1^2K_3)+C_{12}^1(-2\omega a_1K_1)=H_2^4,$$

$$C_{13}^1(2\omega K_1b_1)+C_{12}^1(-2\omega a_1K_1)=H_3^4,$$

$$C_{13}^1(-b^2K_3)+C_{14}^1(-2\omega K_1b_1)\,H_4^4,$$

$$\frac{a_1^2+K_2}{2a_1}B_{11}^i+\frac{a_1(a_1^2+K_2)}{a_1^2-b_1^2}E_{11}^i-A_{13}^i\omega-B_{13}^i\frac{K_3}{2a_1}+$$

$$+\frac{2\omega a_1b_1}{a_1^2-b_1^2}D_{13}^i-\frac{K_3a_1}{a_1^2-b_1^2}E_{13}^i=A_1^i,$$

$$\frac{a_1^2+K_2}{2a_1}A_{11}^i-\frac{b_1}{a_1^2-b_1^2}D_{11}^i+\frac{K_3}{2a_1}A_{13}^1+\omega B_{13}^i-$$

$$-\frac{K_3b_1}{a_1^2-b_1^2}D_{13}^i+\frac{2\omega a_1^2}{a_1^2-b_1^2}E_{13}^i=A_2^i,$$

$$-\frac{a_1(b_1^2+K_2)}{b_1^2-a_1^2}B_{11}^i+\frac{2\omega a_1b_1}{b_1^2-a_1^2}A_{13}^i+\frac{K_2a_1}{b_1^2-a_1^2}B_{13}^i=A_3^i,$$

$$\frac{b_1(b_1^2+K_2)}{b_1^2-a_1^2}A_{11}^i-\frac{b_1K_3}{b_1^2-a_1^2}A_{13}^i+\frac{2a_1}{b_1^2-a_1^2}B_{13}^i=A_4^i,$$

$$\frac{b_1(a_1^2+K_2)}{a_1^2-b_1^2}D_{11}^i+\frac{b_1K_3}{a_1^2-b_1^2}D_{13}^i+\frac{2\omega a_1}{a_1^2-b_1^2}E_{13}^i=B_1^i,$$

$$-\frac{a_1^2+K_2}{a_1^2-b_1^2}E_{11}^i-\frac{2\omega a_1b_1}{a_1^2-b_1^2}D_{13}^i+\frac{2\omega a_1b_1}{a_1^2-b_1^2}E_{13}^i=B_2^i,$$

$$-\frac{a_1(b_1^2+K_2)}{b_1^2-a_1^2}A_{11}^i-\frac{a_1K_2}{b_1^2-a_1^2}A_{13}^i+\frac{2\omega b_1^2}{b_1^2-a_1^2}B_{13}^i=B_3^i,$$

$$-\frac{b_1(b_1^2+K_2)}{b_1^2-a_1^2}B_{11}^i+\frac{2\omega a_1b_1}{b_1^2-a_1^2}A_{13}^i+\frac{K_3b_1}{b_1^2-a_1^2}B_{13}^i=B_4^i,$$

$$-\frac{b_1(a_1^2+K_2)}{a_1^2-b_1^2}E_{11}^i-\frac{2a_1}{a_1^2-b_1^2}D_{13}^i+\frac{K_3b_1}{a_1^2-b_1^2}E_{13}^i=D_1^i,$$

$$\frac{a_1(a_1^2+K_2)}{a_1^2-b_1^2}D_{11}^i+\frac{K_3a_1}{a_1^2-b_1^2}D_{13}^i-\frac{2\omega a_1b_1}{a_1^2-b_1^2}E_{13}^i=D_2^i,$$

$$\frac{b_1(b_1^2+K_2)}{b_1^2-a_1^2}B_{11}^i+\frac{b_1^2+K_2}{2b_1}E_{11}^i-\frac{2\omega b_1^2}{b_1^2-a_1^2}B_{13}^i-\omega D_{13}^i-\frac{K_2}{2b_1}E_{13}^i=D_3^i,$$

$$-\frac{a_1(b_1^2+K_2)}{b_1^2-a_1^2}A_{11}^i+\frac{b_1^2+K_2}{2b_1}D_{11}^i+\frac{a_1K_3}{b_1^2-a_1^2}A_{13}^i+$$

$$+\frac{2\omega b_1^2}{b_1^2-a_1^2}B_{13}^i-\frac{K_3}{2b_1}D_{13}^i+\omega E_{13}^i=D_4^i,$$

$$-\frac{b_1}{a_1^2-b_1^2}D_{11}^i-\frac{K_3b_1}{a_1^2-b_1^2}D_{13}^i-\frac{2\omega a_1}{a_1^2-b_1^2}E_{13}^i=E_1^i,$$

$$\frac{a_1^2+K_2}{a_1^2-b_1^2}E_{11}^i+\frac{2\omega a_1b_1}{a_1^2-b_1^2}D_{13}^i+\frac{K_3}{a_1^2-b_1^2}E_{13}^i=E_2^i,$$

$$\frac{a_1(b_1^2+K_2)}{b_2^2-a_1^2}A_{11}^i+\frac{K_2a_1}{b_1^2-a_1^2}A_{13}^i-\frac{2\omega b_1^2}{b_1^2-a_1^2}B_{13}^i=E_3^i,$$

$$-\frac{b_1(b_1^2+K_2)}{b_1^2-a_1^2}B_{11}^i-\frac{2\omega a_1b_1}{b_1^2-a_1^2}A_{13}^i-\frac{K_3b_1}{b_1^2-a_1^2}B_{13}^i=E_4^i,$$

$$-\frac{a_1^2+K_3}{2}A_{11}^i-\frac{K_3}{2}A_{13}^i-\omega a_1B_{13}^i=K_1^i,$$

$$\frac{a_1^2+K_2}{2}B_{11}^i+\omega a_1A_{13}^i+\frac{K_3}{2}B_{13}^i=K_2^i,$$

$$-\frac{b_1^2+K_2}{2}D_{11}^i+\frac{K_2}{2}D_{13}^i+\omega b_1E_{13}^i=K_3^i,$$

$$\frac{b_1^2+K_2}{2}E_{11}^i+\omega b_1D_{13}^i+\frac{K_3}{2}E_{13}^i=K_4^i,$$

$$\frac{a_1^2+K_2}{2}B_{11}^i+A_{13}^i\omega a_1-\frac{K_3}{2a_1}B_{13}^i=L_1^i,$$

$$-\frac{a_1^2+K_2}{2}A_{11}^i-\frac{K_3}{2}A_{13}^i+\omega a_1B_{13}^i=L_2^i,$$

$$\frac{b_1^2+K_2}{2}E_{11}^i+\omega b_1D_{13}^i-\frac{K_2}{2}E_{13}^i=L_3^i,$$

$$-\frac{b_1^2+K_2}{2}D_{11}^i+\frac{K_3}{2}D_{13}^i+\omega b_1E_{13}^i=L_4^i,$$

cu notaţiile făcute rezultă

$$H_1^i\sin a_1t+H_2^i\cos a_1t+H_3^i\sin b_1t+H_4^i\cos b_1t=F_0^i(t),$$

$$A_j^i \sin a_1 t + B_j^i \cos a_1 t + D_j^i \sin b_1 t +$$

$$+ E_j^i \cos b_1 t + t(K_j^i \sin b_1 t + L_j^i \cos b_1 t) = F_j^i(t), \quad i, j = 1, \ldots, 4.$$

BIBLIOGRAFIE

1. M. Popescu, *Studiul manevrelor optime ale vehiculelor spațiale în apropierea punctelor de librație din sistemul Pământ-Lună*. St. cerc. mec. apl. *5* (1979).
2. M. Popescu, *Asupra unor clase de probleme izoperimetrice privind evoluția vehiculelor spațiale echipate cu instalație de propulsie*. St. cerc. mat. *5* (1979).
3. L. D'Amorio, *Minimum impulse three-body trajectories*, AIAA Journal, *4* (1974).
4. R. Farquhar, L. Richardson, *Mission design for a halo orbiter of the Earth*, AIAA Paper *18 — 20* (1976).
5. A. Kononenko, *Libration points approach*, The XVIII-th International Astronautical Congress September 1967.
6. T. Edelbaum, *Libration point rendezvous*, Rept. 70—12 1970, Analytical Mechanics Associates Cambridge Mass.
7. L. Dragoș *Principiile mecanicii analitice*, Edit. Tehnică, București, 1972.
8. Al. Marinescu, *Low-trust maneuvers near the liberation points*, Journal of Guidance and Control

ASUPRA TRANSFORMĂRILOR LORENTZ

de DOINA BUICULESCU-MASSIER

Universitatea București

Se dă o nouă demonstrație a liniarității și formei generale a transformărilor Lorentz, pe baza invarianței formei ecuațiilor de mișcare în spațiul 4-dimensional. Se obține și legea de variație a masei punctului material cu viteza. Se obțin, din transformările Lorentz, cîteva proprietăți, unele postulîndu-se de obicei pentru deducerea transformării Lorentz particulare. Se stabilește și legătura între viteza originii unui referențial inerțial în raport cu alt referențial inerțial și transformarea Lorentz corespunzătoare.

Fie S un reper inerțial 4-dimensional $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = \alpha t$, (x, y, z — coordonatele spațiale, t — timpul, α — un parametru avînd dimensiunile unei viteze). Notații similare se introduc pentru reperul inerțial S'.

Pentru deducerea transformării Lorentz care realizează corespondența între două repere inerțiale 4-dimensionale, se admit de obicei următoarele ipoteze:

i) liniaritatea transformărilor (considerată necesară pentru a păstra mișcările rectilinii și uniforme);

ii) constanța vitezei de propagare c a luminii în vid;

iii) izotropia spațiului.

Coeficienții transformării se deduc din condiția de invarianță a ecuației de propagare a luminii sau a metricii lui Minkovski, în cazul particular cînd reperul S' se mișcă în lungul primei axe a reperului S (din considerații de izotropie axele y și z ale reperului S coincid cu cele ale reperului S'), presupunîndu-se că viteza (în sens obișnuit) a reperului S față de reperul S' este egală și opusă vitezei reperului S' față de S. Deși este cunoscută forma generală a transformărilor Lorentz [2], caracterul grupal al transformărilor este demonstrat tot în acest caz particular.

Din demonstrația care va fi prezentată va rezulta atît liniaritatea, cît și forma generală a transformărilor Lorentz. După demonstrarea cîtorva proprtietăți fără a face apel la experiențe idealizate, se va stabili legătura dintre 3-viteza originii reperului S' față de reperul S și transformarea Lorentz corespunzătoare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 1, 1980, P. 49–57

1. INVARIANTA ECUAȚIEI DE MIȘCARE ÎN SPAȚIUL 4-DIMENSIONAL

În mecanica newtoniană, transformările Galilei, care permit să se recunoască sistemele inerțiale, se obțin din condiția ca ele să invarieze legea lui Newton

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_\beta}{\mathrm{d}t_2} = F_\beta \qquad (\beta = 1, 2, 3). \tag{1}$$

Din această condiție se obține atît liniaritatea transformărilor Galilei, cît și forma lor cea mai generală.

O demonstrație analogă se poate da pentru obținerea transformărilor Lorentz generalizate, presupunînd că se cere invarierea unei legi de forma (1) în spațiul 4-dimensional

$$m_0\frac{\mathrm{d}^2x_j}{\mathrm{d}\tau^2} = \mathcal{F}_j \qquad (j = 1, 2, 3, 4), \tag{2}$$

m_0 fiind o mărime fizică ce caracterizează evenimentul mecanic, $\mathcal{F}_j$ componentele unei „forțe" 4-dimensionale, τ un parametru absolut (nu depinde de sistemul de referință, similar timpului din mecanica newtoniană).

Fie sistemele de referință S și S', S' în mișcare față de S, și $\mathbf{X}'$, $\mathbf{X}$ 4-vectorii de poziție ai evenimentului mecanic în raport cu referențialul S', respectiv S, iar $\mathbf{X}_0$,4-vectorul de poziție al originii referențialului S' față de S. Atunci

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_{0'} + \mathbf{X}'.$$

Prin derivare în raport cu τ se obține

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{X}_{0'}}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\delta\mathbf{X}'}{\delta\tau} + \boldsymbol{\Omega}\,\Lambda\,\mathbf{X}',$$

unde prin $\frac{\delta}{\delta\tau}$ se înțelege derivarea în S', iar matricea antisimetrică $\boldsymbol{\Omega}$ are componentele

$$\omega_{jk} = -\mathbf{I}'_j\frac{\mathrm{d}\mathbf{I}'_k}{\mathrm{d}\tau},$$

$\mathbf{I}'_j$ fiind versorii axelor de coordonate ale sistemului S'. Derivînd încă odată în raport cu τ, rezultă

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{X}}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{X}_{0'}}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}}{\mathrm{d}\tau}\Lambda\mathbf{X}' + \boldsymbol{\Omega}\Lambda(\boldsymbol{\Omega}\Lambda\mathbf{X}') + 2\boldsymbol{\Omega}\Lambda\frac{\delta\mathbf{X}'}{\delta\tau} + \frac{\delta^2\mathbf{X}'}{\delta\tau^2}.$$

Pentru invarianța ecuațiilor (2) este necesar și suficient ca

$$\Omega = 0$$

și

$$\frac{d^2 X_{0'}}{d\tau^2} = 0,$$

adică direcțiile axelor sistemului S' în raport cu sistemul S nu se schimbă, iar originea sistemului S' are o mișcare (definită de τ) rectilinie și uniformă în S. Deci

$$\mathbf{X} = \Lambda \mathbf{X}' + \mathbf{V}^\circ \tau + \mathbf{X}^\circ, \tag{3}$$

unde Λ este o matrice ce definește o rotație în spațiul 4-dimensional. Întrucît în urma unei astfel de transformări, distanța dintre evenimente se păstrează, Λ este o matrice ortocronă

$$\Lambda^T \Lambda = \Lambda \Lambda^T = \mathbf{I}. \tag{4}$$

Se iau în considerare numai matricele pentru care

$$\det \Lambda = +1, \qquad \lambda_{44} > 0 \tag{5}$$

(păstrarea sistemelor directe și a ordinei evenimentelor). Matricele Λ) cu proprietatea (5) formează grup, subgrup propriu al grupului matricelor ortocrone [2].

2. LEGEA DE VARIAȚIE A MASEI CU VITEZA

Ecuațiile (2) se pot scrie sub forma (analogă teoremei impulsului din mecanica newtoniană)

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 \Gamma v_\beta) = \mathcal{F}_\beta \qquad (\beta = 1, 2, 3),$$

$$\frac{d}{d\tau}(m_0 \Gamma \alpha) = \mathcal{F}_4$$

sau, pentru primele trei ecuații (2),

$$\frac{d}{dt}(m_0 \Gamma v_\beta) = \frac{\mathcal{F}_\beta}{\Gamma} \qquad (\beta = 1, 2, 3 \tag{2''})$$

unde

$$\Gamma = \frac{dt}{d\tau}, \tag{6}$$

iar v_β sînt componentele vitezei 3-dimensionale a punctului material

$$v_\beta = \frac{dx_\beta}{dt} \qquad (\beta = 1, 2, 3).$$

Rezultă din (2'') că masa punctului material este proporţională cu $m_0\Gamma$, iar $\frac{\mathcal{F}_\beta}{\Gamma}$ sînt propoţionale cu componentele forţei 3-dimensionale.

În cazul mişcării inerţiale

$$\mathcal{F}_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, 2, 3)$$

va rezulta

$$v_\beta \Gamma = C_\beta = \text{const.} \qquad (\beta = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Presupunînd că Γ este funcţie numai de viteză, deci numai de mărimea vitezei v,

$$\Gamma = \Gamma(v^2),$$

din (7) se obţine

$$v^2 = \text{const.}$$

şi totodată

$$\Gamma = \text{const.}$$

Din ultima ecuaţie (2')

$$\mathcal{F}_4 = 0,$$

deci în cazul mişcării inerţiale

$$\Gamma^2 = \frac{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + \alpha^2}{v^2 + \alpha^2}.$$

În cazul general, înmulţind ecuaţiile (2) respectiv cu $\frac{dx_j}{d\tau}$ şi sumînd, rezultă

$$m_0\Gamma \frac{dv^2}{dt}\left[\frac{1}{2}\Gamma^2 + \frac{1}{2}(v^2 + \alpha^2)\frac{d\Gamma^2}{dv^2}\right] = \Gamma\left[\sum_{\beta=1}^{3} \mathcal{F}_\beta v_\beta + \alpha\mathcal{F}_4\right], \tag{8}$$

paranteza dreaptă din primul membru fiind un invariant

$$\Gamma^2 + (v^2 + \alpha^2)\frac{d\Gamma^2}{dv^2} = 2A(v^2),$$

expresia funcţiei A aceeaşi pentru oriee eveniment mecanic. Deci

$$\Gamma^2 = \frac{A_1(v^2)}{v^2 + \alpha^2},$$

A_1 fiind o primitivă a lui A. Comparînd cu expresia lui Γ din cazul mișcării inerțiale, rezultă

$$\Gamma = \frac{C_0}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\alpha^2}}}, \tag{10}$$

unde C_0 este o constantă, aceeași pentru orice eveniment mecanic, depinzînd numai de alegerea parametrului τ.

Consecințe imediate ale relației (10) sînt :

a) ortgonalitatea 4-vitezei și 4-accelerației ($A = 0$)

$$\left(\frac{d^2X}{d\tau^2}\right)^T \left(\frac{dX}{d\tau}\right) = 0 ;$$

b) mărimea 4-vitezei aceeași pentru orice eveniment

$$\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^T \left(\frac{dX}{d\tau}\right) = (v^2 + \alpha^2)\ \Gamma^2 = C_0^2\alpha^2 ;$$

c) relația între componentele 4-forței

$$\mathcal{F}_4 = -\frac{\sum_{\beta=1}^{3} \mathcal{F}_\beta v_\beta}{\alpha}.$$

Pentru cel mai frecvent model al teoriei relativității restrînse, se alege

$$\alpha = i\,c, \tag{11}$$

c fiind viteza de propagare a luminii în vid, τ se ia timpul propriu, $C_0 = 1$, adică

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{12}$$

Pentru alegerea (11), se obține cunoscuta lege de variație a masei cu viteza

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{13}$$

Observație. Calculul conduce și la posibilitatea modelului de univers antieinsteinean, similar cu cel apărut tot prin calcul în mecanica invariantivă.

3. CÎTEVA PROPRIETĂȚI DEDUSE DIN TRANSFORMĂRILE LORENTZ

Legea de schimbare a componentelor unui vector, decurgînd din transformarea Lorentz (3), va fi

$$u_j = \sum_{k=1}^{4} \lambda_{jk}\, u'_k, \qquad (j = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{14}$$

u_j fiind componentele 4-vectorului în sistemul S, iar u'_k în sistemul S'; prin λ_{jk} s-au notat termenii matricei $\mathbf{\Lambda}$. Proprietatea (4) se scrie explicit sub forma

$$\sum_{j=1}^{4} \lambda_{jk}\, \lambda_{jl} = \sum_{j=1}^{4} \lambda_{kj}\, \lambda_{lj} = \delta_{kl} \qquad (k,\ l = 1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{15}$$

Din (14) rezultă legea de schimbare a componentelor vitezei 3-dimensionale $\left(v_\beta = \dfrac{\mathrm{d}x_\beta}{\mathrm{d}t},\ v'_\beta = \dfrac{\mathrm{d}x'_\beta}{\mathrm{d}t'}\right)$

$$v_\beta = \alpha\, \frac{\sum_{\gamma=1}^{3} \lambda_{\beta\gamma}\, v'_\beta + \alpha\lambda_{\beta 4}}{\sum_{\gamma=1}^{3} \lambda_{4\gamma}\, v'_\gamma + \alpha\lambda_{44}}; \qquad v'_\beta = \alpha\, \frac{\sum_{\gamma=1}^{3} \lambda_{\gamma\beta}\, v_\gamma + \alpha\lambda_{4\beta}}{\sum_{\gamma=1}^{3} \lambda_{\gamma 4}\, v_\gamma + \alpha\lambda_{44}} \qquad (\beta = 1, 2, 3). \tag{16}$$

În particular, viteza originii O a sistemului S în raport cu sistemul S' are componentele

$$v'_{O\beta} = \alpha\, \frac{\lambda_{4\beta}}{\lambda_{44}} \qquad (\beta = 1,\ 2,\ 3) \tag{17}$$

și mărimea

$$\mathrm{v}'^2_O = -\,\alpha^2\left(1 - \frac{1}{\lambda_{44}^2}\right).$$

Analog, pentru viteza originii O' a sistemului S' în raport cu sistemul S

$$v'_{o\beta} = \alpha\, \frac{\lambda_{\beta 4}}{\lambda_{44}} (\beta = 1, 2, 3), \tag{17'}$$

$$\mathrm{v}_{o'}{}^2 = -\,\alpha^2\left(1 - \frac{1}{\lambda_{44}^2}\right).$$

Rezultă că viteza originii O în raport cu S' este egală în mărime cu viteza originii O' în raport cu S

$$\mathrm{v}'^2_O = \mathrm{v}_{o'}{}^2 = v^2 \tag{18}$$

şi

$$\lambda_{44}^2 = \frac{1}{1 + \frac{v^2}{\alpha^2}} \cdot$$

Fie două evenimente care au loc în S în acelaşi punct, adică

$$\delta x_\beta = 0 \qquad (\beta = 1, 2, 3).$$

În S', ele vor fi caracterizate prin

$$\delta x'_\beta = \lambda_{4\beta}\, \delta x_4 \qquad (\beta = 1, 2, 3),$$
$$\delta x'_4 = \lambda_{44} \delta x_4.$$

Pentru a păstra ordinea în timp a evenimentelor, se impune pentru λ_{44} determinarea

$$\lambda_{44} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\alpha^2}}} \tag{19}$$

şi deci

$$\delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\alpha^2}}}\, \delta t, \tag{20}$$

relaţie care exprimă „dilatarea timpului".

Din relaţiile (16) rezultă acum pentru $\alpha = ic$

$$\lambda_{\beta\gamma} \in R, \qquad \lambda_{\beta 4},\ \lambda_{\beta 4} \in iR \quad (\beta, \gamma = 1, 2, 3). \tag{21}$$

Fie un vector 3-dimensional din S, de lungime l, paralel cu viteza lui O' faţă de S

$$u_\beta = \frac{l}{v} v_{O'\beta} \qquad (\beta = 1, 2, 3),\ u_4 = 0. \tag{22}$$

În S' îi va corespunde 3-vectorul

$$u'_\gamma = \frac{l}{v} \sum_{\beta=1}^{3} \lambda_{\beta\gamma}\, v_{O'\beta} \qquad (\gamma = 1, 2, 3).$$

Ţinînd seama de (17) şi că $\vec{v}'_{O'} = \mathbf{0}$,

$$u'_\gamma = -\lambda_{44} \frac{l}{v} v'_{O\gamma} \qquad (\gamma = 1, 2, 3). \tag{23}$$

Deci unui 3-vector paralel cu $\mathbf{v}_0$, în S îi va corespunde un vector paralel și de sens contrar cu $\mathbf{v}'_0$, avînd lungimea

$$l' = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\alpha^2}}} l \tag{24}$$

relația care exprimă „contracția lungimilor".

Fie un 3-vector în S, ortogonal pe $\mathbf{v}'_0$,

$$\sum_{\beta=1}^{3} v_{0'\beta}\ u_\beta = 0, \quad u_4 = 0. \tag{25}$$

În S' îi va corespunde 3-vectorul

$$u'_\gamma = \sum_{\beta=1}^{3} \lambda_{\beta\gamma}\ u_\beta \qquad (\gamma = 1,\ 2,\ 3).$$

Ținînd seama de (61) și că $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, rezultă

$$\sum_{\beta=1}^{3} v'_{0\beta}\ u'_\beta = -\ \lambda_{44} \sum_{\beta=1}^{3} v_{0'\beta}\ u_\beta = 0, \tag{26}$$

$$\sum_{\beta=1}^{3} u'_\beta\ u'_\beta = \sum_{\beta,\gamma=1}^{3} (\delta_{\beta\gamma} - \lambda_{\beta 4}\ \lambda_{\gamma 4}) u_\beta\ u_\gamma = \sum_{\beta=1}^{3} u_\beta\ u_\beta . \tag{27}$$

Deci unui 3-vector ortogonal pe $\mathbf{v}_0$, în S, îi corespunde un 3-vector ortogonal pe $\mathbf{v}_0$ în S', avînd aceeași lungime.

4. TRANSFORMAREA LORENTZ ȘI VITEZA RELATIVĂ A REPERELOR

Dacă se cunoaște transformarea Lorentz corespunzătoare sistemelor S și S', atunci viteza lui O' în S este dată de (17'). Dacă viteza lui O' în S este nulă, atunci

$$\lambda_{4\beta} = \lambda_{\beta 4} = 0 \qquad (\beta = 1,\ 2,\ 3,), \qquad \lambda_{44} = 1. \tag{28}$$

Reciproc, dacă relațiile (28) sînt satisfăcute, viteza lui O' în S este nulă și matricea $(\lambda_{\beta\gamma})_{\beta,\gamma=1}^{3}$ va defini o rotație a triedrului, condițiile (15) și $(5)_1$ devenind

$$\sum_{\beta=1}^{3} \lambda_{\gamma\beta}\ \lambda_{\rho\beta} = \sum_{\beta=1}^{3} \lambda_{\beta\gamma}\ \lambda_{\beta\rho} = \delta_{\gamma\rho} \qquad (\gamma,\ \rho) = 1,\ 2,\ 3), \tag{29}$$

$$\det\ (\lambda_{\beta\gamma})_{\beta,\gamma=1}^{3} = \lambda_{44} = +\ 1.$$

Pentru o viteză a lui O' în S, orientată în lungul primei axe $\vec{v}_0$, $(v, 0, 0)$, din legea de schimbare a componentelor vitezei (16) se obține

$$\lambda_{44} = \Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\alpha^2}}}; \quad \lambda_{4\beta} = -\frac{v}{\alpha}\lambda_{1\beta} \qquad (\beta = 1, 2, 3).$$

Ținînd seama de proprietățile matricei Λ, ceilalți termeni ai matricei Λ vor fi

$$\lambda_{14} = \frac{v}{\alpha}\Gamma, \qquad \lambda_{24} = \lambda_{34} = 0,$$

$$\lambda_{11} = \Gamma, \quad \lambda_{22} = \lambda_{33} = 1,$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{13} = \lambda_{31} = \lambda_{23} = \lambda_{32} = 0.$$

Deci matricea transformării particulelor astfel determinată este

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Gamma & 0 & 0 & -\frac{v}{\alpha}\Gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{v}{\alpha}\Gamma & 0 & 0 & \Gamma \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Pentru cazul unei viteze de mărime v, de direcție oarecare, transformarea se descompune în produs

$$\Lambda = \mathbf{R}_1 \Lambda_0 \mathbf{R}_2, \tag{31}$$

Λ_0 fiind matricea corespunzătoare unei transformări Lorentz particulare cu viteză de mărime v, în lungul primei axe, iar $\mathbf{R}_1$ și $\mathbf{R}_2$ rotații ale triedrului spațial (se păstrează coordonata a 4-a).

Primită la redacție la 20 iulie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. G. C. Hegerfeldt, *The Lorentz Transformations. Derivation of Linearity and Scale Factor*, Il nuovo Cimento, **A10**, 2 (1972).
2. М. А. Наймарк, *Линейные представления группы Лоренца*, Москва, 1958

Pentru o viteză a lui O' în S, orientată în lungul primei axe $\bar{v}_x$, $(v, 0, 0)$, din legea de schimbare a componentelor vitezei (18) se obține

$$\lambda_{1s} = 1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{\alpha^2}}} \; ; \quad \lambda_{1s} = -\frac{v}{\alpha}\lambda_{1s} \quad (s = 1, 2, 3).$$

Ținînd seama de proprietățile matricei A, ceilalți termeni ai matricei A vor fi

$$\lambda_{11} = \frac{v}{\alpha} P_{1s} \quad \lambda_{21} = \lambda_{3s} = 0,$$

$$\lambda_{11} = 1, \quad \lambda_{22} = \lambda_{33} = 1,$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = \lambda_{13} = \lambda_{31} = \lambda_{23} = \lambda_{32} = 0.$$

Deci matricea transformării particulelor astfel determinată este

$$A = \begin{pmatrix} P & 0 & 0 & -\frac{v}{\alpha}P \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{v}{\alpha}P & 0 & 0 & P \end{pmatrix} \tag{30}$$

Pentru cazul unei viteze de mărime v, de direcție oarecare, transformarea se descompune în produs

$$A = R_1 A_0 R_2, \tag{31}$$

A_0 fiind matricea corespunzătoare unei transformări Lorentz particulare cu viteză de mărime v, în lungul primei axe, iar R_1 și R_2 rotații ale triedrului spațial (se păstrează coordonata a 4-a).

Primită la redacție la 20 iulie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. G. C. Hegerfeldt, *The Lorentz Transformations. Derivation of Linearity and Scale Factor*, Il nuovo Cimento, 410, 2 (1972).
2. M. A. HARRAPE, *Линейные преобразования группы Лоренца*, Москва, 1958.

STABILITATEA DINAMICĂ SPAȚIALĂ A CADRELOR DIN BARE CU PEREȚI SUBȚIRI DE SECȚIUNI DESCHISE EXCITATE EXTERIOR DE FORȚE PERIODICE URMĂRITOARE

de GH. MIHĂIȚĂ
Universitatea din Craiova

În partea întîia a lucrării se stabilesc ecuațiile diferențiale ale vibrațiilor parametrice spațiale ale cadrelor din bare cu pereți subțiri de secțiuni deschise excitate prin forțe periodice urmăritoare, aplicînd metoda ecuațiilor deplasărilor din statica construcțiilor. Ecuațiile obținute formează un sistem cu o triplă infinitate de ecuații diferențiale de ordinul al doilea liniare, omogene și cu coeficienți periodici, elementele matricelor ce intră în scrierea sistemului căpătînd interpretarea simplă de coeficienți de influență sau reacțiuni unitare în sensul staticii construcțiilor și putînd fi calculate cu destulă ușurință pe această bază.
În partea a doua a lucrării, studiindu-se problema delimitării domeniilor de instabilitate dinamică, se determină în hiperspațiul parametrilor cadrului elastic și excitației o infinitate triplă de domenii de instabilitate dinamică, care se dezvoltă în jurul frecvențelor de excitare egale cu submultiplii întregi ai dublului frecvențelor vibrațiilor libere.
Pulsația critică la limitele domeniilor de instabilitate dinamică se obține din ecuații algebrice de grad superior rezultînd prin anularea determinantului unei matrice pătrate ale cărei elemente sînt reacțiuni unitare sau coeficienți de influență în sensul staticii construcțiilor.

1. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE VIBRAȚIILOR PARAMETRICE ALE CADRELOR DIN BARE CU PEREȚI SUBȚIRI DE SECȚIUNI DESCHISE, EXCITATE EXTERIOR DE FORȚE PERIODICE URMĂRITOARE

Se consideră pentru generalitate un cadru oarecare din bare drepte cu pereți subțiri de secțiuni deschise oarecare cu caracteristici geometrice și elastice cunoscute. Cadrul este acționat de forțe periodice, concentrate și distribuite, de aceiași frecvență, aplicate excentric pe bare în direcția axială.

Se presupune totodată că forțele externe excitatoare au o componentă statică de direcție fixă (direcția axei barei) și o componentă variabilă periodic în timp avînd direcția rotitoare odată cu fibra barei pe care se aplică (fig. 1).

Corespunzător cu aceasta, forța axială în bară va avea o componentă statică, de direcție fixă, și una variabilă periodic în timp și de direcție variabilă de forma

$$N(z,t)] = \alpha N_0(z) + \beta N_t(z)\,\Phi(t), \tag{1}$$

α și β fiind doi parametri, iar $N_0(z)$ și $N_t(z)$ funcții ce caracterizează distribuția în lungul barelor a componentei statice a forței axiale și respectiv, a celei dinamice, iar $\Phi(t)$ o funcție periodică de timp de perioadă τ.

Presupunînd cadrul ca avînd, în metoda deplasărilor λ necunoscute, se pleacă de la ecuațiile de condiție ale metodei deplasărilor scrise sub forma,

$$\sum_{n=1}^{\lambda} R_{mn} + R_{mp} = 0, \qquad m = 1, 2, \ldots, \lambda, \tag{2}$$

în care

R_{mn} este reacțiunea din legătura suplimentară m cînd sistemul de bază este încărcat cu o deplasare unitară pe direcția legăturii n,

R_{mp} — reacțiunea pe direcția legăturii suplimentare m cînd sistemul de bază este acționat de forțele exterioare excitatoare.

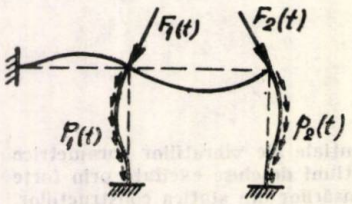


Fig. 1

Se demonstrează că forțele, momentele și bimomentele exterioare distribuite care încarcă barele cadrului sînt [8]:

$$q_x = -m\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + y_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left\{N(z,t)\left[\frac{\partial u}{\partial z} + (y_0 - e_y)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\right\} + \\ + \beta \frac{dN_t(z)}{dz}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + (y_0 - e_y)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\Phi(t), \tag{3}$$

$$q_y = -m\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - x_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left\{N(z,t)\left[\frac{\partial v}{\partial z} - (x_0 - e_x)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\right\} + \\ + \beta \frac{dN_t(z)}{dz}\left[\frac{\partial v}{\partial z} - (x_0 - e_x)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]\Phi(t), \tag{4}$$

$$p_z = -m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2} v - \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2} u - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial t^2}\omega\right), \tag{5}$$

$$m_x = -mr_x^2 \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2}, \tag{6}$$

$$m_y = -mr_y^2 \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2}, \tag{7}$$

$$m_z = m\left(x_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - y_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - r_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left\{N(z,t)\left[(x_0 - e_x)\frac{\partial v}{\partial z} -\right.\right.$$

$$- (y_0 - e_y)\frac{\partial u}{\partial z} - (e_y\beta_1 + e_x\beta_2 + r_0^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z}\Bigg]\Bigg\} - \beta\frac{\mathrm{d}N_t(z)}{\mathrm{d}z}\left\{(x_0 - e_x)\frac{\partial v}{\partial z} - \right.$$

$$\left. - (y_0 - e_y)\frac{\partial u}{\partial z} - \left[(y_0 - e_y)^2 + (x_0 - e_x)^2\right]\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right\}\Phi(t), \tag{8}$$

$$b_\omega = - mr_\omega^4\frac{\partial^3 \varphi}{\partial z \partial t^2}, \tag{9}$$

u, v, w și φ fiind cele trei deplasări ale secțiunii transversale a unei bare și respectiv rotirea acesteia în jurul centrului de răsucire, m masa specifică a barei, x_0 și y_0 coordonatele centrului de încovoiere-răsucire în sistemul de axe central principal, e_x și e_y excentricitatea forțelor externe excitatoare, r_x, r_y, r_0 și r_ω razele de inerție axiale, polară și sectorială, iar β_1 și β_2 mărimi cu dimensiuni de lungime având semnificațiile obișnuite [9] și caracterizând geometric secțiunea barei.

Reacțiunea R_{mn} se poate scrie în funcție de momentele încovoietoare, bimomentele de încovoiere-răsucire și momentele de răsucire, sub forma,

$$R_{mn} = \int\frac{\bar{M}_{y,m}(z)\ M_{y,n}(z,\ t)}{EI_y}\,\mathrm{d}z + \int\frac{\bar{M}_{x,m}(z),\ M_{x,n}(z,\ t)}{EI_x}\,\mathrm{d}z +$$

$$+ \int\frac{\bar{B}_{\omega,m}(z)\ B_{\omega,n}(z,\ t)}{RI_\omega}\,\mathrm{d}z + \int\frac{\bar{M}_{t,m}(z)\ M_{t,n}(z,\ t)}{GI_t}\,\mathrm{d}z \tag{10}$$

în care integrala se extinde asupra tuturor barelor cadrului, iar

$\bar{M}_{y,m}(z)$, $\bar{M}_{x,m}(z)$, $\bar{B}_{\omega,m}(z)$, $\bar{M}_{t,m}(z)$ reprezintă funcțiile momentelor încovoietoare în direcțiile principale y și x ale secțiunii, bimomentului de încovoiere-răsucire și respectiv momentului de răsucire, produse în barele cadrului prin acțiunea deplasării necunoscute unitare $z_m = 1$ pe sistemul de bază;

$M_{y,n}(z,\ t)$, $M_{x,n}(z,\ t)$, $B_{\omega,n}(z,\ t)$, $M_{t,n}(z,\ t)$ — funcțiile momentelor încovoietoare în direcțiile principale y și x ale secțiunii, bimomentului de încovoiere-răsucire și respectiv momentului de răsucire produse în barele cadrului prin acțiunea deplasării z_n pe sistemul de bază.

Pe de altă parte se poate scrie,

$$\bar{M}_{y,m}(z) = - EI_y\frac{\mathrm{d}^2\bar{u}_m(z)}{\mathrm{d}z^2};\quad \bar{M}_{x,m}(z) = - EI_x\frac{\mathrm{d}^2\bar{v}_m(z)}{\mathrm{d}z^2},$$

$$\bar{B}_{\omega,m}(z) = - EI_\omega\frac{\mathrm{d}^2\bar{\varphi}_m(z)}{\mathrm{d}z^2};\quad \bar{M}_{t,m}(z) = GI_t\frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}_m(z)}{\mathrm{d}z},$$

$$M_{y,n}(z,t) = -EI_y \frac{\partial^2 u_n(z,\ t)}{\partial z^2}; \quad M_{x,n}(z,t) = -EI_x \frac{\partial^2 v_n(z,\ t)}{\partial z^2},$$

$$B_{\omega,n}(z,t) = -EI_\omega \frac{\partial^2 \varphi_n(z,\ t)}{\partial z^2}; \quad M_{t,n}(z,\ t) = GI_t \frac{\partial \varphi_n(z,\ t)}{\partial z},$$

unde

$\bar{u}_m(z)$, $\bar{v}_m(z)$, $\bar{\varphi}_n(z)$ reprezintă funcțiile deplasărilor și răsucirilor secțiunilor barelor cînd pe sistemul de bază al cadrului acționează deplasarea necunoscută unitară $z_m = 1$;

$u_n(z,\ t)$, $v_n(z,\ t)$, $\varphi_n(z,\ t)$ — funcțiile deplasărilor și răsucirilor secțiunilor barelor cînd pe sistemul de bază al cadrului acționează deplasarea necunoscută z_n.

Cu acestea reacțiunea R_{mn} se va putea scrie sub forma

$$R_{mn} = \int EI_y \frac{\mathrm{d}^2 \bar{u}_m(z)}{\mathrm{d}z^2} \frac{\partial^2 u_n(z,\ t)}{\partial z^2} \mathrm{d}z + \int EI_x \frac{\mathrm{d}^2 \bar{v}_m(z)}{\mathrm{d}z^2} \frac{\partial^2 v_n(z,\ t)}{\partial z^2} \mathrm{d}z +$$

$$+ \int EI_\omega \frac{\mathrm{d}^2 \bar{\varphi}_m(z)}{\mathrm{d}z^2} \frac{\partial^2 \varphi_n(z,\ t)}{\partial z^2} \mathrm{d}z + \int GI_t \frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}_m(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\partial \varphi_n(z,\ t)}{\partial z} \mathrm{d}z. \qquad (11)$$

Pentru a obține expresia reacțiunii R_{mp} se ține seama că pe baza teoremei reciprocității lucrului mecanic se poate scrie

$$R_n^u(z) = -\bar{u}_n(z); \quad R_n^v(z) = -\bar{v}_n(z), \quad R_n^\varphi(z) = -\bar{\varphi}_n(z)$$

$$R_n^{*u}(z) = -\frac{\mathrm{d}\bar{u}_n(z)}{\mathrm{d}z}; \quad R_n^{*v}(z) = -\frac{\mathrm{d}\bar{v}_n(z)}{\mathrm{d}z}; \quad R_n^{*\varphi}(z) = -\frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}_n(z)}{\mathrm{d}z}, \qquad (12)$$

unde

$R_n^u(z)$, $R_n^v(z)$, $R_n^\varphi(z)$ sînt reacțiuni pe direcția legăturilor suplimentare n datorită încovoierii barelor cadrului în planele principale și respectiv răsucirii lor provocate de o forță unitară aplicată pe axa centrelor de răsucire a unei bare, perpendicular, în punctul de coordonată z, în direcțiile principale x și y și respectiv de un moment de răsucire unitar aplicat în punctul de coordonată z;

$R_n^{*u}(z)$, $R_n^{*v}(z)$, $R_n^{*\varphi}(z)$ — reacțiuni pe direcția legăturilor suplimentare n datorită încovoierii barelor cadrului în planele principale de inerție și respectiv răsucirii lor, provocate de un moment concentrat unitar aplicat în punctul de coordonată z, pe axa centrelor de răsucire a unei bare în plane paralele cu planele principale de inerție și respectiv de un bimoment de încovoiere-răsucire unitar, aplicat în secțiunea de abscisă z.

Cu acestea, reacțiunea R_{mp} se scrie :

$$R_{mp} = \sum_{n=1}^{\lambda} \int m \left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + y_0 \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t^2} \right) \bar{u}_m \mathrm{d}z + \sum_{n=1}^{\lambda} \int m r_y^2 \frac{\partial^3 u_n}{\partial z \partial t^2} \frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z +$$

$$+\sum_{n=1}^{\lambda}\int\frac{\partial}{\partial z}\left\{N(z,\,t)\left[\frac{\partial u_n}{\partial z}+(y_0-e_y)\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}\right]\right\}\bar{u}_m(z)-\beta\sum_{n=1}^{\lambda}\int\frac{\mathrm{d}N_t(z)}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\partial u_n}{\partial z}+\right.$$

$$\left.+(y_0-e_y)\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}\right]\bar{u}_m\,\Phi(t)\,\mathrm{d}z+\sum_{n=1}^{\lambda}\int m\left(\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}-x_0\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial t^2}\right)\bar{v}_n\,\mathrm{d}z+$$

$$+\sum_{n=1}^{\lambda}\int mr_x^2\frac{\partial^3 v_n}{\partial z\partial t^2}\frac{\mathrm{d}\bar{v}_n}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z+\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{\partial}{\partial z}\left\{N(z,\,t)\left(\frac{\partial v_n}{\partial z}-(x_0-e_x)\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}\right]\right\}\bar{v}_m\mathrm{d}z-$$

$$-\beta\sum_{n=1}^{\lambda}\int\frac{\mathrm{d}N_t(z)}{\mathrm{d}z}\left[\frac{\partial v_n}{\partial z}-(x_0-e_x)\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}\right]\bar{v}_m\Phi(t)\,\mathrm{d}z+$$

$$+\sum_{n=1}^{\lambda}\int m\left(y_0\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}-x_0\frac{\partial^2 v_n}{\partial t^2}+r_0^2\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial t^2}\right)\bar{\varphi}_m\,\mathrm{d}z+$$

$$+\sum_{n=1}^{\lambda}\int mr_\omega^4\frac{\partial^3\varphi_n}{\partial z\partial t^2}\frac{\mathrm{d}\bar{\varphi}_m}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z+\sum_{n=1}^{\lambda}\int\frac{\partial}{\partial z}\left\{N(z,\,t)\left[(y_0-e_y)\frac{\partial u_n}{\partial z}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(x_0-e_x)\frac{\partial v_n}{\partial z}+\left(e_y\beta_1+e_x\beta_2+r_0^2\right)\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}\right]\right\}\bar{\varphi}_m\mathrm{d}z-$$

$$-\beta_1\sum_{n=1}^{\lambda}\int\frac{\mathrm{d}N_t(z)}{\mathrm{d}z}\left\{(y_0-e_y)\frac{\partial u_n}{\partial z}-(x_0-e_x)\frac{\partial v_n}{\partial z}+\right.$$

$$\left.+\left[(y_0-e_y)^2+(x_0-e_x)^2\right]\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}\right\}\bar{\varphi}_m\,\Phi(t)\,\mathrm{d}z. \tag{13}$$

Se descompun funcțiile $\bar{u}_n(z)$, $\bar{v}_n(z)$, $\bar{\varphi}_n(z)$, $u_n(z,\,t)$, $v_n(z,\,t)$, $\varphi_n(z,\,t)$ în serii după cîte un sistem fundamental complet de funcții $Z^u_{m\nu}(z)$, $Z^v_{m\nu}(z)$, $Z^\varphi_{m\nu}(z)$ care să satisfacă condițiile la limită :

$$\bar{u}_m(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}C^u_{m\nu}\,Z^u_{m\nu}(z),$$

$$\bar{v}_m(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}C^v_{m\nu}\,Z^v_{m\nu}(z),$$

$$\bar{\varphi}_m(z)=\sum_{\nu=1}^{\infty}C^\varphi_{m\nu}\,Z^\varphi_{m\nu}(z), \tag{14}$$

$$u_n(z,\,t)=\sum_{\nu=1}^{\infty}T^u_{n\nu}(t)\,Z^u_{n\nu}(z),$$

$$v_n(z,\ t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} T^v_{n\nu}(t)\ Z^v_{n\nu}(z),$$

$$\varphi_n(z,\ t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} T^\varphi_{n\nu}(z)\ Z^\varphi_{n\nu}(t),$$

amplitudinile $C^u_{m\nu}$, $C^v_{m\nu}$, $C^\varphi_{m\nu}$ fiind constante, iar $T^u_{n\nu}(t)$, $T^v_{n\nu}(t)$, $T^\varphi_{n\nu}(t)$ variabile în funcție de timp.

Ținînd seama de aceste descompuneri și notînd,

$$d^{uu}_{m\mu n\nu} = \int EI_y \frac{\mathrm{d}^2 Z^u_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z^2}\ \frac{\mathrm{d}^2 Z^u_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z^2}\ \mathrm{d}z,$$

$$d^{vv}_{m\mu n\nu} = \int EI_x \frac{\mathrm{d}^2 Z^v_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z^2}\ \frac{\mathrm{d}^2 Z^v_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z^2}\ \mathrm{d}z,$$

$$d^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu} = \int EI_\omega \frac{\mathrm{d}^2 Z^\varphi_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z^2}\ \frac{\mathrm{d}^2 Z^\varphi_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z^2}\ \mathrm{d}z + \int GI_t \frac{\mathrm{d}Z^\varphi_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z}\ \frac{\mathrm{d}Z^\varphi_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z}\ \mathrm{d}z,$$

$$c^{uu}_{m\mu n\nu} = \int mZ^u_{m\mu}(z)\ Z^u_{n\nu}(z)\ \mathrm{d}z + \int mr^2_y \frac{\mathrm{d}Z^u_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z}\ \frac{\mathrm{d}Z^u_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z}\ \mathrm{d}z,$$

$$c^{vv}_{m\mu n\nu} = \int m Z^v_{n\mu}(z)\ Z^v_{n\nu}(z)\mathrm{d}z + \int mr^2_x \frac{\mathrm{d}Z^v_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z}\ \frac{\mathrm{d}Z^v_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z}$$

$$c^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu} = \int m\gamma^2_0 Z^\varphi_{m\mu}(z)\ Z^\varphi_{n\nu}(z)\,\mathrm{d}z + \int mr^4_\omega \frac{\mathrm{d}Z^\varphi_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z}\ \frac{\mathrm{d}Z^\varphi_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z}\ \mathrm{d}z,$$

$$c^{u\varphi}_{m\mu n\nu} = \int my_0 Z^u_{m\mu}(z)\ Z^\varphi_{n\nu}(z)\ \mathrm{d}z,$$

$$c^{v\varphi}_{m\mu n\nu} = -\int mx_0 Z^v_{m\mu}(z)\ Z^\varphi_{n\nu}(z)\ \mathrm{d}z,$$

$$c^{\varphi u}_{m\mu n\nu} = \int my_0 Z^\varphi_{m\mu}(z)\ Z^u_{n\nu}(z)\ \mathrm{d}z,$$

$$c^{\varphi v}_{m\mu n\nu} = -\int mx_0 Z^\varphi_{m\mu}(z)\ Z^v_{n\nu}(z)\ \mathrm{d}z,$$

$$a^{uu}_{m\mu n\nu} = \int N_0(z) \frac{\mathrm{d}Z^u_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z}\ \frac{\mathrm{d}Z^u_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z}\ \mathrm{d}z,$$

$$a^{vv}_{m\mu n\nu} = \int N_0(z) \frac{\mathrm{d}Z^v_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z^v_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z,$$

$$a^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu} = \int (e_y \beta_1 + e_x \beta_2 + r_0^2) N_0(z) \frac{\mathrm{d}Z^\varphi_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z^\varphi_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z,$$

$$a^{u\varphi}_{m\mu n\nu} = \int (y_0 - e_y) N_0(z) \frac{\mathrm{d}Z^u_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z^\varphi_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z,$$

$$a^{v\varphi}_{m\mu n\nu} = -\int (x_0 - e_x) N_0(z) \frac{\mathrm{d}Z^v_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z^\varphi_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z,$$

$$a^{\varphi u}_{m\mu n\nu} = \int (y_0 - e_y) N_0(z) \frac{\mathrm{d}Z^\varphi_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z^u_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z, \qquad (15)$$

$$a^{\varphi v}_{m\mu n\nu} = -\int (x_0 - e_x) N_0(z) \frac{\mathrm{d}Z^\varphi_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z^v_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z,$$

$$b^{uu}_{m\mu n\nu} = \int N_t(z) Z^u_{m\mu}(z) \frac{\mathrm{d}^2 Z^u_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z^2} \mathrm{d}z,$$

$$b^{vv}_{m\mu n\nu} = \int N_t(z) Z^v_{m\mu}(z) \frac{\mathrm{d}^2 Z^v_{n\nu}}{\mathrm{d}z^2} \mathrm{d}z,$$

$$b^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu} = \int (e_y \beta_1 + e_x \beta_2 + r_0^2) N_t(z) \frac{\mathrm{d}Z^\varphi_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z^\varphi_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z,$$

$$b'^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu} = \int [(x_0 - e_x)^2 + (y_0 - e_y)^2] N_t(z) \frac{\mathrm{d}Z^\varphi_{m\mu}(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z^\varphi_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z,$$

$$b''^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu} = \int [(x_0 - e_x)^2 + (y_0 - e_y)^2] N_t(z) Z^\varphi_{m\mu}(z) \frac{\mathrm{d}^2 Z^\varphi_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z^2} \mathrm{d}z,$$

$$b^{u\varphi}_{m\mu n\nu} = \int (y_0 - e_y) N_t(z) Z^u_{m\mu}(z) \frac{\mathrm{d}^2 Z^\varphi_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z^2} \mathrm{d}z,$$

$$b^{v\varphi}_{m\mu n\nu} = -\int (x_0 - e_x) N_t(z) Z^v_{m\mu}(z) \frac{\mathrm{d}^2 Z^\varphi_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z^2} \mathrm{d}z,$$

$$b^{\varphi u}_{m\mu n\nu} = \int (y_0 - e_y) N_t(z) Z^\varphi_{m\mu}(z) \frac{\mathrm{d}^2 Z^u_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z} \mathrm{d}z,$$

$$b^{\varphi v}_{m\mu n\nu} = -\int (x_0 - e_x) N_t(z) Z^\varphi_{m\mu}(z) \frac{\mathrm{d}^2 Z^v_{n\nu}(z)}{\mathrm{d}z^2} \mathrm{d}z,$$

expresiile (11) (13) ale reacțiunilor R_{mn} și R_{mp} devin :

$$R_{mn} = \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} d^{uu}_{m\mu n\nu}\, T^{u}_{m\mu}\, C^{u}_{n\nu} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} d^{vv}_{m\mu n\nu}\, T^{vv}_{m\mu} C^{v}_{n\nu} +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} d^{u\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^{\varphi}_{m\mu}\, C^{\varphi}_{n\nu}, \tag{16}$$

$$R_{mp} = \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} c^{uu}_{m\mu n\nu} \frac{\mathrm{d}^2 T^{u}_{m\mu}}{\mathrm{d}t^2} C^{u}_{n\nu} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} c^{u\varphi}_{m\mu n\nu} \frac{\mathrm{d}^2 T^{\varphi}_{m\mu}}{\mathrm{d}t^2} C^{u}_{n\nu} -$$

$$- \alpha \left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{uu}_{m\mu n\nu}\, T^{u}_{m\mu}\, C^{u}_{n\nu} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{u\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^{\varphi}_{m\mu}\, C^{u}_{n\nu} \right] +$$

$$+ \beta\Phi(t) \left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b^{uu}_{m\mu n\nu}\, T^{u}_{m\mu}\, C^{u}_{n\nu} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b^{u\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^{\varphi}_{m\mu}\, C^{u}_{n\nu} \right] +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} c^{vv}_{m\mu n\nu} \frac{\mathrm{d}^2 T^{v}_{m\mu}}{\mathrm{d}t^2} C^{v}_{n\nu} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} c^{v\varphi}_{m\mu} \frac{\mathrm{d}^2 T^{\varphi}_{m\mu}}{\mathrm{d}t^2} C^{v}_{n\nu} -$$

$$- \alpha \left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{vv}_{m\mu n\nu}\, T^{v}_{m\mu}\, C^{v}_{n\nu} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{v\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^{\varphi}_{m\mu}\, C^{v}_{n\nu} \right] +$$

$$+ \beta\Phi(t) \left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b^{vv}_{m\mu n\nu}\, T^{v}_{m\mu}\, C^{v}_{n\nu} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b^{v\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^{\varphi}_{m\mu}\, C^{v}_{n\nu} \right] +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} c^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu} \frac{\mathrm{d}^2 T^{\varphi}_{m\mu}}{\mathrm{d}t^2} C^{\varphi}_{n\nu} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} c^{\varphi u}_{m\mu n\nu} \frac{\mathrm{d}^2 T^{u}_{m\mu}}{\mathrm{d}t^2} C^{\varphi}_{n\nu} +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} c^{\varphi v}_{m\mu n\nu} \frac{\mathrm{d}^2 T^{v}_{m\mu}}{\mathrm{d}t^2} C^{\varphi}_{n\nu} - \alpha \left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^{\varphi}_{m\mu}\, C^{\varphi}_{n\nu} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{\varphi u}_{m\mu n\nu}\, T^{u}_{m\mu}\, C^{\varphi}_{n\nu} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{\varphi v}_{m\mu n\nu}\, T^{v}_{m\mu}\, C^{\varphi}_{n\nu} \right] +$$

$$+ \beta\Phi(t) \left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b''^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^{\varphi}_{m\mu}\, C^{\varphi}_{n\nu} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b'^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu}\, T_{m\mu}\, C^{?}_{n\nu} - \right.$$

$$- \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^{\varphi}_{m\mu}\, C^{\varphi}_{n\nu} + \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b^{\varphi u}_{m\mu n\nu}\, T^{u}_{m\mu}\, C^{\varphi}_{n\nu} +$$

$$\left. + \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b^{\varphi v}_{m\mu n\nu}\, T^{v}_{m\mu}\, C^{\varphi}_{n\nu} \right]. \tag{17}$$

Sistemul de ecuații (2) devine acum :

$$\sum_{n=1}^{\lambda}\left\{\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} c^{uu}_{m\mu n\nu}\frac{\mathrm{d}^2 T^u_{m\mu}}{\mathrm{d}t^2} C^u_{n\nu}+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} c^{u\varphi}_{m\mu n\nu}\frac{\mathrm{d}^2 T^\varphi_{m\mu}}{\mathrm{d}t^2} C^u_{n\nu}+\right.$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} d^{uu}_{m\mu n\nu}\, T^u_{m\mu}\, C^u_{n\nu}-\alpha\left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{uu}_{m\mu n\nu}\, T^u_{m\mu}\, C^u_{n\nu}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{u\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^\varphi_{m\mu}\, C^u_{n\nu}\right]+\beta\Phi(t)\left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b^{uu}_{m\mu n\nu}\, T^u_{m\mu}\, C^u_{n\nu}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b^{u\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^\varphi_{m\mu}\, C^u_{n\nu}\right]+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} c^{vv}_{m\mu n\nu}\frac{\mathrm{d}^2 T^v_{m\mu}}{\mathrm{d}t^2} C^v_{n\nu}+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} c^{v\varphi}_{m\mu n\nu}\frac{\mathrm{d}^2 T^\varphi_{m\mu}}{\mathrm{d}t^2} C^v_{n\nu}+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} d^{vv}_{m\mu n\nu}\, T^v_{m\mu}\, C^v_{n\nu}-$$

$$-\alpha\left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{vv}_{m\mu n\nu}\, T^v_{m\mu}\, C^v_{n\nu}+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{v\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^\varphi_{m\mu}\, C^v_{n\nu}\right]+$$

$$+\beta\Phi(t)\left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b^{vv}_{m\mu n\nu}\, T^v_{m\mu}\, C^v_{n\nu}+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b^{v\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^\varphi_{m\mu}\, C^v_{n\nu}\right]+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} c^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu}\frac{\mathrm{d}^2 T^\varphi_{m\mu}}{\mathrm{d}t^2} C^\varphi_{n\nu}+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} c^{\varphi u}_{m\mu n\nu}\frac{\mathrm{d}^2 T^u_{m\mu}}{\mathrm{d}t^2} C^\varphi_{n\nu}+$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} c^{\varphi v}_{m\mu n\nu}\frac{\mathrm{d}^2 T^v_{m\mu}}{\mathrm{d}t^2} C^\varphi_{n\nu}+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} d^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^\varphi_{r\mu}\, C^\varphi_{n\nu}-$$

$$-\alpha\left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^\varphi_{m\mu}\, C^\varphi_{n\nu}+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{\varphi u}_{m\mu n\nu}\, T^u_{m\mu}\, C^\varphi_{n\nu}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a^{\varphi v}_{m\mu n\nu}\, T^v_{m\mu}\, C^\varphi_{n\nu}\right]+\beta\Phi(t)\left[\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b''^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^\varphi_{m\mu}\, C^\varphi_{n\nu}+\right.$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b'^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^\varphi_{m\mu}\, C^\varphi_{n\nu}-\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu}\, T^\varphi_{m\mu}\, C^\varphi_{n\nu}+$$

$$\left.\left.+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b^{\varphi u}_{m\mu n\nu}\, T^u_{m\mu}\, C^\varphi_{n\nu}+\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} b^{\varphi v}_{m\mu n\nu}\, T^v_{m\mu}\, C^\varphi_{n\nu}\right]\right\}=0. \qquad (18)$$

Sistemul de ecuații (18) este satisfăcut numai prin anularea coeficienților tuturor factorilor constanți C_n^u, C_n^v, C_n^φ; va rezulta prin aceasta,

$$\sum_{n=1}^{\lambda}\left\{\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{m\mu n\nu}^{uu}\frac{\mathrm{d}^2 T_{m\mu}^{u}}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{m\mu n\nu}^{u\varphi}\frac{\mathrm{d}^2 T_{m\mu}^{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{\mu=1}^{\infty} d_{m\mu n\nu}^{uu}\,T_{m\mu}^{u}-\right.$$

$$-\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{m\mu n\nu}^{uu}\,T_{m\mu}^{u}+\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{m\mu n\nu}^{u\varphi}\,T_{m\mu}^{\varphi}\right]+$$

$$\left.+\beta\Phi(t)\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} b_{m\mu n\nu}^{uu}\,T_{m\mu}^{u}+\sum_{\mu=1}^{\infty} b_{m\mu n\nu}^{u\varphi}\,T_{m\mu}^{\varphi}\right]\right\}=0,$$

$$m=1,\,2,\,3,\,\ldots\,\lambda,$$

$$\nu=1,\,2,\,3,\,\ldots,$$

$$\sum_{n=1}^{\lambda}\left\{\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{m\mu n\nu}^{vv}\frac{\mathrm{d}^2 T_{m\mu}^{v}}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{m\mu n\nu}^{v\varphi}\frac{\mathrm{d}^2 T_{m\mu}^{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{\mu=1}^{\infty} d_{m\mu n\nu}^{vv}\,T_{m\mu}^{v}-\right.$$

$$-\alpha\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{m\mu n\nu}^{vv}\,T_{m\mu}^{v}+\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{m\mu n\nu}^{v\varphi}\,T_{m\mu}^{\varphi}\right]+$$

$$\left.+\beta\Phi(t)\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} b_{m\mu n\nu}^{vv}\,T_{m\mu}^{v}+\sum_{\mu=1}^{\infty} b_{m\mu n\nu}^{v\varphi}\,T_{m\mu}^{\varphi}\right]\right\}=0 \qquad (19)$$

$$m=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,\lambda$$

$$\nu=1,\,2,\,3,\,\ldots,$$

$$\sum_{n=1}^{\lambda}\left\{\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{m\mu n\nu}^{\varphi\varphi}\frac{\mathrm{d}^2 T_{m\mu}^{\varphi}}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{m\mu n\nu}^{\varphi u}\frac{\mathrm{d}^2 T_{m\mu}^{u}}{\mathrm{d}t^2}+\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{m\mu n\nu}^{\varphi v}\frac{\mathrm{d}^2 T_{m\mu}^{v}}{\mathrm{d}t^2}+\right.$$

$$+\sum_{\mu=1}^{\infty} d_{m\mu n\nu}^{\varphi\varphi}\,T_{m\mu}^{\varphi}-\alpha\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{m\mu n\nu}^{\varphi\varphi}\,T_{m\mu}^{\varphi}+\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{m\mu n\nu}^{\varphi\nu}\,T_{m\mu}^{u}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{m\mu n\nu}^{\varphi v}\,T_{m\mu}^{v}\right]+\beta\Phi(t)\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} b'''^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu}\,T_{m\mu}^{\varphi}+\sum_{\mu=1}^{\infty} b'^{\varphi\varphi}_{m\mu n\nu}\,T_{m\mu}^{\varphi}-\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{\mu=1}^{\infty} b_{m\mu n\nu}^{\varphi\varphi}\,T_{m\mu}^{\varphi}+\sum_{\mu=1}^{\infty} b_{m\mu n\nu}^{\varphi u}\,T_{m\mu}^{u}+\sum_{\mu=1}^{\infty} b_{m\mu}^{\varphi\nu}\,T_{m\mu}^{v}\right]\right\}=0,$$

$$m=1,\,2,\,3,\,\ldots,\,\lambda$$

$$\nu=1,\,2,\,3,\,\ldots\,.$$

Schimbînd notația indicelui, sistemul de ecuații diferențiale (19) devine :

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}^{uu} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^u}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}^{u\varphi} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_{ik}^{uu} T_k^u - \alpha \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{uu} T_k^u + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{u\varphi} T_k^\varphi \right] + \beta\Phi(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{uu} T_k^u + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{u\varphi} T_k^\varphi \right] = 0,$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}^{vv} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^v}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}^{v\varphi} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_{ik}^{vv} T_k^v - \alpha \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{vv} T_k^v + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{v\varphi} T_k^\varphi \right] + \beta\Phi(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{vv} T_k^v + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{v\varphi} T_k^\varphi \right] = 0, \tag{20}$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}^{\varphi\varphi} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^\varphi}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}^{\varphi u} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^u}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}^{\varphi v} \frac{\mathrm{d}^2 T_k^v}{\mathrm{d}t^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{d}_{ik}^{\varphi\varphi} T_k^\varphi -$$

$$- \alpha \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{\varphi\varphi} T_k^\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{\varphi u} T_k^u + \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}^{\varphi v} T_k^v \right] + \beta\Phi(t) \left[\sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}''^{\varphi\varphi} T_k^\varphi + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}'^{\varphi\varphi} T_k^\varphi - \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{\varphi\varphi} T_k^\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{\varphi u} T_k^u + \sum_{k=1}^{\infty} b_{ik}^{\varphi v} T_k^v \right] = 0,$$

$$i = 1, 2, 3, \ldots,$$

adică un sistem cu o triplă infinitate de ecuații diferențiale de ordinul doi, liniare, omogene și parametrice, care se poate scrie restrîns sub forma

$$C \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} + [D - \alpha A - \beta\Phi(t) B] T = 0, \tag{21}$$

T fiind un hipervector cu o infinitate de componente,

$$T = \left\| \begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \end{matrix} \right\|, \tag{22}$$

fiecare componentă fiind la rîndul său un vector cu trei componente,

$$T_k = \left\| \begin{matrix} T_k^u(t) \\ T_k^v(t) \\ T_k^\varphi(t) \end{matrix} \right\|, \tag{23}$$

iar A, B, C, D hipermatrice pătrate infinite,

$$A = \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \vdots \\ A_{21} & A_{22} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\|; \qquad B = \left\| \begin{matrix} B_{11} & B_{12} & \vdots \\ B_{21} & B_{22} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\},$$

$$C = \left\| \begin{matrix} C_{11} & C_{12} & \vdots \\ C_{21} & C_{22} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\}; \qquad D = \left\| \begin{matrix} D_{11} & D_{12} & \vdots \\ D_{21} & D_{22} & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\}, \tag{24}$$

ale căror elemente sînt matrice pătrate de ordinul trei și, respectiv, matrice diagonale de ordinul trei,

$$A_{ik} = \left\| \begin{matrix} a_{ik}^{uu} & 0 & a_{ik}^{u\varphi} \\ 0 & a_{ik}^{vv} & a_{ik}^{v\varphi} \\ a_{ik}^{\varphi u} & a_{ik}^{\varphi v} & a_{ik}^{\varphi\varphi} \end{matrix} \right\}; \qquad B_{ik} = \left\| \begin{matrix} -b_{ik}^{uu} & 0 & -b_{ik}^{u\varphi} \\ 0 & -b_{ik}^{vv} & -b_{ik}^{v\varphi} \\ -b_{ik}^{\varphi u} & -b_{ik}^{\varphi v} & b_{ik}^{\varphi\varphi} - b_{ik}'^{\varphi\varphi} - b_{ik}''^{\varphi\varphi} \end{matrix} \right\},$$

$$C_{ik} = \left\| \begin{matrix} c_{ik}^{uu} & 0 & c_{ik}^{u\varphi} \\ 0 & c_{ik}^{vv} & c_{ik}^{v\varphi} \\ c_{ik}^{\varphi u} & c_{ik}^{\varphi v} & c_{ik}^{\varphi\varphi} \end{matrix} \right\}; \qquad D_{ik} = \left\| \begin{matrix} d_{ik}^{uu} & 0 & 0 \\ 0 & d_{ik}^{vv} & 0 \\ 0 & 0 & d_{ik}^{\varphi\varphi} \end{matrix} \right\}, \tag{25}$$

avînd drept elemente,

$$a_{ik}^{uu} = \int N_0(z) \frac{\mathrm{d}Z_i^u(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^u(z)}{\mathrm{d}z} \,\mathrm{d}z; \qquad a_{ik}^{vv} = \int N_0(z) \frac{\mathrm{d}Z_i^v(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^v(z)}{\mathrm{d}z} \,\mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{\varphi\varphi} = \int (e_y\beta_1 + e_x\beta_2 + r_0^2) N_0(z) \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(z)}{\mathrm{d}z} \,\mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{u\varphi} = \int (y_0 - e_y) N_0(z) \frac{\mathrm{d}Z_i^u(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(z)}{\mathrm{d}z} \,\mathrm{d}z; \qquad a_{ik}^{v\varphi} = -\int (x_0 - e_x) N_0(z) \frac{\mathrm{d}Z_i^v(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(z)}{\mathrm{d}z} \,\mathrm{d}z,$$

$$a_{ik}^{\varphi u} = \int (y_0 - e_y) N_0(z) \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^u(z)}{\mathrm{d}z} \,\mathrm{d}z; \qquad a_{ik}^{\varphi v} = -\int (x_0 - e_x) N_0(z) \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^v(z)}{\mathrm{d}z} \,\mathrm{d}z,$$

$$b_{ik}^{uu} = \int N_t(z) Z_i^u(z) \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^u(z)}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}z\,; \quad b_{ik}^{vv} = \int N_t(z) Z_i^v(z) \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^v(z)}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}z,$$

$$b_{ik}^{\varphi\varphi} = \int (e_y\beta_1 + e_x\beta_2 + r_0^2) N_t(z) \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(z)}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z,$$

$$b_{ik}'^{\varphi\varphi} = \int [(x_0 - e_x)^2 + (y_0 - e_y)^2] N_t(z) \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(z)}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z,$$

$$b_{ik}''^{\varphi\varphi} = \int [(x_0 - e_x)^2 + (y_0 - e_y)^2] N_t(z) Z_i^\varphi(z) \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^\varphi(z)}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}z,$$

$$b_{ik}^{u\varphi} = \int (y_0 - e_y) N_t(z) Z_i^u(z) \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^\varphi(z)}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}z\,; \quad b_{ik}^{v\varphi} = -\int (x_0 - e_x) N_t(z) Z_i^u(z) \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^\varphi(z)}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}z,$$

$$b_{ik}^{\varphi u} = \int (y_0 - e_y) N_t(z) Z_i^\varphi(z) \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^u(z)}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}z\,; \quad b_{ik}^{\varphi v} = -\int (x_0 - e_x) N_t(z) Z_i^\varphi(z) \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^v(z)}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}z,$$

$$c_{ik}^{uu} = \int m Z_i^u(z) Z_k^u(z)\mathrm{d}z + \int m r_y^2 \frac{\mathrm{d}Z_i^u(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^u(z)}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z, \tag{26}$$

$$c_{ik}^{vv} = \int m Z_i^v(z) Z_k^v(z)\mathrm{d}z + \int m r_x^2 \frac{\mathrm{d}Z_i^v(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^v(z)}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z,$$

$$c_{ik}^{\varphi\varphi} = \int m r_0^2 Z_i^\varphi(z) Z_k^\varphi(z)\,\mathrm{d}z + \int m r_\omega^4 \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(z)}{\mathrm{d}z},$$

$$c_{ik}^{u\varphi} = \int m y_0 Z_i^u(z) Z_k^\varphi(z)\,\mathrm{d}z\,; \quad c_{ik}^{v\varphi} = -\int m x_0 Z_i^v(z) Z_k^\varphi(z)\,\mathrm{d}z,$$

$$c_{ik}^{\varphi u} = \int m y_0 Z_i^\varphi(z) Z_k^u(z)\,\mathrm{d}z\,; \quad c_{ik}^{\varphi v} = -\int m x_0 Z_i^\varphi(z) Z_k^v(z)\,\mathrm{d}z,$$

$$d_{ik}^{uu} = \int E I_y \frac{\mathrm{d}^2 Z_i^u(z)}{\mathrm{d}z^2} \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^u(z)}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}z\,; \quad d_{ik}^{vv} = \int E I_x \frac{\mathrm{d}^2 Z_i^v(z)}{\mathrm{d}z^2} \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^v(z)}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}z,$$

$$d_{ik}^{\varphi\varphi} = \int E I_\omega \frac{\mathrm{d}^2 Z_i^\varphi(z)}{\mathrm{d}z^2} \frac{\mathrm{d}^2 Z_k^\varphi(z)}{\mathrm{d}z^2}\,\mathrm{d}z + \int G I_t \frac{\mathrm{d}Z_i^\varphi(z)}{\mathrm{d}z} \frac{\mathrm{d}Z_k^\varphi(z)}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z.$$

2. DELIMITAREA DOMENIILOR DE INSTABILITATE DINAMICĂ

După cum este cunoscut [1], la limitele domeniilor de instabilitate dinamică, sistemul de ecuații diferențiale (21) admite soluții periodice de perioadă egală cu perioada excitației $\Phi(t)$ și cu dublul acestei perioade, două soluții de aceeași perioadă delimitînd un domeniu de instabilitate dinamică, iar două soluții de perioadă diferită un domeniu de instabilitate dinamică. În conformitate cu aceasta, considerînd cazul fundamental cînd excitația este armonică, $\Phi(t) = \cos\theta t$, se caută pentru sistemul (21) soluțiile periodice de perioadă $2\tau = 4\pi/\theta$ (θ fiind pulsația excitației),

$$T = \sum_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right) \tag{27}$$

și se determină ecuațiile pulsației critice θ la limitele domeniilor de instabilitate 1, 3, 5,...

$$\begin{vmatrix} D - \alpha A \pm \frac{1}{2}\beta B - \frac{1}{4}\theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta B & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{2}\beta B & D - \alpha A - \frac{9}{4}\theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta B & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta B & D - \alpha A - \frac{25}{4}\theta^2 C & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \tag{28}$$

și soluțiile periodice de perioadă $\tau = 2\pi/\theta$,

$$T = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{k=2,4,6}^{\infty} \left(a_k \sin \frac{k\theta t}{2} + b_k \cos \frac{k\theta t}{2} \right), \tag{29}$$

cu ajutorul cărora se determină ecuațiile pulsațiilor critice la limitele domeniilor de instabilitate 2, 4, 6 ...

$$\begin{vmatrix} D - \alpha A - \theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta B & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{2}\beta B & D - \alpha A - 4\theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta B & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta B & D - \alpha A - 16\,\theta^2 C & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0, \tag{30}$$

$$\begin{vmatrix} D-\alpha A & -\frac{1}{2}\beta B & 0 & 0 & \cdots \\ -\frac{1}{2}\beta B & D-\alpha A-\theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta B & 0 & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{2}\beta B & D-\alpha A-4\theta^2 C & -\frac{1}{2}\beta B & \cdots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\beta B & D-\alpha A-16\theta^2 C & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0. \tag{31}$$

În cazul în care amplitudinea componentei variabile a sarcinii este foarte mică ($\beta \to 0$) ecuațiile pulsațiilor critice la limitele domeniilor de instabilitate dinamică devin,

$$\left| D-\alpha A-\frac{1}{4}k^2\theta^2 C \right| = 0,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots . \tag{32}$$

Comparînd cu ecuația pulsațiilor vibrațiilor libere ale cadrului încărcat static cu forțele de parametru α

$$|E-\alpha A-\omega^2 C| = 0, \tag{33}$$

se deduce

$$\theta = \frac{2\omega}{k},\ k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{34}$$

adică pulsația critică a sarcinii este în acest caz un submultiplu întreg al dublului pulsației vibrațiilor libere ale cadrului acționat de componenta statică a sarcinei.

Granițele primului domeniu de instabilitate dinamică, cel mai larg și cel mai important din punct de vedere practic, se obțin cu suficientă precizie considerînd numai primul element al determinantului din ecuațiile (28),

$$\left| E-\alpha A \pm \frac{1}{2}\beta B-\frac{1}{4}\theta^2 C \right| = 0. \tag{35}$$

Comparînd cu ecuația pulsațiilor vibrațiilor proprii ale cadrului acționat static de sarcina avînd prametri $\alpha,\ \pm\beta/2$

$$\left| E-\alpha A+\frac{1}{2}\beta B-\omega^2_{\alpha,\pm\beta/2} C \right| = 0, \tag{36}$$

se obține

$$\theta = 2\omega_{\alpha,\pm\beta/2}\,, \tag{37}$$

adică pulsația critică a sarcinii la granițele domeniului principal de instabilitate dinamică este egală cu dublul pulsației vibrațiilor libere ale sarcinei avînd parametri $\alpha \pm \beta/2$.

Ținînd seama de structura matricelor B_{ik} în cazul excitării prin forțe periodice de direcție fixă [8], este ușor de constatat următoarele relații de legătură între pulsația ω' corespunzătoare sarcinei de direcție fixă și pulsația ω determinată cu ecuațiile (33) :

$$\begin{aligned} \omega'_{\alpha,+\beta/2} &< \omega_{\alpha,+\beta/2}\,, \\ \omega'_{\alpha,-\beta/2} &> \omega_{\alpha,-\beta/2}\,. \end{aligned} \tag{38}$$

Se deduce pe baza relațiilor (38) că efectul urmăritor al sarcinei se traduce în îngustarea domeniilor de instabilitate dinamică.

3. CONCLUZII

a) Stabilitatea dinamică a cadrelor din bare cu pereți subțiri de secțiuni deschise, excitate prin sarcini externe periodice urmăritoare, este descrisă de un sistem cu o triplă infinitate de ecuații diferențiale de ordinul doi, liniare, omogene, cu coeficienți periodici.

b) Ca și în cazul excitării prin forțe periodice de direcție fixă, sistemului respectiv de ecuații diferențiale, descriind vibrațiile forțate parametrice ale cadrului, îi corespund, în hiperspațiul parametrilor sistemului elastic și excitației, o triplă infinitate de domenii de instabilitate.

c) Domeniile de instabilitate dinamică corespunzătoare excitării prin forțe periodice urmăritoare se suprapun peste domeniile corespunzătoare excitării prin forțe de direcție fixă și sînt mai înguste decît acestea.

Primită la redacție la 5 iunie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. V. V. Bolotin, *Dinamicescaia ustoicivosti uprughih sistem*, Moskva, Gostehizdat, 1956.
2. V. V. Bolotin, *O colebania i ustoicivosti sterjnei nahodiascihsea pod deistviem neconservativnih sil*, Izd-vo Acad. Nauk. SSSR, 1959.
3. V. V. Bolotin, *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Pergamon Pres, Oxford—London—New-York — Paris, 1963.
4. Z. Dzigadco, L. Solarz, *On nonautonoms vibrations of a self — excited system — with tangential force*, Proceedings of Vibration Problems, vol. 11, nr. 2, 1970.
5. B. H. Gorbunov, A. I. Strelibitkaia, *Teoria rasciota ram iz toncostenth sterjnei*, GTTI, 1948, Moskva.
6. V. A. Iacubovici, V. M. Strajinskii, *Lineinie diferențialinlie uravnenia s periodiceskimi coefițientami i ih prilojenia*, Izd-vo Nauka, Moskva, 1972.
7. M. D. Mohamed, *Pastroenie oblastei neustoicivosti toncostenth sterjnei, zagrujenth prodolnimi periodiceskimi silami*, Vestnic Moskovskovo Universiteta Matematica-Mehanica, 5 (1970).
8. Gh. Mihăită, *Contribuții la stabilitatea dinamică a barelor și sistemelor de bare cu pereți subțiri*, Teza de doctorat, Universtitatea Brașov, 1975.
9. A. Petre, M. Atanasiu, *Bare cu pereți subțiri*, Ed. tehnică, București 1960.
10. A. Petre, *Teoria aeroelasticității. Statica*, Edit. Academiei, Buc., 1966.

TEORIA GENERALĂ A SISTEMELOR DE BARE CONCURENTE, STATIC NEDETERMINATE

de GEORGE PETRESCU
Universitatea din Craiova

În diverse aplicații se întîlnesc sisteme static nedeterminate formate din bare articulate cu un capăt la o bază comună, iar cu celălalt articulat la un punct comun, unde acționează o sarcină unică. Barele respective sînt solicitate numai axial. Pînă în prezent au fost rezolvate doar probleme legate de configurații particulare ale acestor sisteme. În prezenta lucrare se expune metoda generală de calcul pentru eforturile axiale, din care se poate deduce orice caz particular.

1. INTRODUCERE

Sistemele de bare concurente static nedeterminate sînt formate din bare dispuse în spațiu, cu un capăt articulat la baza de fixare, iar cu celălalt capăt articulat în punctul comun de concurență, unde acționează o sarcină unică. În acest fel, toate barele sînt solicitate numai la întindere sau compresiune (fig. 1).

Asemenea sisteme se întîlnesc la suspendarea unor obiecte grele, la poduri, la ancorarea unor construcții înalte etc.

Pînă în prezent, au fost rezolvate doar probleme legate de configurații particulare ale unor asemenea sisteme de bare [1 — 6].

De aceea, lucrarea de față își propune să dea metoda generală pentru calculul eforturilor din barele componente și clarificarea unor aspecte de optimizare.

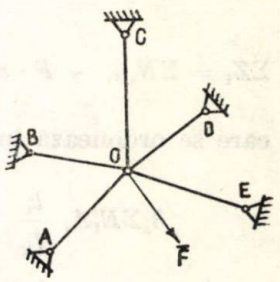


Fig. 1

2. IPOTEZE DE LUCRU

Se consideră un sistem de n bare concurente în originea unui sistem cartezian de axe.

Bara de ordinul i are rigiditatea axială E_iA_i, lungimea L_i și cosinușii directori l_i, m_i, n_i față de axele sistemului ales.

Toate barele se consideră articulate la ambele capete, astfel încît vor fi solicitate numai axial.

În punctul comun de concurență acționează forța unică $\bar{F}$, cu cosinușii directori ai suportului său l, m, n.

Sistemul de bare capătă deformații foarte mici, astfel încît punctul de concurență are o deplasare δ, cu componentele δ_x, δ_y, δ_z.

3. CALCULUL EFORTURILOR DIN BARE

Deformația barei de ordinul i se poate calcula cu expresia :

$$\Delta L_i = \delta_x \cdot l_i + \delta_y \cdot m_i + \delta_z \cdot n_i, \tag{1}$$

respectiv, efortul axial, preluat de aceasta, este :

$$N_i = E_i A_i \varepsilon_i = E_i A_i \frac{\delta_x \cdot l_i + \delta_y \cdot m_i + \delta_z \cdot n_i}{L_i}. \tag{2}$$

Se scriu condițiile de echilibru pentru sistemul forțelor concurente :

$$\Sigma X_i = \Sigma N_i l_i - F \cdot l = \Sigma E_i A_i \frac{\delta_x \cdot l_i + \delta_y \cdot m_i + \delta_z \cdot n_i}{L_i} l_i - F \cdot l = 0,$$

$$\Sigma Y_i = \Sigma N_i m_i - F \cdot m = \Sigma E_i A_i \frac{\delta_x \cdot l_i + \delta_y \cdot m_i + \delta_z \cdot n_i}{L_i} m_i - F \cdot m = 0, \tag{3}$$

$$\Sigma Z_i = \Sigma N_i n_i - F \cdot n = \Sigma E_i A_i \frac{\delta_x \cdot l_i + \delta_y \cdot m_i + \delta_z \cdot n_i}{L_i} n_i - F \cdot n = 0,$$

care se ordonează în modul următor :

$$\begin{aligned}
\delta_x \Sigma E_i A_i \frac{l_i^2}{L_i} + \delta_y \Sigma E_i A_i \frac{l_i m_i}{L_i} + \delta_z \Sigma E_i A_i \frac{l_i n_i}{L_i} &= F \cdot l, \\
\delta_x \Sigma E_i A_i \frac{l_i m_i}{L_i} + \delta_y \Sigma E_i A_i \frac{m_i^2}{L_i} + \delta_z \Sigma E_i A_i \frac{m_i n_i}{L_i} &= F \cdot m, \\
\delta_x \Sigma E_i A_i \frac{l_i n_i}{L_i} + \delta_y \Sigma E_i A_i \frac{m_i n_i}{L_i} + \delta_z \Sigma E_i A_i \frac{n_i^2}{L_i} &= F \cdot n.
\end{aligned} \tag{4}$$

Se notează următoarele expresii, invariante pentru un sistem de bare dat :

$$\begin{aligned}
K_{11} &= \Sigma E_i A_i \frac{l_i^2}{L_i}, \qquad K_{22} = \Sigma E_i A_i \frac{m_i^2}{L_i}, \qquad K_{33} = \Sigma E_i A_i \frac{n_i^2}{L_i}, \\
K_{12} &= K_{21} = \Sigma E_i A_i \frac{l_i m_i}{L_i}, \quad K_{23} = K_{32} = \Sigma E_i A_i \frac{m_i n_i}{L_i}, \quad K_{31} = K_{13} = \Sigma E_i A_i \frac{n_i l_i}{L_i},
\end{aligned} \tag{5}$$

astfel că sistemul de ecuaţii devine :

$$\begin{aligned} \delta_x K_{11} + \delta_y K_{12} + \delta_z K_{13} &= F \cdot l, \\ \delta_x K_{21} + \delta_y K_{22} + \delta_z K_{23} &= F \cdot m, \\ \delta_x K_{31} + \delta_y K_{32} + \delta_z K_{33} &= F \cdot n. \end{aligned} \tag{6}$$

Determinantul sistemului este

$$D = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix}, \tag{7}$$

iar determinanţii caracteristici

$$D_x = \begin{vmatrix} Fl & K_{12} & K_{13} \\ Fm & K_{22} & K_{23} \\ Fn & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix} = F(D_{11}l + D_{12}m + D_{13}n),$$

$$D_y = \begin{vmatrix} K_{11} & Fl & K_{13} \\ K_{21} & Fm & K_{23} \\ K_{31} & Fn & K_{33} \end{vmatrix} = F(D_{21}l + D_{22}m + D_{23}n), \tag{8}$$

$$D_z = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & Fl \\ K_{21} & K_{22} & Fm \\ K_{31} & K_{32} & Fn \end{vmatrix} = F(D_{31}l + D_{32}m + D_{33}n).$$

Au fost făcute următoarele notaţii :

$$D_{11} = \begin{vmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_{22} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{13} \\ K_{31} & K_{33} \end{vmatrix}, \qquad D_{33} = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix}, \tag{9}$$

$$D_{12} = D_{21} = \begin{vmatrix} K_{13} & K_{12} \\ K_{33} & K_{23} \end{vmatrix}, \quad D_{23} = D_{32} = \begin{vmatrix} K_{13} & K_{11} \\ K_{23} & K_{12} \end{vmatrix}, \quad D_{31} = D_{13} = \begin{vmatrix} K_{12} & K_{13} \\ K_{22} & K_{23} \end{vmatrix}.$$

Atunci, componentele deplasării punctului comun de concurență devin :

$$\delta_x = \frac{D_x}{D} = F\frac{D_{11}l + D_{12}m + D_{13}n}{D},$$

$$\delta_y = \frac{D_y}{D} = F\frac{D_{21}l + D_{22}m + D_{23}n}{D}, \tag{10}$$

$$\delta_z = \frac{D_z}{D} = F\frac{D_{31}l + D_{32}m + D_{33}n}{D},$$

și expresia efortului axial dintr-o bară oarecare devine :

$$N_i = F\frac{E_iA_i}{DL_i}(S_1l + S_2m + S_3n), \tag{11}$$

în care s-au introdus notațiile :

$$S_1 = D_{11}l_i + D_{12}m_i + D_{13}n_i,$$

$$S_2 = D_{21}l_i + D_{22}m_i + D_{23}n_i, \tag{12}$$

$$S_3 = D_{31}l_i + D_{32}m_i + D_{33}n_i.$$

Formula (11) permite să se calculeze efortul axial din orice bară, dacă se cunosc elementele geometrice și fizice ale sistemului.

4. VALORILE EXTREME ALE EFORTULUI AXIAL

Se pune problema a se calcula poziția forței $\bar{F}$ pentru care efortul axial dintr-o bară dată capătă valoarea maximă sau minimă și a se găsi expresiile acestor valori.

Pentru aceasta, se ține seama de relația cosinușilor directori ai suportului forței $\bar{F}$:

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \tag{13}$$

de unde :

$$n = \sqrt{1 - l^2 - m^2}. \tag{14}$$

Atunci, expresia efortului axial devine :

$$N_i = F\frac{E_iA_i}{DL_i}(S_1l + S_2m + S_3\sqrt{1 - l^2 - m^2}), \tag{15}$$

și se scriu condițiile de maxim sau minim :

$$\frac{\partial N_i}{\partial l} = F\frac{E_iA_i}{DL_i}\left(S_1 + S_3\frac{-2l}{2\sqrt{1-l^2-m^2}}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial m} = F\frac{E_iA_i}{DL_i}\left(S_2 + S_3\frac{-2m}{2\sqrt{1-l^2-m^2}}\right) = 0. \tag{16}$$

Ținînd seama de faptul că în aceste expresii numai factorii reprezentați de paranteze pot fi nuli și după transformările de rigoare, se obține următorul sistem :

$$(S_1^2 + S_3^2)l^2 + S_1^2m^2 = S_1^2,$$

$$S_2^2l^2 + (S_2^2 + S_3^2)\,m^2 = S_2^2. \tag{17}$$

Prin rezolvarea acestui sistem, ținînd seama de (13), se obțin cosinușii directori ai suportului forței $\bar{F}$, pentru care efortul axial din bara de ordinul i capătă o valoare extremă :

$$l = \pm\frac{S_1}{S}, \qquad m = \pm\frac{S_2}{S}, \qquad n = \pm\frac{S_3}{S}, \tag{18}$$

$$S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}. \tag{19}$$

Atunci, valorile extreme ale efortului axial, dintr-o bară oarecare, vor fi date de expresia :

$$N_{i\,\max,\,\min} = \pm F\frac{E_iA_i}{DL_i}\cdot S. \tag{20}$$

5. CONDIȚIA DE EFORT AXIAL NUL ÎNTR-O BARĂ

Condiția ca efortul din bara de ordinul i să fie nul se scrie în modul următor :

$$N_i = F\frac{E_iA_i}{DL_i}(S_1l + S_2m + S_3n) = 0. \tag{21}$$

Deoarece soluția banală $l = m = n = 0$ este imposibilă, se formează sistemul de ecuații :

$$S_1l + S_2m + S_3n = 0,$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1. \tag{22}$$

Punctul ce marchează vîrful forţei $\bar{F}$ are coordonatele :

$$x = F \cdot l, \qquad y = F \cdot m, \qquad z = F \cdot n, \tag{23}$$

de unde

$$l = \frac{x}{F}, \qquad m = \frac{y}{F}, \qquad n = \frac{z}{F}. \tag{24}$$

Se înlocuiesc aceste valori în sistemul de ecuaţii (22) şi se obţine :

$$S_1 x + S_2 y + S_3 z = 0, \tag{25}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = F^2. \tag{26}$$

Expresia (25) reprezintă un plan care trece prin origine, iar expresia (26) este ecuaţia unei sfere, cu centrul în origine şi de rază egală cu F)

Deci, există o infinitate de poziţii ale forţei $\bar{F}$, cuprinse în acelaşi plan ce trece prin origine (respectiv punctul de aplicaţie al forţei $\bar{F}$), pentru care efortul din bara de ordinul i este nul. În toate aceste poziţii, vîrful forţei $\bar{F}$ se găseşte pe cercul dat de intersecţia planului (25) cu sfera (26).

Dacă se elimină x, y sau z, între cele două ecuaţii, rezultă nişte elipse, care sînt tocmai proiecţiile acestui cerc pe planele formate de axele de coordonate.

Normala la planul (25), dusă prin origine, are ecuaţia :

$$\frac{x}{S_1} = \frac{y}{S_2} = \frac{z}{S_3}, \tag{27}$$

iar cosinuşii săi directori sînt daţi de expresiile :

$$\cos\alpha = l' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \pm \frac{S_1}{S} = l,$$

$$\cos\beta = m' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \pm \frac{S_2}{S} = m, \tag{28}$$

$$\cos\gamma = n' = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \pm \frac{S_3}{S} = n.$$

Se observă că planul poziţiilor forţei $\bar{F}$, pentru care efortul axial din bara de ordinul i este nul, este perpendicular pe direcţia forţei $\bar{F}$ care produce valori extreme ale efortului axial din acea bară.

6. CONCLUZII

În lucrare s-a făcut, pentru prima dată, tratarea completă și cea mai generală a problemelor legate de solicitarea sistemelor static nedeterminate, formate din bare concurente în spațiu și acționate de o sarcină oarecare în punctul de concurență.

Toate cazurile particulare, tratate în literatura de specialitate [1 — 6], se pot obține din relațiile generale stabilite aici.

Formulele deduse își găsesc cîmp de aplicabilitate în calculul riguros al sistemelor de suspendare, fixare și ancorare, care corespund schemei prezentate.

Primită la redacție la 28 ianuarie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Buzdugan, *Rezistența materialelor*, Edit. tehnică, București, 1970, p. 58.
2. E. Cernaianu, G. Petrescu, *Rezistența materialelor*, vol. I, Reprografia Universității din Craiova, 1974, p. 104.
3. I. Deutsch, *Rezistența materialelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1976, p. 75.
4. G. Petrescu, *Calculul sistemelor static nedeterminate formate din bare concurente cu aplicație la organe de mașini agricole*, Mecanizarea și electrificarea agriculturii, *11*, 14 (1966).
5. G. Petrescu, *Calculul eforturilor în sistemele static nedeterminate formate din bare concurente coplanare dispuse radial*, Anale, seria a IV-a, vol. I, Universitatea din Craiova, 1970, p. 303.
6. G. Petrescu, *Metodă grafică pentru calculul eforturilor în sisteme plane simetrice de bare concurente*, Anale, seria a V-a, *2*, Universitatea din Craiova, 1974, p. 325.

INTRODUCERE ÎN ANALIZA DINAMICĂ A STRUCTURILOR CU DALE. I

de RADU NEGRUȚIU

Institutul de construcții București

Lucrarea, împărțită în trei părți, reprezintă o sinteză a procedeelor de calcul static și dinamic al structurilor cu dale, publicate, într-un prim stadiu de elaborare, în articole, comunicări și cărți apărute în perioada 1969–1976 [7] — [17]. Cu completările, precizările și unele noi sistematizări elaborate în ultimul an, această sinteză se constituie ca o metodă unitară de analiză a structurilor alcătuite din bare și plăci, riguroasă în limitele determinate de ipotezele fundamentale ale teoriei plăcilor plane și ale staticii și dinamicii construcțiilor.

Fiind cunoscută lipsa unor lucrări de specialitate, inclusiv străine, privind analiza dinamică a structurilor cu dale, în prima parte a lucrării se prezintă acele elemente specifice de calcul care sînt esențiale în abordarea, prin metoda matricei de flexibilitate, a studiului vibrațiilor libere și al vibrațiilor forțate la această categorie de structuri.

1. DOMENIUL DE CERCETARE

Categoria structurilor cu dale include construcții civile și industriale cu planșee-dală sau cu planșee-ciuperci (fig. 1.1), ca tipuri cu cea mai frecventă utilizare, precum și pasarele și poduri dalate pe stîlpi, rezervoare,

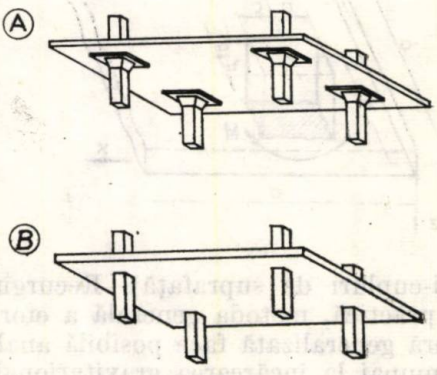


Fig. 1.1. — Tipuri de structuri cu dale. A. Planșee-ciuperci. B. Planșee-dală.

radiere de fundație etc. Prin extindere și în limitele determinate de echivalență lor topologică — geometrică și mecanică — în aceeași categorie pot fi incluse anumite tipuri de structuri cu diafragme solidar legate prin grinzi izolate, chesoane de fundație, chesoane pentru cheiuri, docuri etc.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 1, 1980, P. 83–99.

Caracteristica mecanică esențială, comună tuturor acestor tipuri de structuri spațiale, nereticulare, din beton armat, o constituie *legătura rigidă* care există între plăci (dale, diafragme) și bare (stîlpi, grinzi), legătură care interzice rotirile relative la nivelul nodurilor bară-placă. Urmărind aprofundarea studiului stării de deformație și al stării de eforturi în plăci și în ansamblul structurii, autorul a prezentat într-o serie de lucrări [7] — [17] rezultatele proprii obținute prin modelarea matematică a efectului acestor legături rigide asupra plăcilor plane, cît și aspectele prioritare decurgînd din introducerea în calculul de structură a acestui efect.

Prima concluzie a cercetării documentare întreprinse în ultimii 10 ani (circa 180 de cărți, tratate, monografii, studii, articole și prescripții tehnice consultate) se referă la faptul că — cu foarte rare excepții *) — efectul forțelor de legătură transversale plăcii (reacțiuni-forțe) este singurul efect luat în considerare în lucrările de specialitate avute la dispoziție [17]: structura cu dale este redusă la schema plăcii plane avînd reazeme interioare discrete, punctuale sau nepunctuale, iar sistemul ecuațiilor de continuitate se limitează la *scrierea condiției de deplasare transversală nulă* în axa stîlpilor. Unul din rezultatele importante obținute de autor se referă la *necesitatea și posibilitatea unei analize elastice riguroase*, fără neglijarea în studiul de structură a rigidității relative dintre dală și stîlpi, sistemul de ecuații putînd fi astfel completat prin *scrierea condițiilor de rotire relativă nulă* în nodurile stîlp-dală [14], [16], [17].

Modelarea matematică a efectului, foarte puțin studiat, al unui ruptor, *cuplul de suprafață*, asupra plăcilor plane (fig. 1.2), a permis autorului să introducă în calculul de structură și forțe de legătură-cupluri

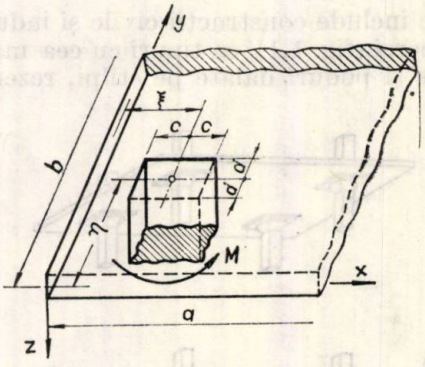


Fig. 1.2. — Cuplul de suprafață. Acțiune asupra plăcii plane sau forță de legătură generalizată

(reacțiuni-cupluri de suprafață). Recurgîndu-se la o metodă de largă utilizare practică, metoda generală a eforturilor, acest nou tip de forță de legătură generalizată face posibilă analiza răspunsului structurilor cu dale nu numai la încărcarea gravitațională ci, în special, la încărcarea orizontală, respectiv sub *acțiunea unui sistem de forțe cuprinse în planul*

* Între aceste excepții trebuie semnalate lucrările lui Pfaffinger [18], [19] pentru cazul încărcărilor gravitaționale, și lucrările lui Stiglat [21], [22], Scholz [20] și Allen-Darvall [2] pentru cazul încărcărilor orizontale.

dalelor. De altfel, analiza elastică a sistemelor structurale alcătuite din bare şi plăci, la acţiunea forţelor orizontale, nici nu ar putea fi abordată fără această modalitate de exprimare matematică a efectului legăturilor rigide de tip bară-placă. Este de subliniat şi faptul că, prin acest mod nou de abordare, nu se obţin efecte globale, pe fîşii de dală, ci o *reprezentare riguroasă a distribuţiei deplasărilor elastice şi a eforturilor secţionale* în orice punct (x, y) din planul dalei cît şi în ansamblul structurii [14], [16], [17].

Raritatea unor preocupări consistente — în literatura de specialitate — privind comportarea structurilor cu dale la acţiunea seismică, a determinat autorul să studieze şi posibilitatea utilizării metodei generale a deplasărilor, în cazul particular al structurilor simetrice multietajate cu planşee-dală sau cu planşee-ciuperci, încărcate cu un sistem de forţe orizontale. Dezvoltînd, în acest scop, procedeul lui Stiglat [21] pentru determinarea lăţimii active de placă, au fost obţinute rezultate noi referitoare la evaluarea rigidităţii dalelor sub acest tip de încărcare [9], [14], [17].

Ca o ultimă concluzie a cercetării documentare efectuate, trebuie menţionată absenţa, pe plan mondial, a oricărei lucrări în care să se analizeze răspunsul structurilor cu dale la încărcări dinamice. Rezultatele la care s-a ajuns prin aplicarea procedeelor elaborate de autor la studiul elastic al structurilor alcătuite din plăci şi bare, sistematizările introduse, sînt de natură să permită trecerea la analiza dinamică a acestei categorii de structuri. Posibilitatea valorificării directe a acestor procedee la studiul vibraţiilor libere şi al vibraţiilor forţate ale structurilor cu dale este demonstrată recurgîndu-se tot la o metodă general cunoscută de către cercetători şi proiectanţi : *metoda matricei de flexibilitate* [17].

În cele ce urmează se face o sinteză a noilor procedee de calcul aplicate în analiza dinamică a structurilor cu dale, însoţită de exemplificări tratate ca studii comparative, destinate să pună în evidenţă avantajele, inclusiv implicaţiile de ordin economic, care rezultă din aplicarea acestor procedee în practica proiectării.

Valoarea parametrilor introduşi în calculele comparative caracterizează, cu prioritate, *structurile cu planşee-dală*. Din punct de vedere topologic, acestea reprezintă o soluţie constructivă modernă, derivînd din *structurile cu planşee-ciuperci*, prin eliminarea vutelor de la capetele superioare ale stîlpilor. Similitudinea lor geometrică şi mecanică a condus la admiterea unor importante analogii în modul de tratare a acestor două tipuri de structuri cu dale, inclusiv în cadrul celor mai cunoscute prescripţii tehnice în vigoare [23] — [27], cît şi în proiectul de normativ românesc [29].

Prin recunoaşterea acestei similitudini, domeniul de aplicabilitate al procedeelor preconizate de autor pentru analiza elastică a structurilor cu planşee-dală se lărgeşte, incluzînd, în anumite condiţii (limitarea dimensiunilor capitelului în raport cu distanţa dintre stîlpi, evaluarea corectă a rigidităţii reale a stîlpilor), şi structurile cu planşee-ciuperci. În plus, valabilitatea rezultatelor obţinute poate fi extinsă, cu considerarea particularităţilor specifice, şi la calculul anumitor tipuri de structuri casetate, cu pereţi din beton armat şi grinzi, respectiv la sisteme structurale alcătuite din plăci verticale şi bare orizontale.

Sistemul oscilant cu n grade de libertate reprezentat printr-o *placă plană* (fig. 2.1) la care, pentru claritate, a fost figurată numai masa m_j, de coordonate (x_m, y_m), avînd, în planul xOy, dimensiunile $(2c_m, 2d_m)$, în urma unui impuls inițial efectuează vibrații libere transversale, în sensul

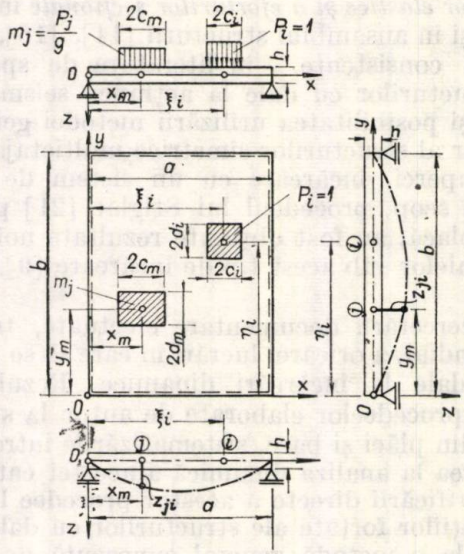


Fig. 2.1. — Placa plană ca element al unui sistem oscilant. Deplasarea unitară transversală z_{ji} pe direcția de oscilație a masei m_j (x_m, y_m), cînd în i se aplică o forță-unitate $P_i = 1$ (ξ_i, η_i).

axei z. Deplasările unghiulare ale masei m_j pot fi considerate neglijabile în cadrul prezentului studiu. La momentul $t = t$ al mișcării, deplasarea masei m_j fiind notată cu

$$z_j = z_j(t) \qquad (j = 1, 2, \ldots n), \tag{2.1}$$

pe direcția fiecăruia din cele n grade de libertate ale sistemului apar forțele de inerție

$$I_j = -\, m_j \ddot{z}_j(t) \quad (j = 1, 2, \ldots n). \tag{2.2}$$

Încărcînd static, conform principiului lui d'Alembert, schema dinamică a sistemului oscilant cu forțele de inerție I_j (2.2), se obțin expresiile diferențiale ale deplasărilor dinamice $z(t)$ ale maselor m_j în mișcare pe direcțiile gradelor de libertate :

$$z_j(t) = -\sum_{i=1}^{n} m_j z_{ji} \ddot{z}_j(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots n\,;\, j = 1, 2, \ldots n), \tag{2.3}$$

unde

$\ddot{z}_j(t)$ — accelerația masei m_j la momentul $t = t$ al mișcării;

z_{ji} — deplasarea unitară, respectiv deplasarea elastică transversală a centrului de greutate (x_m, y_m) al masei m_j, produsă de forța-unitate $P_i = 1$ (sau de cuplul $M_i = 1$) acționînd în punctul i (ξ_i, η_i).

2. ELEMENTE DE CALCUL NECESARE ÎN STUDIUL DINAMIC AL STRUCTURILOR CU DALE

Mărimea maselor în mişcare, inclusiv a maselor neechilibrate, valoarea mare a acceleraţiilor care pot apare în perioada de exploatare a unei largi categorii de structuri, în primul rînd în domeniul construcţiilor industriale, importanţa deschiderilor şi înălţimea clădirilor curent întîlnite astăzi, constituie factorii care au determinat, în ultimii 20 de ani, o amploare fără precedent a cercetărilor avînd ca obiect răspunsul structurilor de rezistenţă la acţiunea dinamică. Ca urmare a studiilor întreprinse în această direcţie, facilitate de formidabilele posibilităţi oferite de calculatoarele electronice, s-a ajuns, pentru anumite categorii de structuri cum ar fi sistemele structurale reticulare, coşurile de fum, fundaţiile de maşini etc., la elaborarea unor procedee de analiză dinamică, ştiinţific fundamentate, care au intrat în practica proiectării [4], [6].

În ce priveşte studiul dinamic al structurilor cu dale, el nu este abordat în nici una din lucrările de specialitate cunoscute. Ţinînd seama de creşterea, pe plan mondial, a frecvenţei şi a domeniului de utilizare a acestei categorii de structuri, apare evidentă necesitatea completării datelor de proiectare obţinute în analiza statică cu elemente de dimensionare rezultînd din analiza dinamică a structurilor alcătuite din bare şi plăci.

Recurgîndu-se la metodologia elaborată pentru analiza elastică a structurilor cu dale sub acţiunea încărcărilor gravitaţionale, studiul vibraţiilor libere şi al vibraţiilor forţate, inclusiv studiul răspunsului acestui sistem structural la încărcarea cu forţe acţionînd în planul dalelor, devine posibil în condiţii de dificultate comparabile cu cele întîlnite la calculul dinamic al structurilor reticulare. Condiţia esenţială constînd, la ambele categorii de structuri, în adoptarea unor *scheme dinamice corecte*, judicios concepute în ce priveşte discretizarea maselor, cît mai apropiată de distribuţia reală a acestora, procedeul propus pentru abordarea analizei dinamice a structurilor cu dale este *riguros* în limitele determinate de ipotezele fundamentale ale teoriei plăcilor plane şi ale statisticii şi dinamicii construcţiilor (par. 2.1. şi 3.1.).

2.1. ELEMENTE DE CALCUL PENTRU STUDIUL VIBRAŢIILOR LIBERE

Oscilaţia liberă reală, în urma unui impuls iniţial, a unui sistem structural elastic, avînd, pe lîngă *masa proprie* continuă însă arbitrar repartizată şi *mase suportate*, distribuite sau concentrate, reprezintă un fenomen de mare complexitate. Pentru a face posibilă elaborarea unui model matematic necesar în studiul acestor oscilaţii, la nivelul unor aplicaţii practice, se impun ipoteze simplificatoare, caracteristice teoriei dinamice a construcţiilor :

— admiterea oscilaţiei libere a structurii elastice ca aparţinînd domeniului micilor oscilaţii, respectiv *admiterea principiului suprapunerii efectelor*, forma generală de vibraţie liberă rezultînd din compunerea formelor proprii de oscilaţie ale structurii studiate ;

— *neglijarea efectului de continuitate a masei proprii* a structurii reale, respectiv adoptarea unei scheme dinamice cu un număr finit de mase discrete, avînd deci un număr finit de n grade de libertate ;

— neglijarea influenţei amortizării [4], [6].

Este de menționat că procedeul de analiză elastică a structurilor cu dale elaborat permite introducerea în calcule nu numai a dimensiunilor în plan ale maselor $m_j(2c_m, 2d_m)$ ci și a forței-unitate $P_i = 1$ ca forță local distribuită, respectiv a cuplului-unitate $M_i = 1$ ca cuplu de suprafață, avînd, în planul dalei, o suprafață de aplicare de dimensiuni $(2c_i, 2d_i)$ (fig. 2.1).

Cu notațiile introduse în cadrul sistematizărilor adoptate pentru programele de calcul (cap. 3), *expresiile deplasărilor unitare* z_{ji} ce se vor utiliza în analiza dinamică a structurilor cu dale sînt date de :

$$z_{ji} = \frac{a^2}{D} k_w^P \quad \text{— deplasarea unitară transversală pe direcția de oscilație a masei } m_j, \text{ cînd în } i \text{ se aplică o forță-unitate } P_i = 1 ; \tag{2.4}$$

$$z_{ji} = \frac{a}{D} k_w^M \quad \text{— deplasarea unitară transversală pe direcția de oscilație a masei } m_j, \text{ cînd în } i \text{ se aplică un cuplu-unitate } M_i = 1.$$

În cazul structurilor cu dale avînd mase concentrate de dimensiuni mari, la care inerția de rotație nu ar mai putea fi neglijată, deplasările unitare unghiulare z_{ji} pot fi calculate cu expresiile :

$$z_{ji} = \frac{a}{D} k_\varphi^{xP} \quad \text{— rotirea unitară în sensul } Ox, \text{ în dreptul masei } m_j, \text{ cînd în } i \text{ se aplică o forță-unitate } P_i = 1 ; \tag{2.5}$$

$$z_{ji} = \frac{1}{D} k_\varphi^{xM} \quad \text{— rotirea unitară în sensul } Ox, \text{ în dreptul masei } m_j, \text{ cînd în } i \text{ se aplică un cuplu-unitate } M_i = 1.$$

Au fost utilizate notațiile :
a — deschiderea plăcii în sensul axei x;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad \text{— rigiditatea cilindrică a plăcii,} \tag{2.6}$$

unde

E — modulul de elasticitate al materialului ;
h — grosimea plăcii, admisă constantă ;
μ — coeficientul lui Poisson.

Sistemul de ecuații diferențiale de ordinul doi în t,

$$z_j(t) + \sum_{i=1}^{n} m_j z_{ji} \ddot{z}_j(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots n ; j = 1, 2, \ldots n), \tag{2.7}$$

este verificat de soluții particulare armonice de forma

$$z_j(t) = A_j \sin(\omega t + \varphi), \tag{2.8}$$

unde

A_j — amplitudinea oscilației libere a masei m_j ($j = 1, 2, \ldots n$);
ω — pulsația vibrațiilor proprii ale sistemului elastic (rad/s);
φ — unghiul de fază inițială (rad).

În exprimare matriceală, sistemul de ecuații (2.7) devine

$$\boldsymbol{Z} + \boldsymbol{z}\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{0}, \tag{2.9}$$

unde

$\boldsymbol{Z}$ — vectorul deplasărilor dinamice z_j ale maselor m_j ($j = 1, 2, \ldots n$);
$\boldsymbol{z}$ — *matricea de flexibilitate*, care reprezintă matricea pătrată a deplasărilor unitare transversale z_{ji} (2.4) ($i = 1, 2, \ldots n$; $j = 1, 2, \ldots n$);
$\boldsymbol{M} = [M]$ — *matricea de inerție*, care reprezintă matricea diagonală a maselor m_j ($j = 1, 2, \ldots n$) ale structurii schematizate;
$\ddot{\boldsymbol{Z}}$ — vectorul accelerațiilor $\ddot{z}_j(t)$ ale maselor m_j la momentul $t = t$ al mișcării.

Introducînd soluțiile particulare (2.8) în sistemul de ecuații diferențiale (2.9), unde

$$\ddot{z}_j(t) = -\omega^2 A_j \sin(\omega t + \varphi), \tag{2.10}$$

și notînd cu

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}, \tag{2.11}$$

se obține un sistem de ecuații algebrice, liniar și omogen, de forma

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}, \tag{2.12}$$

unde

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} m_1 z_{11} - \lambda & \ldots & m_j z_{1j} & \ldots & m_n z_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_1 z_{j1} & \ldots & m_j z_{jj} - \lambda & \ldots & m_n z_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_1 z_{n1} & \ldots & m_j z_{nj} & \ldots & m_n z_{nn} - \lambda \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Matricea coloană $\boldsymbol{A}$ exprimă vectorul amplitudinilor A_j ale maselor m_j ($j = 1, 2, \ldots n$) pe direcțiile de oscilație liberă ale acestora, corespunzătoare celor n grade de libertate ale schemei dinamice, amplitudini care reprezintă necunoscutele sistemului de ecuații (2.12).

Ecuația pulsațiilor (ecuația seculară) ce se obține în metoda matricei de flexibilitate,

$$D[\boldsymbol{S}] = 0, \tag{2.13}$$

exprimă formal condiția de anulare a determinantului principal D al matricei $\boldsymbol{S}$ și reprezintă fizic condiția necesară și suficientă ca sistemul elastic

să oscileze, respectiv ca cel puțin unul din elementele A_j ale vectorului amplitudinilor să fie diferit de zero.

Ecuația algebrică de gradul n în λ (respectiv în ω^2), ce se obține prin dezvoltarea determinantului (2.13), are n rădăcini reale și pozitive,

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_r > \ldots > \lambda_n,$$

care permit determinarea valorilor pulsațiilor proprii ale structurii studiate

$$\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_r < \ldots < \omega_n \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right). \tag{2.14}$$

S-a notat prin ω_1 *pulsația fundamentală*, iar prin ω_r pulsația de ordinul r, căreia îi corespunde *)

$$\text{frecvența } f_r = \frac{\omega_r}{2\pi}, \tag{2.15}$$

și, respectiv,

$$\text{perioada } T_r = \frac{2\pi}{\omega_r} \quad \text{(s)}. \tag{2.16}$$

Numărul n al valorilor proprii $\omega_r(f_r, T_r)$ $(r = 1, 2, \ldots n)$ ale unui sistem oscilant este egal cu numărul gradelor lui de libertate dinamică. Spectrul valorilor proprii reprezintă *caracteristici fizice* ale structurii, ele depinzînd exclusiv de distribuția maselor și de proprietățile elastice ale sistemului.

*

Cunoașterea valorilor proprii este necesară atît în studiul comportării dinamice a unei structuri date sub acțiunea unui sistem de forțe perturbatoare (par. 2.2), cît și în studiile legate de proiectarea antiseismică a structurilor de rezistență [4], [6], [28].

În analiza răspunsului dinamic al unui sistem structural la acțiunea seismică apare, în plus, necesitatea determinării formelor de oscilație ale acestui sistem, corespunzătoare fiecărei valori proprii $\omega_r(f_r, T_r)$ $(r = 1, 2, \ldots n)$, respectiv cunoașterea așa numitelor *forme proprii* ale sistemului elastic.

Modul propriu de vibrație r, ansamblu constituit din valoarea proprie ω_r și forma proprie corespunzătoare, intervine direct în evaluarea încărcărilor seismice orizontale S_r [4], [6], [28].

Pentru determinarea configurației geometrice a formelor proprii se introduc succesiv, în sistemul ecuațiilor de mișcare (2.12), valorile pulsațiilor proprii ω_r (respectiv λ_r), valori care constituie cele n rădăcini ale ecuației pulsațiilor (2.13). Noul sistem de ecuații dat de

$$\boldsymbol{S_r A_r = 0}, \tag{2.17}$$

*) Indicele r al valorilor proprii este cel adoptat în normativul P 100–78 [28].

în care elementele vectorului $\boldsymbol{A}_r$ sînt amplitudinile $A_{j,r}$ ale maselor m_j ($j = 1, 2, \ldots n$), corespunzătoare modului propriu de vibrație r, rămîne, evident, tot un sistem algebric și omogen în $A_{j,r}$, astfel încît valorile necunoscutelor $A_{j,r}$ nu pot fi determinate. Matricea $\boldsymbol{S}_r$ este matricea $\boldsymbol{S}$ (2.12) în care s-au introdus valorile $\lambda = \lambda_r$, corespunzătoare modului propriu de vibrație r.

În aplicațiile practice, inclusiv în evaluarea încărcărilor seismic orizontale de nivel $S_{j,r}$ (2.18) la proiectarea structurilor amplasate în zon seismice, nu intervin însă valorile amplitudinilor $A_{j,r}$ ci numai rapoartel $u_{j,r}$ ale acestora. Într-adevăr, conform normativului P 100—78 [28]

$$S_{j,r} = K_s \beta_r \psi \eta_{j,r} G_j, \tag{2.18}$$

unde

K_s — coeficientul de intensitate seismică;

β_r — coeficientul spectral (dinamic), a cărui valoare este invers proporțională cu perioada proprie de vibrație a structurii T_r (2.16), corespunzătoare modului propriu de vibrație r;

ψ — coeficientul de disipare, prin care se ține seama de capacitatea de amortizare a structurii și de ductilitatea acesteia;

G_j — rezultanta încărcărilor gravitaționale la nivelul j.

Coeficientul $\eta_{j,r}$ de distribuție a încărcărilor seismice orizontale la nivelul j, depinzînd de modul propriu de vibrație r și de mărimea și distribuția încărcărilor gravitaționale G_j, este calculat cu ajutorul expresiei

$$\eta_{j,r} = \frac{\sum_{j=1}^{n} G_j u_{j,r}}{\sum_{j=1}^{n} G_j u_{j,r}^2} u_{j,r}, \tag{2.19}$$

în care

$$u_{j,r} = \frac{A_{j,r}}{A_{1,r}} \qquad (j = 1, 2, \ldots n). \tag{2.20}$$

Se admite că valorile $u_{j,r}$ (2.20) — ca rapoarte ale amplitudinilor $A_{j,r}$ prin una din aceste amplitudini, de exemplu $A_{1,r}$ — reprezintă *ordonatele formei proprii r* de vibrație. Prima ordonată a oricărei forme proprii r fiind egală cu unitatea,

$$u_{1,r} = 1,$$

prin împărțirea fiecărui termen al sistemului de ecuații (2.17) prin $A_{1,r}$ noul sistem de ecuații obținut are expresia

$$\boldsymbol{S}_r \boldsymbol{U}_r = \boldsymbol{0}, \tag{2.21}$$

unde

$$S_r = \begin{bmatrix} m_1 z_{11} - \lambda_r & \dots & m_j z_{1j} & \dots & m_n z_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_1 z_{j1} & \dots & m_j z_{jj} - \lambda_r & \dots & m_n z_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ m_1 z_{n1} & \dots & m_j z_{nj} & \dots & m_n z_{nn} - \lambda_r \end{bmatrix}; \quad U_r = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ u_{j,r} \\ \vdots \\ u_{n,r} \end{bmatrix}.$$

Sistemul algebric de n ecuații (2.21) avînd termeni liberi și numai $(n-1)$ necunoscute $u_{j,r} (j = 2, 3, \dots n)$, pentru determinarea acestora se vor utiliza numai $(n-1)$ ecuații, ecuația excedentară fiind utilizată pentru verificarea calculelor numerice.

Valorile celor $(n-1)$ ordonate $u_{j,r}$ ale formei proprii care caracterizează modul propriu de vibrație r fiind raportate la valoarea $u_{1,r} = 1$ a primei ordonate, configurația geometrică a formei de oscilație r este cunoscută. Prin introducerea succesivă, în sistemul de ecuații (2.21), a valorilor λ_r $(r = 1, 2, \dots n)$ care corespund celor n valori proprii, se pot determina toate cele n forme de oscilație ale sistemului elastic studiat.

Verificarea valorilor formelor proprii obținute prin calcul se face utilizînd proprietatea de ortogonalitate a formelor proprii, exprimată prin condiția

$$\sum_{j=1}^{n} u_{j,r} m_j \; u_{j,s} = 0 \quad (r \neq s), \; (j = 1, 2, \dots n), \tag{2.22}$$

în care $u_{j,r}$ și, respectiv, $u_{j,s}$ sînt ordonatele formelor proprii corespunzătoare a două moduri proprii r și s distincte de vibrație.

★

În *cazul particular al structurilor cu dale*, datorită simetriei topologice sau chiar numai unei anumite regularități în distribuția maselor concentrate și a reazemelor (stîlpilor), există posibilitatea grupării deplasărilor unitare z_{ji} (2.4) și (2.5) — parametri care intervin în matricea de flexibilitate (2.9), determinînd poziția maselor în mișcare — cu condiția ca grupările adoptate să fie liniar independente.

Pentru calculul valorilor pulsațiilor proprii ω_r și a ordonatelor $u_{j,r}$ ale formelor proprii de oscilație, la scrierea ecuației pulsațiilor (2.13) și respectiv la rezolvarea sistemului de ecuații (2.21) grupările de parametri reprezintă grupări de deplasări unitare de tipul (cap. 3)

$$K_w^P; \; K_w^M; \; K_\varphi^{xP}; \; K_\varphi^{xM}; \; K_\varphi^{yP} \text{ și } K_\varphi^{yM}.$$

În aceste condiții, pe lîngă avantajele specifice adoptării grupărilor simetrice și antisimetrice de parametri, care conduc la separarea ecuațiilor în sistemul ecuațiilor de continuitate (cap. 4), la analiza dinamică a structurilor cu dale simplificări substanțiale se obțin prin utilizarea tabelelor de coeficienți adimensionali calculați de autor [17].

2.2. ELEMENTE DE CALCUL PENTRU STUDIUL VIBRAȚIILOR FORȚATE

Un sistem de m forțe perturbatoare $P_k(t)$ $(k = 1, 2 \ldots m)$, ce acționează asupra unei structuri elastice date, avînd un număr finit de n grade de libertate dinamică $(\forall m, n)$, imprimă maselor acesteia oscilații care diferă de oscilațiile libere cunoscute. Prin suprapunerea efectelor celor două tipuri de vibrații, proprii și forțate, fenomenul fizic real rezultă mai complex încă decît în cazul vibrațiilor libere (§ 2.1.), cel puțin la începutul mișcării. La nivelul aplicațiilor inginerești curente, studiul vibrațiilor forțate se efectuează în ipoteza amortizării, după un anumit interval de timp, a vibrațiilor proprii, la momentul $t = t$ al mișcării, sistemul elastic ajungînd la un regim staționar stabilizat de oscilație, caracterizat prin pulsația p a perturbatorilor $P_k(t)$ [4], [6].

Se admite în plus, tot din necesitatea simplificării modelului matematic, că forțele perturbatoare pot fi exprimate prin funcții periodice armonice de forma

$$P_k(t) = P_k^0 \sin pt \qquad (k = 1, 2, \ldots m), \tag{2.23}$$

unde

P_k^0 — valoarea de amplitudine a perturbatorului $P_k(t)$;
p — pulsația forțelor perturbatoare, admisă aceeași pentru toți perturbatorii.

Întrucît se consideră că între forțele perturbatoare care acționează structura nu există defazări, în expresia (2.23) unghiul de fază inițială s-a admis nul $(\varphi = 0)$.

Procedeul propus pentru analiza elastică a structurilor cu dale [14], [16], [17] permite modelarea matematică inclusiv a efectelor unui perturbator de natura unui *cuplu de suprafață* $M_k(t)$, acționînd dala planșeului (fig. 2.2, în care, pentru claritate, schema dinamică a sistemului oscilant constituit dintr-o *placă plană* dreptunghiulară a fost redusă la o singură masă m_j în j și la un singur perturbator $M_k(t)$ în k), și avînd expresia

$$M_k(t) = M_k^0 \sin pt, \tag{2.24}$$

în care

M_k^0 — valoarea de amplitudine a perturbatorului $M_k(t)$.

În cazul — particularizat prin ipotezele enunțate — al unui sistem oscilant dat, mișcarea maselor m_j care caracterizează schema dinamică a acestuia va fi determinată de vibrațiile forțate impuse de forțele perturbatoare $P_k(t)$ (2.23), respectiv de cuplurile perturbatoare $M_k(t)$ (2.24), astfel încît, la atingerea regimului permanent de oscilație, legea mișcării masei m_j va fi de forma

$$z_j(t) \cong z_{jP,M}(t).$$

Răspunsul staționar-stabilizat al structurii elastice la perturbații armonice putînd fi reprezentat prin funcții armonice de pulsație p, deplasarea dinamică a masei m_j pe direcția ei de oscilație va fi exprimată prin

$$z_j(t) = B_j \sin pt, \tag{2.25}$$

unde

B_j — amplitudinea oscilației forțate a masei m_j ($j = 1, 2, \ldots n$), pe direcția gradului de libertate j, atinsă în același moment în care forțele perturbatoare ajung la valoarea lor maximă P_k^0 (respectiv M_k^0).

Legea de variație a forțelor de inerție I_j care apar pe direcția fiecăruia din cele n grade de libertate ale sistemului oscilant, în regim de vibrație forțată, rezultă din

$$I_j = -m_j \ddot{z}_j(t) = I_j^0 \sin pt. \quad (j = 1, 2, \ldots n). \tag{2.26}$$

S-a notat prin

$$I_j = m_j p^2 B_j \tag{2.27}$$

valoarea extremă (maximă sau minimă) a forțelor de inerție I_j, aplicate maselor m_j, valoare atinsă simultan, de către toate cele n forțe de inerție, în momentul în care perturbatorii ating valorile lor de amplitudine.

Ipotezele simplificatoare acceptate în practica proiectării la studiul vibrațiilor forțate ale structurilor elastice conduc, prin urmare, la admiterea faptului că, pe toată durata de acțiune a forțelor perturbatoare, atît deplasările dinamice $z_j(t)$ ale maselor m_j, cît și forțele de inerție I_j corespunzătoare, ajung concomitent la valorile lor extreme, odată cu atingerea valorilor de amplitudine P_k^0 (respectiv M_k^0) ale acestor perturbatori.

Încărcînd static, conform principiului lui d'Alembert, schema dinamică a structurii considerate, cu forțele de inerție I_j, pe direcția gradelor de libertate j ale maselor sistemului oscilant, și cu forțele perturbatoare $P_k(t)$ ($k = 1, 2, \ldots m$), dintre care unele pot să nu fie aplicate maselor m_j, se obțin expresiile deplasărilor dinamice $z_j(t)$ ale acestor mase în regim permanent de oscilație forțată :

$$z_j(t) = \sum_{i=1}^{n} z_{ji} I_j + \sum_{k=1}^{m} z_{jk} P_k(t) \quad (j = 1, 2, \ldots n), \tag{2.28}$$

în care, sistemul oscilant fiind reprezentat printr-o *placă plană* (fig. 2.2),

z_{jk} — deplasarea unitară, respectiv deplasarea elastică (liniară sau unghiulară) a masei $m_j(x_m, y_m)$ pe direcția gradului de libertate j, produsă de forța-unitate $P_k^0 = 1$ (respectiv de cuplul-unitate $M_k^0 = 1$) acționînd în punctul $k(\xi_k, \eta_k)$.

Deplasările unitare z_{ji} au fost definite la § 2.1 (expresiile 2.3), inclusiv pentru cazul special al unei structuri cu dale (fig. 2.1, formulele 2.4 și și 2.5).

Atunci cînd *structurile cu dale* prezintă simetrii topologice, geometrice și mecanice, gruparea necunoscutelor implicînd calculul deplasărilor unitare grupate, coeficienții adimensionali k_w^P, k_w^M, K_φ^{xP}, $\ldots$ k_φ^{yM} se înlocuiesc, în formulele de tipul (2.4) și (2.5), cu coeficienții corespunzători grupărilor de parametri : K_w^P, K_w^M, K_φ^{xP}, $\ldots$ K_φ^{yM} (cap. 3). De exemplu :

(2.4′) $z_{jk} = \dfrac{a^2}{D} K_w^P$ — deplasarea unitară liniară (transversală) grupată, pe direcția gradului de libertate j al maselor grupate m_j, cînd în k se aplică o forță-unitate $P_k^0 = 1$;

(2.5′) $z_{jk} = \frac{1}{D} K_{\varphi}^{xM}$ — deplasarea unitară unghiulară (rotirea unitară) grupată, în sensul axei Ox (ca grad de libertate suplimentar, în care intervin grupări de forțe de inerție de rotație I_j), în dreptul maselor m_j grupate, cînd în k se aplică un cuplu-unitate $M_k^0 = 1$.

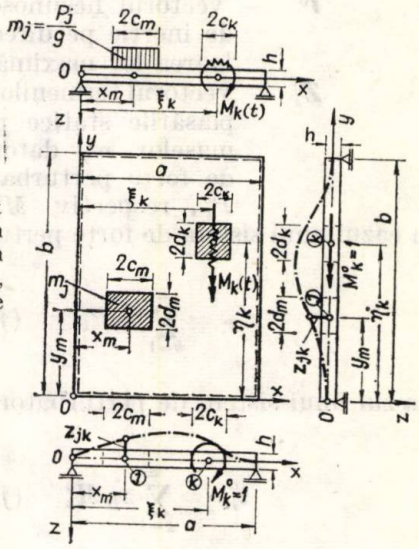


Fig. 2.2. — Placa plană ca element al unui sistem oscilant. Deplasarea unitară transversală z_{jk} pe direcția de oscilație a masei m_j (x_m, y_m), cînd în k se aplică un cuplu-unitate $M_k = 1$ (ξ_k, η_k).

Deplasările unitare z_{ji} și z_{jk} sînt caracteristici statice ale structurii elastice. Introducînd în (2.28) expresiile forțelor perturbatoare $P_k(t)$ (2.23), respectiv ale cuplurilor perturbatoare $M_k(t)$ (2.24), expresiile deplasărilor dinamice $z_j(t)$ (2.25) și ale forțelor de inerție corespunzătoare I_j (2.26; 2.27) și simplificînd, se obține sistemul de ecuații algebrice lineare în I_j^0 care modelează mișcarea maselor m_j ale sistemului oscilant în regim staționar-stabilizat, la atingerea valorilor de amplitudine:

$$\boldsymbol{z}^* \boldsymbol{I}^0 + \boldsymbol{Z}_P^0 = \boldsymbol{0}, \tag{2.29}$$

în care

$$\boldsymbol{z}^* = \begin{bmatrix} z_{11}^* \dots z_{1j} \dots z_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ z_{j1} \dots z_{jj}^* \dots z_{jn} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ z_{n1} \dots z_{nj} \dots z_{nn}^* \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{I}^0 = \begin{bmatrix} I_1^0 \\ \vdots \\ I_j^0 \\ \vdots \\ I_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Z}_{0P}^1 = \begin{bmatrix} z_{1P}^0 \\ \vdots \\ z_P^0 \\ \vdots \\ z_{nP} \end{bmatrix},$$

respectiv unde

$\boldsymbol{z}^*$ — *matricea de flexibilitate corectată*, dedusă din matricea pătrată z a deplasărilor unitare z_{ik} (2.3), (2.4) și

(2.5), definită la (2.9), prin introducerea pe diagonala principală a deplasărilor unitare corectate

$$z_{jj}^{*} = z_{jj} - \frac{1}{m_j p^2} \qquad (j = 1, 2, \ldots n); \tag{2.30}$$

$\boldsymbol{I}^0$ — vectorul necunoscutelor I_j^0, care reprezintă forțele de inerție pe direcția gradelor de libertate j, la valoarea lor maximă I_j^0 (2.27);

$\boldsymbol{Z}_P^0$ — vectorul termenilor liberi z_{jP}^0 (2.31), reprezentînd deplasările statice pe direcția gradelor de libertate ale maselor m_j datorite exclusiv acțiunii sistemului de forțe perturbatoare la valoarea de amplitudine P_k^0, respectiv M_k^0 $(k = 1,2, \ldots m)$.

În cazul unui sistem de forțe perturbatoare $P_k(t)$,

$$z_{jP}^0 = \sum_{k=1}^{m} z_{jk} P_k^0 \qquad (j = 1, 2, \ldots n), \tag{2.31}$$

iar în ca zul unui sistem de perturbatori de natura unor cupluri de suprafață,

$$z_{jP}^0 = \sum_{k=1}^{m} z_{jk} M_k^0 \qquad (j = 1, 2, \ldots n). \tag{2.31'}$$

Valorile extreme $\pm I_j^0$ ale forțelor de inerție I_j fiind determinate prin rezolvarea sistemului de ecuații (2.29), *forțele dinamice* maxime sau minime acționînd direct asupra maselor m_j ale structurii elastice se obțin prin suprapunerea efectelor, în ipotezele de calcul cele mai defavorabile pentru evaluarea eforturilor secționale de dimensionare:

$$P_{j\,\mathrm{din}}^0 = P_j^0 \pm I_j^0 \qquad (j = 1, 2, \ldots n), \tag{2.32}$$

unde

P_j^0 — valoarea de amplitudine a forței perturbatoare $P_j(t)$ care acționează direct masa m_j a sistemului oscilant.

În calculul eforturilor secționale de dimensionare, pe lîngă forțele dinamice $P_{j\,\mathrm{din}}^0$ (2.32), intervin, cînd este cazul, și acei perturbatori P_k^0 sau M_k^0 $(k \neq j)$ care acționează direct asupra elementelor de rezistență ale structurii.

★

În analiza dinamică a structurilor cu dale, efectuată prin *metoda matricei de flexibilitate*, plăcile plane care constituie planșeele structurii au fost considerate ca elemente componente ale unui sistem oscilant. *Schema dinamică* a acestui sistem se obține, ca și în cazul structurilor reticulare, prin *discretizarea maselor la nivelul fiecărui planșeu* însă, spre deosebire de sistemele plane alcătuite exclusiv din bare, structurile cu dale sînt tratate ca *sisteme tridimensionale*. Într-adevăr, masele discrete m_j

($j = 1, 2, \ldots n$) pot ocupa orice poziție (x_m, y_m) în planul orizontal xOy al planșeelor structurii, în timp ce deplasările liniare sau unghiulare ale acestor mase pe direcția gradelor de libertate se pot produce în planele verticale xOz sau yOz, normale la planul planșeelor. Schema dinamică poate fi completată, evident, cu mase concentrate în lungul stîlpilor, dacă este cazul.

Prin extinderea procedeelor elaborate de autor în analiza statică a structurilor cu dale (cap. 3 și 4) la studiul dinamic al acestei categorii de structuri, devine posibilă (fig. 2.1. și 2.2) :

1. exprimarea deplasărilor unitare transversale și a rotirilor unitare de tipul z_{ji}, care intervin în studiul vibrațiilor libere (formulele 2.3 ; 2.7 ; 2.9 ; 2.12 ; 2.13 și 2.21) cît și în studiul vibrațiilor forțate (formulele 2.28 ; 2.29 și 2.30) ale structurilor alcătuite din dale și plăci, cu ajutorul coeficienților adimensionali k_w^P, ... k_φ^{yM} (tabelul 1) ;

2. exprimarea — în mod similar — a deplasărilor unitare transversale și a rotirilor unitare de tipul z_{jk}, ce intervin în studiul vibrațiilor forțate (formulele 2.28 ; 2.29 ; 2.31 și 2.31') ale structurilor cu dale ;

3. exprimarea — în mod similar — a deplasărilor unitare transversale grupate și a rotirilor unitare grupate de tipul z_{ji} sau z_{jk}, cu ajutorul coeficienților adimensionali K_w^P, ... K_φ^{yM}, reprezentînd grupări de deplasări unitare (cap. 3) ;

4. luarea în considerarè în calcule a dimensiunilor ($2c_m$, $2d_m$) ale maselor discrete m_j, în planul dalelor ;

5. luarea în considerare în calcule a dimensiunilor ($2c_i$, $2d_i$) ale suprafeței de aplicare a forței-unitate $P_i = 1$, ca forță local distribuită, respectiv a cuplului-unitate $M_i = 1$, ca cuplu de suprafață ;

6. luarea în considerare în calcule a dimensiunilor ($2c_k$, $2d_k$) ale suprafeței de aplicare a forței perturbatoare $P_k(t)$, respectiv a unui perturbator de natura unui cuplu de suprafață $M_k(t)$.

Tabelul 1

Expresiile deplasărilor unitare z_{ji} ale masei m_j de coordonate (x_m, y_m)

Nr.	$z_{ji} =$	Forța-unitate sau cuplul-unitate aplicate în i (ξ_i, η_i)	Natura deplasării unitare pe direcția gradului de libertate j
1.	$\frac{a^2}{D} k_w^P$	$P_i = 1$	Deplasare transversală în sensul axei Oz
2.	$\frac{a}{D} k_w^M$	$M_i = 1$	Deplasare transversală în sensul axei Oz
3	$\frac{a}{D} k_\varphi^{xP}$	$P = 1$	Rotire unitară în sensul axei Ox
4.	$\frac{a}{D} k_\varphi^{yP}$	$P_i = 1$	Rotire unitară în sensul axei Oy
5.	$\frac{1}{D} k_\varphi^{xM}$	$M_i = 1$	Rotire unitară în sensul axei Ox
6.	$\frac{1}{D} k_\varphi^{yM}$	$M_i = 1$	Rotire unitară în sensul axei Oy

Observații. 1. Expresiile deplasărilor unitare z_{ji} de sub punctele 1 și 2 reprezintă *deplasări elastice liniare*, care intervin în calculele curente, în care se ține seama numai de *inerția de translație* a maselor discrete m_j.

2. Expresiile deplasărilor unitare z_{ji} de sub punctele 3,4,5 și 6 reprezintă *rotiri elastice*, care nu intervin în calcule decît în cazul unor mase m_j de dimensiuni mari, la care *inerția de rotație* nu poate fi neglijată.

3. Valorile deplasărilor unitare z_{ji} se determină pe sistemul structural real, static nedeterminat (cap. 4).

4. Expresiile de calcul ale coeficienților adimensionali $k_w^P, \ldots k_\varphi^{yM}$ (§ 3.1) cît și ale coeficienților adimensionali de tip $K_w^P, \ldots K_\varphi^{yM}$ — reprezentînd deplasări unitare grupate (§. 3.2) — au fost publicate de autor în lucrări anterioare [14], [17].

Primită la redacție la 25 iulie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. R. Agent, *Construcții din beton armat (II)* Cap. 9. Plăci plane cu reazeme concentrate, Institutul de construcții, București, 1979.
2. F. Allen, P. Darvall, *Lateral load equivalent frame* — Journal Amer. Concr. Inst., ACI, **40**, 7, 74—32, 294—299 (1977).
3. A. Caracostea, M. Soare ș.a., *Manual pentru calculul construcțiilor (I)* Secțiunea VI Plăci plane, Edit. tehnică, București, 1977.
4. Al. Gheorghiu, *Statica, Stabilitatea și Dinamica construcțiilor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1974 (1968).
5. K. Girkmann, *Flächentragwerke*, 6 Auflage—Springer Verlag, Wien, 1963 (1946).
6. M. Ifrim, *Analiza dinamică a structurilor și inginerie seismică*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1973 (1962).
7. R. Negruțiu, *Plăci plane acționate prin cupluri de suprafață (I)*, Bul. știin. Inst. construcții București, **12**, *2*, 175—199 (1969).
8. — *Efectul cuplului de suprafață asupra stării de deformație a plăcilor plane*, Sesiunea științifică jubiliară de Mecanică, Universitatea București, 12—14 decembrie 1969.
9. — *Plaques planes actionées par des couples de surface (II). Étude des déplacements élastiques*, Bul. știin. Inst. construcții București, **13**, *3*, 115—144 (1970).
10. — *Contribuții la studiul structurilor cu planșee-dală*, Sesiunea științifică a cadrelor didactice I.P.G.G., București, 16—17 aprilie 1971.
11. — *Distribution des efforts sectionnels dans les plaques planes actionées par des couples de surface*, Rev. roum. sci. tech. — Mécanique appliquée, **16**, *6*, p. 1307—1335. (1971).
12. — *L'effet des groupements de couples de surface sur les plaques planes*, Rev. roum. sci. techn.—Mécanique appliquée, **18**, 1, p. 179—220 (1973).
13. — *Modelarea efectului legăturilor rigide la studiul static al structurilor cu planșee-dală*, Sesiunea științifică a cadrelor didactice Inst. construcții București, 26—28 aprilie 1973.
14. — *Efectul legăturilor rigide la calculul structurilor cu planșee-dală*, Teză de doctorat, Inst. construcții București, 7 iulie 1973.
15. — *Legături rigide de tip bară-placă plană la calculul organelor de mașini și al structurilor de rezistență metalice, cu sau fără simetrii*, Simpozionul „Utilaj petrolier. Direcții de modernizare și perfecționare", IPG, Ploiești, 8—9 noiembrie 1974.
16. — *Metodă îmbunătățită de calcul al structurilor cu planșee-dală, prin introducerea forțelor de legătură-cupluri pe două direcții ale planului*, Simpozionul „Concepții și metode de calcul pentru optimizarea soluțiilor în domeniul construcțiilor", Inst. construcții București, 25—27 aprilie 1975.
17. — *Analiza elastică a structurilor cu dale*, Edit. Academiei, București, 1976.
18. D. Pfaffinger, *Column-plate interaction in flat slab structures*, Journ. Structural Div., ASCE, **98**, *ST 1*, 8670 (1972).

19. D. Pfaffinger, *Linear constraint equations for continuous support conditions in finite element analysis*, Computers & Structures, **8**, Pergamon Press Ltd., Oxford, 1978.
20. G. Scholz, *Flachdeckenrahmen bei Horizontalbelastung*, Stahlbetonbau, Festschrift Rüsch, W. Ernst & Sohn, Berlin, München, 1969.
21. K. Stiglat, *Der Plattenstreifen unter dem Angrif von Flächenmomenten*. Mitwirkende Plattenbreiten, Die Bautechnik, 1963, *4*, şi 1969, *4*.
22. K. Stiglat, H. Wippel, *Platten*, 2. Auflage, W Ernst & Sohn, Berlin, München, 1973, (1966).
23. * * * *Règles techniques de conception et de calcul des ouvrages et construction en béton armé*, CCBA 68, Soc. diff. techn. bâtim, trav. publ., Paris, 1970 (1963).
24. * * * *Building code requirements for reinforced concrete*, ACI 318—71, Amer. Concr. Inst., Detroit, 1971 (196 }, 1956).
25. * * * *Beton—und Stahlbetonbau. Bemessung und Ausführung* DIN 1045, Deutsch. Aussch. Stahlbeton, Berlin, Köln, 1972 (1959).
26. * * * *Normes pour le calcul, la construction et l'exécution des ouvrages en béton, en béton armé et en béton précontraint*, SIA 162, Soc. suisse ingén. archit., Zürich, 1972 (1968).
27. * * * *Code of practice for the structural use of reinforced concrete*, CP 110 : Part 1 : 1972, Brit. Standard Inst., London, 1974(1969, 1957).
28. * * * *Normativ pentru proiectarea antiseismică a construcţiilor de locuinţe, social-culturale, agrozootehnice şi industriale*, P 100—78, Inst. centr. cercet. proiect. directiv. constr., Bucureşti, 1978 (1970).
29. * * * *Normativ privind calculul şi alcătuirea planşeelor din beton armat şi beton precomprimat*, Cap. 7. Planşee cu dale groase. Planşee-dală. Planşee-ciuperci, Proiect INCERC — Inst. construcţii Bucureşti, 1979.

PLACĂ DREPTUNGHIULARĂ CU DEFORMAȚII MARI REZEMATĂ PE CONTUR

de IRONIM MARȚIAN,
Institutul politehnic Cluj-Napoca
GHEORGHE CIMOCA
Centrul teritorial de calcul electronic Cluj-Napoca

Lucrarea de față își propune studiul plăcilor plane dreptunghiulare încărcate transversal considerînd și deformațiile suprafeței mediane, fapt ce conduce la apariția unor eforturi suplimentare, de membrană, care sporesc rigiditatea plăcii datorită acțiunii lor în sens contrar sarcinii exterioare.
Problema se rezolvă în două situații diferite de rezemare a plăcii pe contur — fixă și mobilă — prin metoda variațională Bubnov-Galerkin în limitele aproximațiilor de ordinul întîi și doi. Rezultă astfel o comportare mai reală a plăcilor plane în exploatare, obținîndu-se în cazul deformațiilor mari deplasări transversale mici ale punctelor din suprafața mediană, concomitent cu mărirea volumului de lucru reclamat de calculul neliniar.

1. GENERALITĂȚI

Una dintre ipotezele pe care se bazează studiul clasic al plăcilor plane este aceea potrivit căreia deformațiile suprafeței mediane se pot neglija, ipoteză riguroasă numai în cazul încovoierii plăcii după o suprafață desfășurabilă. În celelalte situații trebuie să se țină seama și de deformațiile din suprafața mediană, acestea conducînd la apariția unor eforturi suplimentare de membrană, care acționează în sens contrar sarcinii exterioare sporind rigiditatea plăcii.

În cazul deformațiilor mari se deosebesc două aspecte și anume: unul, cînd marginile plăcii sînt imobile și celălalt, cînd marginile se pot deplasa liber în planul plăcii, deplasare ce poate avea o influență considerabilă asupra mărimii deformațiilor și a eforturilor din placă.

Se consideră o placă dreptunghiulară, oricum rezemată pe contur, supusă acțiunii unei sarcini transversale uniform distribuite p din care, în starea deformată, se detașează un element infinitezimal ca în figura 1. Eforturile secționale de membrană N_x, N_y și N_{xy} se datorează deformațiilor din suprafața mediană a plăcii produse de sarcina p.

Considerînd echilibrul elementului [1], [5], se obține:

— din ecuația de proiecții după axa x:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

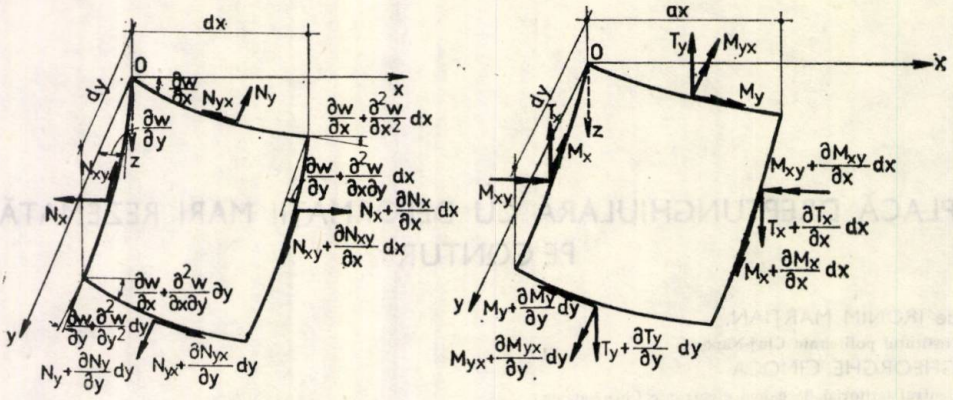


Fig. 1. — Element de placă plană în starea deformată.

— din ecuația de proiecții după axa y :

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

— din ecuația de proiecții după axa z :

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + p = 0, \tag{3}$$

— din ecuația de momente în raport cu axa x :

$$T_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x}, \tag{4}$$

— din ecuația de momente în raport cu axa y :

$$T_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{yx} \frac{\partial w}{\partial y}, \tag{5}$$

— ecuația de momente în raport cu axa z este identic satisfăcută.

Înlocuind relațiile (4) și (5) în (3) și ținînd seama de expresiile eforturilor

$$\begin{aligned} M_x &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\ M_{xy} &= -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \tag{6}$$

rezultă

$$\nabla^4 w(x, y) = \frac{1}{D}\left(p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{7}$$

Din [1] se obțin relațiile geometrice sub forma

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2, \tag{8}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y},$$

unde u, v și w reprezintă componentele deplasării unui punct din suprafața mediană a plăcii. Atunci condiția de continuitate a deformațiilor devine

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \tag{9}$$

În baza legii lui Hooke

$$\varepsilon_x = \frac{1}{Eh}(N_x - \mu N_y),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{Eh}(N_y - \mu N_x), \tag{10}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{Eh} N_{xy},$$

și introducînd funcția eforturilor $F(x, y)$ astfel încît

$$N_x = h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},$$

$$N_y = h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tag{11}$$

$$N_{xy} = -h\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

relațiile (1) și (2) sînt identic satisfăcute, iar relația (9) se transformă în

$$\nabla^4 F(x, y) = E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]. \tag{12}$$

Relațiile (12) și (7) sînt ecuațiile plăcilor plane [1] [5] cu deformații mari stabilite de Kármán în anul 1910 pentru care soluția exactă nu este determinată. Ele se aplică ușor dacă pe conturul plăcii se pun condiții asupra eforturilor de membrană (11).

2. PLACĂ DREPTUNGHIULARĂ CU DEFORMAȚII MARI REZEMATĂ PE CONTUR, ÎNCĂRCATĂ CU O SARCINĂ TRANSVERSALĂ UNIFORM DISTRIBUITĂ

a) PLACĂ DREPTUNGHIULARĂ ARTICULATĂ PE CONTUR

Din relațiile (10) ținînd seama de (8) rezultă expresiile eforturilor de membrană sub forma

$$N_x = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right],$$

$$N_y = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \mu\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right], \tag{13}$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{2(1+\mu)}\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w}{\partial y}\right],$$

iar din relațiile (1) și (2) se găsesc expresiile

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0. \tag{14}$$

Cu notațiile

$$L_u(u, v) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

$$L_v(u, v) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

$$P(x, y) = -\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{15}$$

$$R(x, y) = -\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),$$

$$q(x, y) = p + \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right).$$

relațiile (14) și (7) capătă forma

$$\begin{aligned} L_u(u, v) &= P(x, y), \\ L_v(u, v) &= R(x, y), \\ \nabla^4 w(x, y) &= \frac{q(x, y)}{D}. \end{aligned} \tag{16}$$

Fie placa dreptunghiulară raportată la sistemul de axe din figura 2, de laturi $2a$ și $2b$.

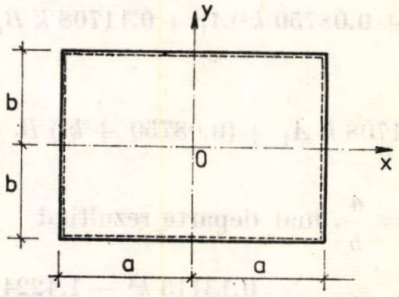


Fig. 2. — Placa dreptunghiulară rezemată pe contur.

Aplicînd metoda variațională Bubnov-Galerkin, se aleg pentru deplasări într-o primă aproximație expresiile

$$u(x, y) = Af_1(x, y) = A \sin\frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi y}{2b},$$

$$v(x, y) = Bf_2(x, y) = B \cos\frac{\pi x}{2a}\sin\frac{\pi y}{b}, \tag{17}$$

$$w(x, y) = w_1 f_3(x, y) = w_1 \cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b},$$

care satisfac condițiile limită

$$\begin{aligned} &x = \pm a; \quad u = 0, \quad w = 0, \quad M_x = 0, \\ &y = \pm b; \quad v = 0, \quad w = 0, \quad M_y = 0, \\ &x = y = 0; \quad u = v = 0, \end{aligned} \tag{18}$$

funcția $u(x, y)$ fiind impară de x și pară de y, iar funcția $v(x, y)$ impară de y și pară de x.

Constantele A, B și w_1 se vor determina astfel încît funcțiile (17) să satisfacă grupul de relații (16), care, în formă variațională, se scrie

$$\begin{aligned} &\int_S [L_u(u, v) - P(x, y)]\, f_1(x, y)\, dx\, dy = 0, \\ &\int_S [L_v(u, v) - R(x, y)]\, f_2(x, y)\, dx\, dy = 0, \\ &\int_S \left[\nabla^4 w(x, y) - \frac{q(x, y)}{D} \right] f_3(x, y)\, dx\, dy = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Efectuînd calculele ($\mu = 0{,}3$), din primele două relații se obține următorul sistem de ecuații algebrice, liniare în raport cu coeficienții A_1 și B_1:

$$\begin{aligned} &(1 + 0{,}08750\, k^2) A_1 + 0{,}11708\, k\, B_1 = (0{,}16667 + 0{,}00416\, k^2) \frac{w_1^2}{a}, \\ &0{,}11708\, k\, A_1 + (0{,}08750 + k^2)\, B_1 = k(0{,}00416 + 0{,}16667\, k^2) \frac{w_1^2}{a}, \end{aligned} \tag{20}$$

unde $k = \frac{a}{b}$, mai departe rezultînd

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{0{,}13113\, k^4 - 1{,}42241\, k^2 - 0{,}12455}{0{,}74735\, k^4 + 8{,}48947\, k^2 + 0{,}74735} \cdot \frac{w_1^2}{a}, \\ B_1 &= k \frac{0{,}12455\, k^4 + 1{,}42241\, k^2 - 0{,}13113}{0{,}74735\, k^4 + 8{,}48947\, k^2 + 0{,}74735} \cdot \frac{w_1^2}{a}, \end{aligned} \tag{21}$$

iar pentru placa pătrată, $k = 1$, coeficienții vor fi

$$A_1 = B_1 = 0{,}14180 \frac{w_1^2}{a}.$$

Cu notațiile

$$r = 0{,}15112 \cdot t(1 + k^2)^2,$$

$$s = -0{,}06036 \cdot t \cdot \frac{pa^4}{hD} \quad \text{și} \tag{22}$$

$$t = \frac{k^4 + 11{,}35942\, k^2 + 1}{k^8 + 11{,}44507\, k^6 + 6{,}07673\, k^4 + 11{,}44507\, k^2 + 1},$$

ultima relație din (19) conduce la ecuația algebrică de gradul trei în $\frac{w_1}{h}$

$$\left(\frac{w_1}{h}\right)^3 + 3r\left(\frac{w_1}{h}\right) + 2s = 0. \tag{23}$$

Deoarece realizantul $\Delta = r^3 + s^2 > 0$, ecuația (23) admite o singură rădăcină reală dată de relația

$$\frac{w_1}{h} = \sqrt[3]{-s + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-s - \sqrt{\Delta}}. \tag{24}$$

Cea de-a doua aproximație se obține păstrînd pentru $u(x, y)$ și $v(x, y)$ aceleași expresii din (17), iar pentru săgeata plăcii satisfăcînd condițiile de contur luîndu-se suma primilor doi termeni în funcția de aproximare

$$w(x, y) = w_1 f_3(x, y) + w_2 f_4(x, y) = w_1 \cos\frac{\pi x}{2a} \cos\frac{\pi y}{2b} + \\ + w_2 \cos\frac{3\pi x}{2a} \cos\frac{3\pi y}{2b}. \tag{25}$$

După reluarea calculelor în primele două relații din (19), se obține un nou sistem de ecuații liniare în raport cu A_2 și B_2 de forma

$$(1 + 0{,}08750\, k^2)A_2 + 0{,}11708\, k\, B_2 = (0{,}16667 + 0{,}00416\, k^2)\frac{w_1^2}{a} - \\ - (0{,}2 + 0{,}265\, k^2)\frac{w_1 w_2}{a},$$

$$0{,}11708\, k\, A_2 + (0{,}08750 + k^2)\, B_2 = k(0{,}00416 + 0{,}16667\, k^2)\frac{w_1^2}{a} - \\ - (0{,}265 + 0{,}2\, k^2)\frac{w_1 w_2}{a}, \tag{26}$$

cu soluțiile

$$A_2 = A_1 - \frac{2{,}06337\,k^4 + 1{,}64118k^2 + 0{,}14947}{0{,}74735\,k^4 + 8{,}48947k^2 + 0{,}74735}\,\frac{w_1 w_2}{a},$$

$$B_2 = B_1 - k\cdot\frac{0{,}14947\,k^4 + 1{,}64118\,k^2 + 2{,}06337}{0{,}74735\,k^4 + 8{,}48947\,k^2 + 0{,}74735}\,\frac{w_1 w_2}{a}, \tag{27}$$

iar în cazul plăcii pătrate

$$A_2 = B_2 = 0{,}14180\,\frac{w_1^2}{a} - 0{,}38601\,\frac{w_1 w_2}{a}. \tag{28}$$

Condiția că săgeata $w(x, y)$ dată de (25) să satisfacă a treia ecuație din (16) ținînd seama de (13), se va scrie variațional

$$\int_s \left[\nabla^4 w(x, y) - \frac{q(x, y)}{D}\right] f_3(x, y)\,dx\,dy = 0,$$

$$\int_s \left[\nabla^4 w(x, y) - \frac{q(x, y)}{D}\right] f_4(x, y)\,dx\,dy = 0, \tag{29}$$

rezultînd astfel un sistem de două ecuații algebrice neliniare de gradul trei care determină coeficienții w_1 și w_2. Utilizînd notațiile $x_1 = \frac{w_1}{h}$ și $x_2 = \frac{w_2}{h}$, sistemul (29) se poate scrie sub forma

$$g_1(x_1, x_2) = a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2 + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{00}\frac{pa^4}{hD} = 0,$$

$$g_2(x_1, x_2) = b_{30}x_1^3 + b_{21}x_1^2x_2 + b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 + b_{20}x_1^2 + b_{11}x_1x_2 + b_{02}x_2^2 + b_{10}x_1 + b_{01}x_2 + b_{00}\frac{pa^4}{hD} = 0 \tag{30}$$

cu coeficienții calculați în tabelul 1 funcție de raportul între laturi $k = \frac{a}{b} \leqslant 1$.

Pentru $0 < \frac{pa^4}{hD} \leqslant 40$, interval în care se înscrie obișnuit modul de lucru sub sarcini și de realizare constructivă a plăcilor plane utilizate în construcții, folosind metoda Newton-Raphson pornind de la o soluție

Tabelul 1

Coeficienții sistemului	$k = \frac{a}{b} \leqslant 1$				
	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
1	2	3	4	5	6
a_{30}	1	1	1	1	1
b_{30}	−1	−1	−1	−1	−1
a_{21}	0,60933	0,41377	0,03999	−0,40150	−0,73278
b_{21}	83,58787	75,27036	62,07904	58,38168	57,11784
a_{12}	4,39288	4,09627	3,77419	3,62824	3,68793
b_{12}	0	0	0	0	0
a_{03}	0	0	0	0	0
b_{03}	575,27272	484,03862	401,09190	355,82981	340,90235
a_{20}	0	0	0	0	0
b_{20}	0	0	0	0	0
a_{11}	0	0	0	0	0
b_{11}	0	0	0	0	0
a_{02}	0	0	0	0	0
b_{02}	0	0	0	0	0
a_{10}	0,39341	0,44155	0,56848	0,71380	0,79083
b_{10}	0	0	0	0	0
a_{01}	0	0	0	0	0
b_{01}	511,36363	479,85558	508,36439	554,98922	568,18181
a_{00}	−0,10470	−0,10411	−0,09683	−0,07782	−0,05262
b_{00}	−0,18686	−0,15533	−0,11889	−0,08307	−0,05190

aproximativă, se obțin soluțiile sistemului (30) pe baza algoritmului prezentat în continuare, la calculatorul FELIX C−256.

Fie x_1^1 și x_2^1 (cazul nostru $x_1^1 = 0{,}8$ și $x_2^1 = 0$) soluția aproximativă a sistemului (30). Dacă se dezvoltă funcțiile $g_1(x_1, x_2)$ și $g_2(x_1, x_2)$ în serie Taylor în jurul lui (x_1^1, x_2^1) și se reține numai termenii liniari, se obține sistemul

$$\begin{aligned} g_1(x_1^1, x_2^1) + \varepsilon_1^1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1}\bigg|_1 + \varepsilon_2^1 \frac{\partial g_1}{\partial x_2}\bigg|_1 &= 0, \\ g_2(x_1^1, x_2^1) + \varepsilon_1^1 \frac{\partial g_2}{\partial x_1}\bigg|_1 + \varepsilon_2^1 \frac{\partial g_2}{\partial x_2}\bigg|_1 &= 0, \end{aligned} \tag{31}$$

liniar în raport cu erorile ε_1^1 și ε_2^1 care determină o nouă aproximare, îmbunătățită, a soluțiilor

$$\begin{aligned} x_1^2 &= x_1^1 + \varepsilon_1^1, \\ x_2^2 &= x_2^1 + \varepsilon_2^1, \text{ în caz general } (i \geqslant 2) \\ x_1^i &= x_1^{i-1} + \varepsilon_1^{i-1} \\ x_2^i &= x_2^{i-1} + \varepsilon_2^{i-1}, \end{aligned} \tag{32}$$

operația terminîndu-se cînd erorile ε_1 și ε_2 sînt neglijabile.

Tabelul

Cazul

Nr. crt.	$\frac{pa^4}{hD}$	Raportul între					
		$k = 000$			$k = 0,25$		
		I	II		I	II	
		$\frac{w_1}{h}$	x_1	x_2	$\frac{w_1}{h}$	x_1	x_2
0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	1	0,236949	0,233670	0,000387	0,215900	0,213674	0,000342
3	2	0,395861	0,385947	0,000823	0,370649	0,363077	0,000732
4	3	0,508623	0,493118	0,001280	0,483372	0,470788	0,001149
5	5	0,669496	0,645512	0,002203	0,645446	0,625066	0,002005
6	10	0,923820	0,886265	0,004445	0,901907	0,868930	0,004117
7	15	1,095373	1,048702	0,006557	1,074521	1,033099	0,006127
8	20	1,229192	1,175426	0,088552	1,208945	1,160963	0,08036
9	30	1,437438	1,372604	0,012246	1,417734	1,359620	0,011567
10	40	1,600912	1,527388	0,015613	1,581413	1,515370	0,014848

În tabelul 2 sînt trecute soluțiile ecuației (24) și a sistemului (30) în funcție de diferite valori ale factorului $\frac{pa^4}{hD}$ găsindu-se pentru raportul $\frac{w}{h}$ în centrul plăcii diferențe mici care variază, în cadrul aceluiași raport între laturi k, cu $\frac{pa^4}{hD}$ astfel

$k = 0,00$; 1,22 % — 3,62 %,

$k = 0,25$; 0,88 % — 3,23 %,

$k = 0,50$; 0,27 % —2,06 %,

$k = 0,75$; 0,04 % — 0,41 %,

$k = 1,00$; 0,10 % — 0,85 %,

de unde rezultă că aproximația I este suficientă la determinarea săgeții în centrul plăcii cu deformații mari, aproximația a II-a reclamînd un volum mare de calcul.

2

I

laturi $k = \frac{a}{b}$; $a \leqslant b$

$k = 0{,}50$			$k = 0{,}75$			$k = 1{,}00$		
I	II		I	II		I	II	
$\frac{w_1}{h}$	x_1	x_2	$\frac{w_1}{h}$	x_1	x_2	$\frac{w_1}{h}$	x_1	x_2
8	9	10	11	12	13	14	15	16
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,163436	0,162748	0,000242	0,107397	0,107293	0,000155	0,066196	0,066172	0,000092
0,298346	0,295342	0,000513	0,205300	0,205834	0,000319	0,130308	0,130282	0,000186
0,404978	0,399133	0,000811	0,293221	0,292155	0,000498	0,190823	0,190835	0,000285
0,564398	0,553435	0,001449	0,434650	0,432143	0,000892	0,298754	0,298947	0,000494
0,820740	0,800565	0,003105	0,675389	0,669776	0,001980	0,503002	0,503872	0,001110
0,992363	0,966478	0,004743	0,839231	0,831398	0,003111	0,649011	0,650573	0,001773
1,125682	1,095171	0,006333	0,966048	0,956515	0,004239	0,763179	0,765299	0,002470
1,331851	1,294270	0,009365	1,161231	1,149166	0,006445	0,938944	0,942059	0,003867
1,492829	1,449773	0,012213	1,312798	1,298844	0,008569	1,074962	1,078918	0,005250

Folosind valorile din tabelul 3 s-a reprezentat grafic în figura 3 variația lui $\frac{w}{h}$ în centrul plăcii cu $\frac{pa^4}{hD}$ pentru diferite rapoarte $k =$

Tabelul 3

Cazul I

Variația lui $\frac{w}{h} = x_1 + x_2$

Nr. crt.	$\frac{pa^4}{hD}$	Raportul între laturi $k = \frac{a}{b}$, $a \leqslant b$					
		$k = 0{,}00$	$k = 0{,}25$	$k = 0{,}50$	$k = 0{,}75$	$k = 1{,}00$	
						Deform. mici	Deform. mari
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	1	0,234057	0,214016	0,162990	0,107448	0,066628	0,066264
3	2	0,386770	0,363809	0,295855	0,206153	0,133256	0,130468
4	3	0,494398	0,471937	0,399944	0,292653	0,199884	0,191120
5	5	0,647715	0,627071	0,554884	0,433035	0,333140	0,299446
6	10	0,890710	0,873047	0,803670	0,671756	0,666280	0,504982
7	15	1,055259	1,039226	0,971221	0,834509	0,999420	0,652353
8	20	1,183978	1,168999	1,101504	0,960754	0,332560	0,767769
9	30	1,384850	1,371207	1,303635	1,155611	1,998840	0,945926
10	40	1,543011	1,530218	1,461986	1,307413	2,665120	1,084168

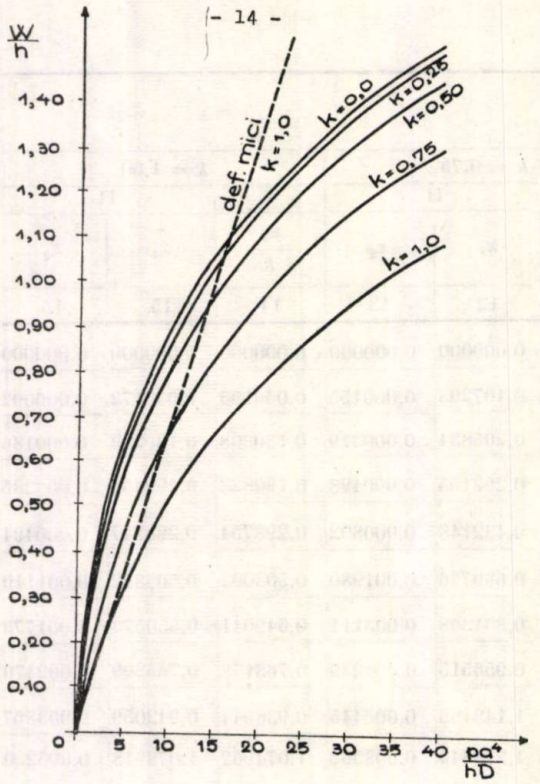


Fig. 3. — Variația lui $\frac{w}{h}$ în centrul plăcii articulate pe contur.

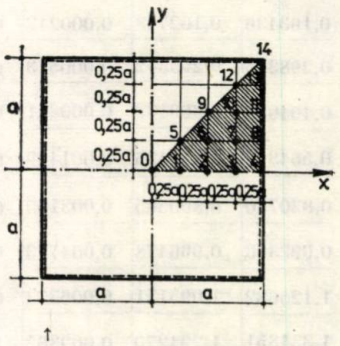


Fig. 4. — Rețeaua de puncte pentru placa patrată.

$= \frac{a}{b}$, pentru $k = 1$ trasîndu-se și dreapta corespunzătoare deformațiilor mici de unde se observă că dacă $\frac{w}{h} \leqslant \frac{1}{5}\left(\frac{pa^4}{hD} \leqslant 3\right)$ curba și dreapta se confundă fiind valabilă teoria deformațiilor mici, mai departe situîndu-se în domeniul deformațiilor mari în care, pentru calculul plăcilor trebuie aplicată teoria neliniară. De asemenea, apare evident sporul de rigiditate în cazul deformațiilor mari, deplasările rezultînd mai mici, de exemplu, dacă $\frac{pa^4}{hD} = 20$, $k = 1$, se obține o creștere a rigidității plăcii cu 42,4 %.

În continuare, pentru placa pătrată ($k = 1$) și $\frac{pa^4}{hD} = 20$ se calculează eforturile de membrană cu relațiile (13) și momentele încovoietoare și de torsiune cu relațiile (6) ținînd seama de expresiile deplasărilor u, v și w (17), (25) corespunzătoare aproximației I și respectiv a II-a, în punctele unei optimi din placă arătate în figura 4. Valorile sînt trecute comparativ în tabelul 4, iar eforturile de membrană calculate în aproximația a II-a sînt reprezentate în figura 5. Din analiza rezultatelor se desprind cîteva observații utile : în centrul plăcii, săgeata maximă este mai mare cu 0,6 % în cazul aproximației a II-a față de aproximația I, în

Tabelul 4

Cazul I,

$k = 1{,}00,\ \frac{pa^4}{hD} = 20$

Punct	$\frac{w}{h}$ Aproximația I	$\frac{w}{h}$ Aproximația II	Aproximația I N_x	Aproximația I N_y	Aproximația I N_{xy}	Aproximația II N_x	Aproximația II N_y	Aproximația II N_{xy}	Deformații mici $M_x = M_y$	Deformații mici M_{xy}	Aproxim. I. $M_x = M_y$	Aproxim. I. M_{xy}	Aproxim. II $M_x = M_y$	Aproxim. II M_{xy}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0,76323	0,76777	4,04818	4,04818	0,00000	4,03442	4,03442	0,00000	4,27434	0,00000	2,44815	0,00000	2,52608	0,00000
1	0,70512	0,70797	4,32791	3,91640	0,00000	4,38428	3,92442	0,00000	3,94893	0,00000	2,26177	0,00000	2,29517	0,00000
2	0,53968	0,53939	4,97249	3,49549	0,00000	5,07789	3,52020	0,00000	3,02238	0,00000	1,73108	0,00000	1,68535	0,00000
3	0,29207	0,29057	5,51651	2,73935	0,00000	5,50352	2,73173	0,00000	1,63570	0,00000	0,93685	0,00000	0,87351	0,00000
4	0,00000	0,00000	5,50986	1,65295	0,00000	5,40018	1,62005	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
5	0,65143	0,65356	4,04596	4,04596	0,45966	4,07180	4,07180	0,47945	3,64827	−0,33704	2,08958	−0,19304	2,10567	−0,22632
6	0,49859	0,49968	4,33698	3,29258	0,58613	4,37720	3,27624	0,57265	2,79225	−0,62277	1,59929	−0,35669	1,58433	−0,38273
7	0,26983	0,27022	4,55690	2,30215	0,25112	4,57026	2,28591	0,21293	1,51114	−0,81370	0,86553	−0,46604	0,84266	−0,45374
8	0,00000	0,00000	4,48395	1,34519	−0,38531	4,47450	1,34236	−0,38401	0,00000	−0,88076	0,00000	−0,50445	0,00000	−0,47036
9	0,38160	0,38387	2,80274	2,80274	0,73853	2,76352	2,76352	0,72006	2,13717	−1,15074	1,22404	−0,65909	1,48891	−0,68007
10	0,20652	0,20868	2,31291	1,26850	0,29122	2,35984	1,25896	0,27880	1,15659	−1,50352	0,66245	−0,86115	0,81144	−0,85309
11	0,00000	0,00000	2,11002	0,63300	−0,54494	2,22516	0,66754	−0,95430	0,00000	−1,62742	0,00000	−1,07282	0,00000	−0,90750
12	0,11177	0,11417	0,30598	0,30599	0,04258	0,34451	0,34451	0,06378	0,62592	−1,96445	0,35851	−1,12515	0,57376	−1,13382
13	0,00000	0,00000	0,07126	0,02140	−0,38531	0,14211	0,04265	−0,38401	0,00000	−2,12633	0,00000	−1,21787	0,00000	−1,23586
14	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	−2,30156	0,00000	−1,31823	0,00000	−1,36018
			Multiplicator $\frac{D}{a^2}$						Multiplicator $\frac{hD}{a^2}$					

timp ce eforturile de membrană N_x și N_y sînt mai mici cu 3,2%. Față de cazul deformațiilor mici, tot în centrul plăcii, momentele încovoietoare M_x și M_y sînt cu 40,9% mai mici.

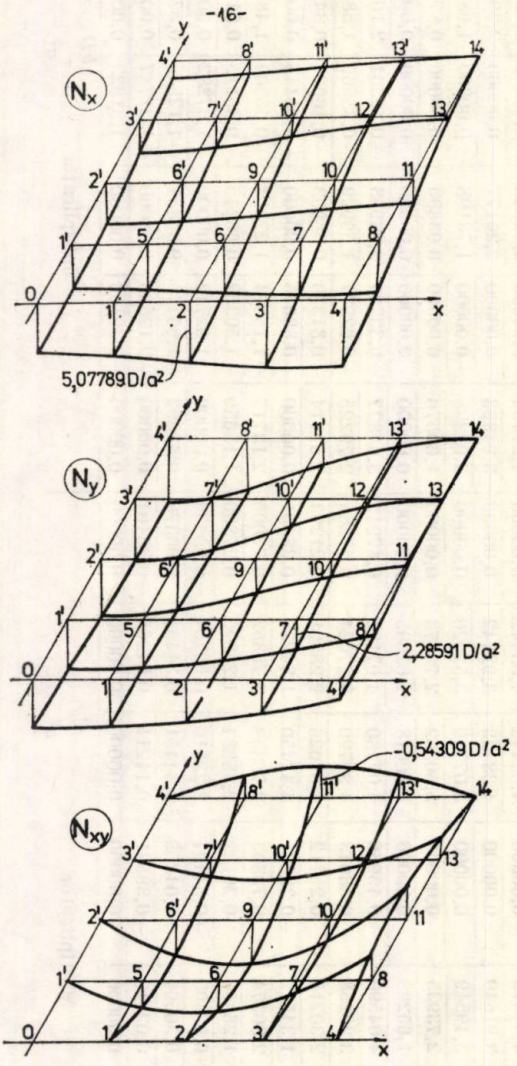


Fig. 5. — Eforturi de membrană la placa patrată articulată pe contur.

b) PLACĂ DREPTUNGHIULARĂ SIMPLU REZEMATĂ (REZEMATĂ MOBIL) PE CONTUR

Folosind iarăși metoda variațională Bubnov-Galerkin, se aleg în prima aproximație funcțiile $w(x, y)$ și $F(x, y)$ sub forma

$$w(x, y) = w_1 f_3(x, y) = w_1 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b},$$
$$F(x, y) = C f_3(x, y) = C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}, \tag{33}$$

satisfăcînd condițiile de contur

$$x = \pm a;\ w = 0,\ M_x = 0 \text{ și } N_x = h\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0,$$
$$y = \pm b;\ w = 0,\ M_y = 0 \text{ și } N_y = h\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0. \tag{34}$$

Constantele C și w_1 se vor determina încît funcțiile (33) să satisfacă relațiile (12) și (7) ținînd seama de ultima notație din (15), care în formă variațională se vor scrie

$$\int_S \left\{\nabla^4 F(x, y) - E\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]\right\} f_3(x, y)\,dx\,dy = 0,$$
$$\int_S \left[\nabla^4 w(x, y) - \frac{q(x, y)}{D}\right] f_3(x, y)\,dx\,dy = 0. \tag{35}$$

Din prima relație se obține

$$C = -0{,}54038\,\frac{k^2}{(1+k^2)^2}\,Ew_1^2 \tag{36}$$

și mai departe, din relațiile (11), eforturile de membrană ($\mu = 0{,}3$)

$$N_x = \frac{4}{3}\frac{D}{a^2}\left(\frac{w_1}{h}\right)^2 \frac{10{,}92\,k^4}{(1+k^2)^2}\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b},$$
$$N_y = \frac{4}{3}\frac{D}{a^2}\left(\frac{w_1}{h}\right)^2 \frac{10{,}92\,k^2}{(1+k^2)^2}\cos\frac{\pi x}{2a}\cos\frac{\pi y}{2b}, \tag{37}$$
$$N_{xy} = \frac{4}{3}\frac{D}{a^2}\left(\frac{w_1}{h}\right)^2 \frac{10{,}92\,k^3}{(1+k^2)^2}\sin\frac{\pi x}{2a}\sin\frac{\pi y}{2b}.$$

După efectuarea calculelor, cu noile notații

$$r = 0{,}05226\cdot\frac{(1+k^2)^4}{k^4},$$
$$s = -0{,}02087\cdot\frac{(1+k^2)^2}{k^4}\,\frac{pa^4}{hD} \tag{38}$$

și $k \neq 0$, relația a doua din (35) rezultă de forma ecuației (23) pentru care soluția reală este dată de (24), condiția $\Delta = r^3 + s^2 > 0$ fiind îndeplinită. Păstrînd expresia lui $F(x, y)$ din (33), se obține a doua aproximație considerînd iarăși pentru $w(x, y)$ forma (25). Prima relație din (35) conduce acum la expresia

$$C = -0{,}54038 \frac{k^2}{(1+k^2)^2} E(w_1^2 - 1{,}2\, w_1 w_2 + 6{,}94285\, w_2^2), \tag{39}$$

cu care se determină eforturile de membrană (11) în aproximația a doua

$$N_x = \frac{4}{3} \frac{k^4}{(1+k^2)^2} \frac{D}{a^2} m \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b},$$

$$N_y = \frac{4}{3} \frac{k^2}{(1+k^2)^2} \frac{D}{a^2} m \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}, \tag{40}$$

$$N_{xy} = \frac{4}{3} \frac{k^3}{(1+k^2)^2} \frac{D}{a^2} m \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{2b},$$

Tabelul

Cazul

Nr. crt.	$\frac{pa^4}{hD}$	Raportul între laturi $k = 0{,}25$			$k = 0{,}50$		
		I	II		I	II	
		$\frac{w_1}{h}$	x_1	x_2	$\frac{w_1}{h}$	x_1	x_2
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	1	0,274855	0,235604	0,000325	0,169592	0,169614	0,000240
3	2	0,546923	0,469698	0,000662	0,334658	0,334711	0,000512
4	3	0,813690	0,700865	0,001019	0,491751	0,491857	0,000842
5	5	1,323707	1,149675	0,001833	0,775725	0,776039	0,001718
6	10	2,427008	2,161847	0,004658	1,324492	1,325992	0,005021
7	15	3,305574	3,008380	0,008650	1,722025	1,725421	0,009294
8	20	4,021840	3,718555	0,013570	2,033911	2,039592	0,014043
9	30	5,147314	4,856775	0,025202	2,514786	2,525573	0,024150
10	40	6,023993	5,753875	0,038207	2,886901	2,903056	0,034526

unde

$$m = 10{,}92\, x_1^2 - 13{,}104 x_1 x_2 + 75{,}81592\, x_2^2, \tag{41}$$

iar

$$x_1 = \frac{w_1}{h} \quad \text{și} \quad x_2 = \frac{w_2}{h}.$$

Cu expresiile (40) ale eforturilor de membrană, ecuațiile variaționale (29) ne dau următorul sistem de două ecuații neliniare de gradul trei în x_1 și x_2

$$\begin{aligned} &x_1^3 - 1{,}8\, x_1^2 x_2 + 7{,}66285\, x_1 x_2^2 - 4{,}16571\, x_2^3 + 0{,}15680 \frac{(1+k^2)^4}{k^4}\, x_1 = \\ &\qquad = 0{,}04175 \frac{(1+k^2)^2}{k^4} \frac{pa^4}{hD}, \\ &-x_1^3 + 12{,}77144 x_1^2 x_2 - 20{,}82859\, x_1 x_2^2 + 80{,}33884\, x_2^3 + \\ &\qquad + 21{,}16819 \frac{(1+k^2)^4}{k^4}\, x_2 = 0{,}00773 \frac{(1+k^2)^2}{k^4} \frac{pa^4}{hD}. \end{aligned} \tag{42}$$

5

II

$k = \frac{a}{b}$, $a \leqslant b$, $k \neq 0$

$k = 0{,}75$			$k = 1{,}00$		
I	II		I	II	
$\frac{w_1}{h}$	x_1	x_2	$\frac{w_1}{h}$	x_1	x_2
8	9	10	11	12	13
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,108615	0,108627	0,000153	0,066440	0,066449	0,000092
0,214745	0,214775	0,000323	0,132195	0,132213	0,000189
0,316420	0,316480	0,000526	0,196643	0,196673	0,000296
0,502328	0,502503	0,001057	0,319757	0,319828	0,000551
0,868601	0,869467	0,003070	0,585548	0,585865	0,001487
1,137453	1,139462	0,005718	0,796747	0,797540	0,002800
1,349271	1,352688	0,008694	0,968743	0,970197	0,004368
1,676375	1,682932	0,015092	1,238828	1,241951	0,007938
1,929543	1,939572	0,021710	1,449147	1,454187	0,011802

BIBLIOTECA INSTITUTULUI POLITEHNIC BUCUREȘTI 1343

Tabelul 6

Cazul II

Variația lui $\frac{w}{h} = x_1 + x_2$

Nr. crt.	$\frac{pa^4}{hD}$	Raportul între laturi $k = \frac{a}{b}$, $a \leqslant b$				
		$k = 0{,}25$	$k = 0{,}50$	$k = 0{,}75$	$k = 1{,}00$	
					Deformații mici	Deformații mari
1	0	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
2	1	0,235929	0,169854	0,108780	0,066656	0,066541
3	2	0,470360	0,335223	0,215098	0,133312	0,132402
4	3	0,701884	0,492699	0,317006	0,199968	0,196969
5	5	1,151508	0,777757	0,503560	0,333280	0,320379
6	10	2,106505	1,331013	0,872537	0,666560	0,587352
7	15	3,017030	1,734715	1,145180	0,999840	0,800340
8	20	3,732125	2,053635	1,361382	1,333120	0,974565
9	30	4,881977	2,549723	1,698084	1,999680	1,249889
10	40	5,792082	2,937582	1,961282	2,666240	1,465989

Tabelul

Cazul

k =1,00

Punct	$\frac{w}{h}$		Aproximația I		Aproximația II	
	Aproximația I	Aproximația II	$N_x = N_y$	N_{xy}	$N_x = N_y$	N_{xy}
0	1	2	3	4	5	6
0	0,96885	0,97456	3,41676	0,00000	3,37217	0,00000
1	0,89509	0,89800	3,15664	0,00000	3,11544	0,00000
2	0,68507	0,68293	2,41599	0,00000	2,38446	0,00000
3	0,37076	0,36724	1,30752	0,00000	1,29046	0,00000
4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
5	0,82694	0,82873	2,91637	0,50035	2,87830	0,49382
6	0,63291	0,63261	1,23205	0,92454	2,20290	0,91247
7	0,34252	0,34146	1,20799	1,20799	1,19220	1,19220
8	0,00000	0,00000	0,00000	1,30752	0,00000	1,29046
9	0,48442	0,48725	1,70838	1,70838	1,68608	1,68608
10	0,26216	0,26536	0,92454	2,23205	0,91247	0,20293
11	0,00000	0,00000	0,00000	2,41599	0,00000	2,38446
12	0,14187	0,14579	0,50035	2,91637	0,49382	2,87830
13	0,00000	0,00000	0,00000	3,15664	0,00000	3,11544
14	0,00000	0,00000	0,00000	3,41676	0,00000	3,37217

Multiplicator $\frac{D}{a^2}$

Soluțiile ecuației (23) date de relația (24) considerînd notațiile (38) și ale sistemului (42) găsite pe baza algoritmului prezentat în relațiile (31) și (32) la calculatorul FELIX C-256 pentru $0 < \frac{pa^4}{hD} \leqslant 40$ și diferite rapoarte între laturi (k), sînt trecute în tabelul 5. Din analiza soluțiilor obținute cu cele două aproximații se constată că în centrul plăcii valorile $\frac{w}{h}$ prezintă diferențe mai mari (14,16 % — 3,85 %) la plăcile cu $k = 0{,}25$, scăzînd la (0,15 % — 1,72 %) și (0,15 % — 1,62 %) pentru $k = 0{,}50$ respectiv $k = 0{,}75$ și la (0,15 % — 1,15 %) în cazul plăcii pătrate ($k = 1$).

Folosind valorile $\frac{w}{h}$ date de aproximația a doua, trecute în tabelul 6, s-au trasat curbele din figura 6 rezultînd, pentru $\frac{pa^4}{hD} = 20$ și $k = 1$, o creștere a rigidității plăcii față de cazul deformațiilor mici numai cu 26,9 % și, de asemenea, dacă $\frac{w}{h} \geqslant \frac{1}{5}\left(3 \leqslant \frac{pa^4}{hD} \leqslant 40\right)$, necesitatea calculului neliniar al plăcilor.

7

II

$\frac{pa^4}{hD} = 20$

Deformații mici		Aproximația I		Aproximația II	
$M_x = M_y$	M_{xy}	$M_x = M_y$	M_{xy}	$M_x = M_y$	M_{xy}
7	8	9	10	11	12
4,27614	0,00000	3,10770	0,00000	3,23811	0,00000
3,95059	0,00000	2,87111	0,00000	2,92335	0,00000
3,02365	0,00000	2,19745	0,00000	2,11135	0,00000
1,63639	0,00000	1,18925	0,00000	1,07441	0,00000
0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
3,64981	−0,33719	2,65251	−0,24505	2,67467	−0,30333
2,79343	−0,62301	2,03013	−0,45279	1,99887	−0,49777
1,51178	−0.81405	1,09869	−0.59160	1,05567	−0,56843
0,00000	−0,88113	0,00000	−0.64036	0,00000	−0,57853
2,13807	−1,15123	1,55385	−0,83666	1,61900	−0,87176
1,15708	−1,50416	0,84091	−1,09315	0,92444	−1,07631
0,00000	−1,62811	0,00000	−1,18323	0,00000	−1,13688
0,62619	−1,96528	0,45509	−1,42827	0,56335	−1,44026
0,00000	−2,12723	0,00000	−1,54597	0,00000	−1,57410
0,00000	−2,30253	0,00000	−1,67337	0,00000	−1,74359

Multiplicator $\frac{hD}{a^2}$

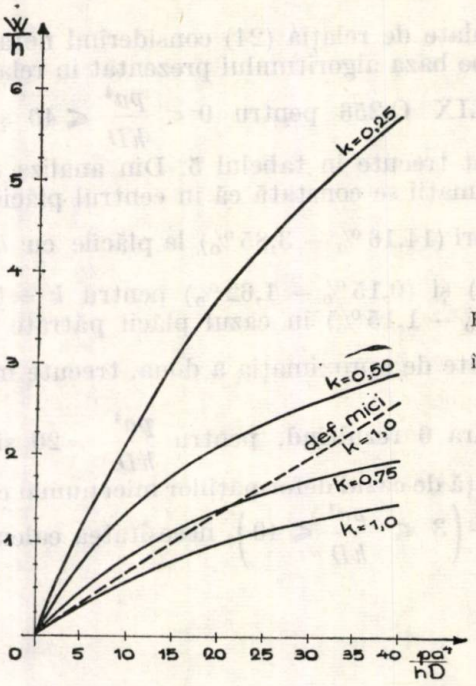


Fig. 6 — Variația lui $\frac{w}{h}$ în centrul plăcii simplu rezemate pe contur.

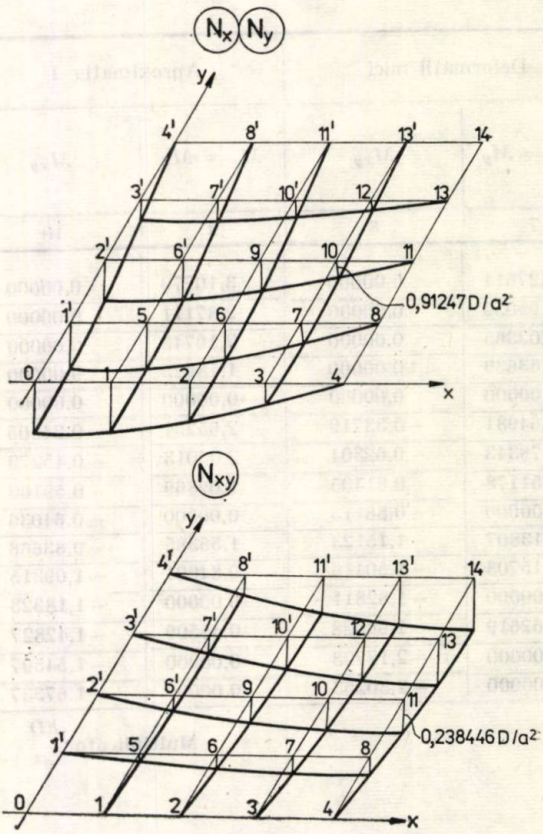


Fig. 7 — Eforturi de membrană la placa patrată simplu rezemată pe contur.

Folosind relațiile (37) și (40) pentru eforturile de membrană N_x, N_y, N_{xy} și relațiile (6) pentru momentele încovoietoare și de torsiune M_x, M_y, M_{xy}, s-a întocmit tabelul 7, valorile corespunzînd punctelor unei optimi din placa pătrată ($k = 1$ și $\frac{pa^4}{hD} = 20$) (fig. 4). Eforturile de membrană calculate în aproximația a doua s-au reprezentat grafic în figura 7. Comparativ, s-au determinat și solicitările M_x, M_y, M_{xy} în cazul deformațiilor mici în aceleași puncte ale plăcii. În centrul plăcii, $\frac{w}{h}$ este mai mare cu numai 0,58 % în aproximația a doua față de aproximația întîia, N_x și N_y sînt mai mici cu 1,3 %, iar momentele încovoietoare M_x și M_y sînt mai mari cu 4,2 % și mai mici cu 24,3 % față de valorile obținute prin calculul liniar.

3. CONCLUZII

Considerarea deformațiilor din suprafața mediană a plăcii cauzate de încărcările exterioare transversale transformă problema rezolvării unei plăci plane într-o problemă neliniară în care prezența eforturilor de membrană implică satisfacerea unor condiții de rezemare diferite după cum placa este articulată sau simplu rezemată pe contur, asociate, în primul caz, rezolvării a trei ecuații diferențiale cu derivate parțiale neliniare (16) și, respectiv, a două ecuații diferențiale cu derivate parțiale neliniare (12), (7), în cel de-al doilea caz. Astfel, sarcina exterioară urmează să se transmită reazemelor parțial prin rigiditatea la încovoiere și parțial prin rigiditatea extensională a plăcii. Pe de altă parte, acțiunea eforturilor de membrană determină mărirea rigidității plăcii dacă $\frac{pa^4}{hD} > 3$, față de cazul deformațiilor mici, mai pronunțat în ipoteza rezemării fixe pe contur, eforturile fiind mai mari. Așadar, exprimarea frecvent întîlnită în literatura tehnică de specialitate „plăci cu deformații mari" nu se referă la deplasările transversale ale plăcii, acestea fiind mai mari în ipoteza deformațiilor mici, ci la considerarea în formulele deformațiilor specifice și a termenilor neliniari (8). Momentele încovoietoare și de torsiune la plăcile cu deformații mari sînt mai mici decît cele determinate în ipoteza deformațiilor mici, diferență apreciabilă în cazul rezemării fixe pe contur. Comparînd valorile solicitărilor M_x, M_y și M_{xy} din coloanele 9 și 10 ale tabelului 4 cu cele din coloanele 7 și 8 ale tabelului 7, se observă că acestea sînt aproximativ egale, ceea ce înseamnă că în cazul deformațiilor mici nu are importanță modul de rezemare a plăcii, fix sau mobil, pe contur, eforturile de membrană lipsind. Dat fiind volumul mare de calcul reclamat de aproximația a doua în raport cu diferențele mici între rezultatele obținute pe baza celor două aproximări, considerăm aproximația întîia suficientă.

Aprecierea comportării plăcilor plane sub acțiunea sarcinilor exterioare printr-un calcul neliniar este mai riguroasă, în limitele celorlalte ipoteze utilizate, conducînd la o proiectare mai rațională a acestor elemente de construcții.

Primită la redacție la 20 martie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. N. Beschea, *Rezistența materialelor* — capitole speciale, București, E.D.P., 1971.
2. V. Ille, *Contribuții la studiul plăcilor plane oblice izotrope în domeniul elastic*, Teză de doctorat, București, Institutul de construcții, 1966.
3. А. Ф. Смирнов, *К определению больших прогибов прямоугольной пластинки переменной толщины*, Москва, Строительная механика, Выпуск 274, 1968.
4. S. P. Timoshenko, M. J. Gere, *Theory of elastic stability*, New York-Toronto-London, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1961.
5. S. P. Timoshenko, S. Woinovsky,-Krieger, *Theory of plates and shells*, New-York-Toronto-London, McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959.
6. А. С. Вольмир, *Гибкие пластинки и оболочки*, Москва, Гостехтеориздат, 1956.
7. M. Soare, *Valoarea plăcilor plane tratată ca problemă de deformații mari*, St. cerc. mec. apl. **37**, *4* (1978).
8. V. Ille, I. Marțian, I. Magyarosy, *Studiul experimental al stării de eforturi și deformații la plăcile plane cu deformații mari folosind criterii de similitudine în modelare*, Primul simpozion național de tensometrie, Iași 1977, Lucrările simpozionului, vol. 3.

MULTIPOLI DINAMICI CU ELEMENTE RIGIDE

de MIHAI BUCULEI, DAN BAGNARU
Universitatea din Craiova

Se dă la început o metodă matriceală generală pentru analiza dinamică a mecanismelor plane cu un singur grad de libertate. Se prezintă sistematizat modul de calcul al energiei cinetice a lanțului cinematic pentru diferite tipuri de conexiuni ale multipolilor cinematici. Se introduce noțiunea de multipol dinamic și i se dă o interpretare în contextul teoriei sistemelor.

1. INTRODUCERE

Lucrarea dă o generalizare și extindere a metodei matriceale de analiză dinamică, prezentată pentru o serie de multipoli cu elemente rigide în [2, 3]. Noțiunea de multipol dinamic, introdusă în lucrare, permite o interpretare mai intimă a transmiterii informațiilor de mișcare pentru lanțul cinematic plan. Folosirea formalismului matriceal este adecvată pentru utilizarea în practică a calculatorului numeric.

2. METODA MATRICEALĂ DE ANALIZĂ DINAMICĂ

Fie $\mathfrak{L}$ mulțimea lanțurilor cinematice fundamentale plane cu elemente rigide. Fie $L \in \mathfrak{L}$, un lanț cinematic oarecare.

Fie $K_1, K_2, \ldots, K_n$ elementele lanțului L care au mișcări de translație și fie punctele $M_1, M_2, \ldots, M_n$ aparținînd respectiv acestor elemente.

Fie $I_1, I_2, \ldots, I_p$ elementele lanțului L care au mișcări de rotație și fie $O_1, O_2, \ldots, O_p$ centrele de rotație respective.

Fie $S_1, S_2, \ldots, S_j$ elementele lanțului L care au mișcări plan-paralele și fie $G_{s_1}, G_{s_2}, \ldots, G_{s_j}$ centrele de masă ale elementelor respective.

Se consideră un reper cartezian fix $x\,O\,y$ în planul lanțului L.

Se fac următoarele notații:

m_{k_r}, $r = \overline{1, n}$ — masa elementului K_r;

m_{s_q}, $q = \overline{1, j}$ — masa elementului S_q;

J_{o_t}, $t = \overline{1, p}$ — momentul de inerție al elementului l_t în raport cu punctul O_t;

J_{G_v}, $v = \overline{1, j}$ — momentul de inerție al elementului S_v în raport cu centrul său de masă G_{s_v};

$$M_i(x_{k_i}; y_{k_i}),\ i = \overline{1, n}; \qquad G_{s_v}(x_{s_v}; y_{s_v}),\ v = \overline{1, j};$$

ω_{l_t}, $t = \overline{1, p}$ — viteza unghiulară absolută instantanee a elementului l_t;

ω_{s_q}, $q = \overline{1, j}$ — viteza unghiulară absolută instantanee a elementului S_q;

Se introduce matricea diagonală de inerție

$$(M) = \text{diag}[m_{k_1};\ m_{k_1};\ m_{k_2};\ m_{k_2};\ \ldots\ m_{k_n};\ m_{k_n};\ m_{s_1};\ m_{s_1};\ \ldots \tag{1}$$

$$\ldots;\ m_{s_j};\ m_{s_j};\ J_{O_1};\ J_{O_2};\ \ldots;\ J_{O_p};\ J_{G_1};\ \ldots;\ J_{G_j}]$$

și vectorul

$$(V) = (\dot{x}_{k_1};\ \dot{y}_{k_1};\ \ldots;\ \dot{x}_{k_n};\ \dot{y}_{k_n};\ \dot{x}_{s_1};\ \dot{y}_{s_1};\ \ldots\ \dot{x}_{s_j};\ \dot{y}_{s_j}; \tag{2}$$

$$\omega_{l_1};\ \omega_{l_2};\ \ldots;\ \omega_{l_p};\ \omega_{s_1};\ \ldots;\ \omega_{s_j})^{(t)},$$

simbolul (t) însemnînd „transpus".

Energia cinetică a lanțului L este atunci

$$T = \frac{1}{2}(V)^{(t)} \cdot (M) \cdot (V). \tag{3}$$

Fie un mecanism plan cu un singur grad de mobilitate și fie φ coordonata lagrangiană atașată elementului conducător, presupus legat de bază. Fie L lanțul cinematic obținut prin eliminarea elementului conducător.

Fie

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{m}{2} & \text{dacă elementul conducător are mișcare de translație} \\ & (m - \text{masa sa}); \\ \dfrac{J_0}{2} & \text{dacă elementul conducător are mișcare de rotație } (J_0 - \\ & - \text{momentul său de inerție în raport cu cupla } R \text{ care-l} \\ & \text{leagă de bază}; \end{cases}$$

Presupunînd lanțul L decompozabil în grupe assurice interpretate ca multipoli cinematici [1, 2, 3, 4, 5] se poate scrie

$$(V) = (\tilde{V})\,\dot{\varphi}, \tag{4}$$

unde vectorul $(\tilde{V})$ se obține ușor în urma unei analize poziționale și a cunoașterii tipurilor de conexiuni ale multipolilor cinematici. Pentru cazuri concrete se poate cerceta [2, 3].

Energia cinetică a mecanismului la $\forall t > t_0$ este

$$T(t) = \alpha(\dot{\varphi})^2 + \frac{(\dot{\varphi})^2}{2}[(\tilde{V})^{(t)} \cdot (M)(\tilde{V})], \tag{5}$$

Se consideră cîmpul forțelor exterioare date $\overline{F_i}$, $i = \overline{1, n}$, efectiv aplicate mecanismului, ca fiind un cîmp conservativ și fie $U(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ funcția de forță atașată, notîndu-se cu $P_i(x_i; y_i)$, $i = \overline{1, n}$, punctul de aplicație al forței $\overline{F_i}$, astfel că $\overline{F_i} = \nabla_i U$.

Folosind teorema energiei aplicată întregului mecanism se poate scrie

$$\left\{\alpha + \frac{1}{2}[(\tilde{V})^{(t)}(M)(\tilde{V})]\right\}(\dot{\varphi})^2 = T_0 - U_0 + U(\varphi), \tag{6}$$

unde T_0, U_0 sînt energia cinetică și respectiv funcția de forță la momentul inițial t_0.

Notînd

$$\Phi(\varphi) = \left\{\frac{T_0 - U_0 + U(\varphi)}{\alpha + \frac{1}{2}[(\tilde{V})^{(t)}(M)(\tilde{V})]}\right\}^{1/2}, \tag{7}$$

se obține mișcarea din ecuația

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Phi(\varphi)} = t - t_0. \tag{8}$$

Folosirea formalismului matriceal,. a relațiilor intrare-ieșire pentru fiecare multipol cinematic și a conexiunilor de multipoli permite scrierea rapidă a funcției $\Phi(\varphi)$. Avantajul metodei constă în aceea că elimină calculul momentului de inerție redus, al forței și momentului redus. Pentru detalii pe cazuri particulare se poate cerceta [2, 3].

3. CONEXIUNI

Fiecărui multipol cinematic tip grupă assurică i se poate atașa o matrice de inerție (M), un vector viteză de ieșire (V) și un vector viteză de intrare $(\tilde{v})$. Se consideră cazul general cînd toate elementele multipolului au mișcări plan-paralele, cazul unor mișcări particulare obținîndu-se prin anularea elementelor corespunzătoare din (M), (V) și $(\tilde{v})$.

Fie $G_k(x_{G_k}; y_{G_k})$, $k = \overline{1, n}$ centrele de masă ale elementelor multipolului cinematic și fie ω_k, $k = \overline{1, n}$ vitezele unghiulare absolute instantanee ale acestora.

Punem

$$(V) = (\dot{x}_{G_1}; \quad \dot{y}_{G_1}, \ldots; \dot{x}_{G_n}; \quad \dot{y}_{G_n})^{(t)},$$

$$(\omega) = (\omega_1, \omega_2; \ldots; \omega_n)^{(t)}.$$

Fie relațiile intrare-ieșire :

$$(V) = (M_G)(\tilde{v}); \quad (\omega) = (M_\omega)\ (\tilde{v}), \tag{9}$$

forma concretă a matricelor de transfer fiind legată de tipul de multipol considerat.

Relațiile intrare-ieșire (9) pot fi scrise condensat sub forma

$$(V) = (\tilde{M})(v), \tag{10}$$

unde

$$(\tilde{M}) = \left[\begin{array}{c|c} (M_G) & (0) \\ \hline (0) & (M_\omega) \end{array}\right], \quad (v) = ((\tilde{v}) \mid (\tilde{v}))^{(t)}.$$

Matricea de inerție atașată multipolului fiind

$$(M) = \text{diag}\,[m_1; m_1; \ldots; m_r; m_r; J_{G_1} \ldots; J_{G_n}], \tag{11}$$

cu notațiile cunoscute, energia cinetică a acestuia este

$$T(t) = \frac{1}{2}\,(v)^{(t)} \cdot (N)(v),$$

unde

$$(N) = (\tilde{M})^{(t)}(M)(\tilde{M}). \tag{12}$$

Se prezintă mai jos energia cinetică pentru cîteva tipuri de conexiuni de multipoli.

a) Conexiunea serie (fig. 1)

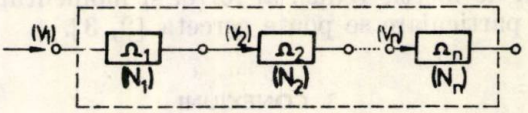


Fig. 1

Fie M_{jv} matricele de transfer pentru viteze ale obiectelor Ω_j ale conexiunii.

Energia cinetică a conexiunii este

$$T(t) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (v_i) \cdot (N_i) \cdot (v_i) = \frac{1}{2}\,(v_1)^{(t)} \cdot (M^*)(v_1), \tag{13}$$

unde

$$(M^*) = N_1 + \sum_{j=1}^{n}\left[\prod_{j=1}^{i-1}(M_{jv})^{(t)}\right](N_i)\left[\prod_{j=n-1}^{1}(M_{jv})\right]. \tag{14}$$

b) Conexiunea derivaţie (produs direct de multipoli) (fig. 2)
Energia cinetică a conexiunii este

$$T(t) = \frac{1}{2}(v)^{(t)} \cdot (M^*)(v), \tag{15}$$

unde

$$(v) = ((v_1)|(v_2)|\ldots|(v_n))^{(t)}$$

$$(M^*) = \left[\begin{array}{c|c|c|c} (N_1) & (0) & \cdots & (0) \\ \hline (0) & (N_2) & \cdots & (0) \\ \hline \vdots & & & \vdots \\ \hline (0) & (0) & & (N_n) \end{array}\right].$$

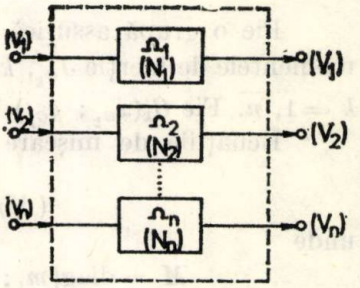


Fig. 2

c) Conexiunea mixtă a doi multipoli (fig. 3).
Vectorii (V_1) şi (V_2) conţin componentele pe axe ale vitezelor centrelor de masă ale elementelor multipolilor Ω_1 şi Ω_2.
Fie vectorul (ω), care conţine vitezele unghiulare absolute ale elementelor multipolilor.
Se poate scrie

$$(V) = \left[\begin{array}{c|c} (M_{11}) & (0) \\ \hline (M_{21})\,(M_{12}) & (M_{22}) \end{array}\right] \cdot [v],$$

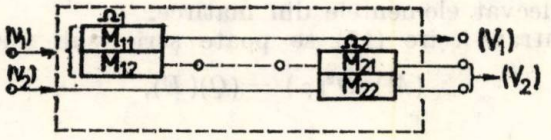


Fig. 3

unde

$$(V) = ((V_1)|(V_2))^{(t)}; \quad (v) = ((v_1)|(v_2))^{(t)}.$$

Analog,

$(\omega) = (M_\omega)(v)$, matricea (M_ω) fiind dată în [4].

Energia cinetică a conexiunii este

$$T(t) = \frac{1}{2}(v^*)^{(t)} \cdot (M^*)(v^*), \tag{16}$$

unde

$$(v^*) = ((v)|(v))^{(t)},$$

$(M^*) = (\widetilde{M})^{(t)} \cdot (M)(\widetilde{M}) = (N)$, dată anterior.

Analog, se determină formule de calcul pentru energia cinetică la alte tipuri de conexiuni. Acest mod de calcul este convenabil la mecanisme cu lanțuri cinematice complexe.

4. MULTIPOLI DINAMICI CU ELEMENTE RIGIDE

Fie o grupă assurică cu n elemente cu masele m_k, $k = \overline{1, n}$ și cu momentele de inerție J_{G_k}, $k = \overline{1, n}$ în raport cu centrele lor de masă G_k, $k = \overline{1, n}$. Fie $G_k(x_{G_k}; y_{G_k})$ în raport cu un reper cartezian.

Ecuațiile de mișcare ale elementelor duc la relația intrare-ieșire

$$(M)D^2(\rho) = (F) + (P)(R), \tag{17}$$

unde

$$M = \text{diag}[m_1; m_1; \ldots; m_n; m_n; J_{G_1}; \ldots J_{G_n}];$$

(F) — un vector care conține componentele pe axe ale forțelor exterioare date și momentele exterioare;

(P) — o matrice funcție de poziția grupei assurice

(R) — un vector care conține componentele pe axe ale forțelor de legătură

$$(\rho) = (x_{G_1}; y_{G_1}; \ldots; x_{G_n}; y_{G_n}; \varphi_1; \ldots; \varphi_n)^{(t)}; \quad D(\cdot) = \frac{\mathrm{d}(\cdot)}{\mathrm{d}t}; \quad \dot{\varphi}_k = \omega_k.$$

S-a presupus că toate elementele grupei assurice au mișcări plan-paralele. În cazul cînd unele elemente au mișcări de rotație sau translație se vor anula adecvat elementele din matirce.

Relația intrare-ieșire (17) se poate scrie sub forma echivalentă

$$(M) \cdot D^2(\rho) = (Q)(E), \tag{18}$$

unde

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} (I) & (0) \\ \hline (0) & (P) \end{array}\right]; \quad (E) = ((F) | (R))^{(t)}; \quad (I) \text{ — matricea unitate.}$$

Se introduce ca vector de intrare (E) și ca vector de ieșire (ρ), grupa assurică devenind, în virtutea lui (18), un sistem liniar integrator, transmițător al informației de mișcare. Pentru diferite grupe assurice forma concretă a matricelor se obține cu ușurință. Obținem astfel un multipol dinamic.

Dacă se notează $(X_1)_t = (\rho)$; $(X_2)_t = D(\rho)$, atunci vectorul normal de stare atașat sistemului (18) (vectorul de fază) este

$$(X_t) = ((X_1)_t \mid (X_2)_t)^{(t)}.$$

Ecuațiile normale de stare sînt

$$\begin{aligned} D(X_1)_t &= (X_2)_t, \\ D(X_2)_t &= (M)^{-1}(Q)(E). \end{aligned} \tag{19}$$

Se poate continua descrierea sistemică în forma tradițională. O dificultate o constituie desigur varianța în timp a multipolului dinamic.

Exemplu DIADA RRR multipol dinamic (fig. 4)

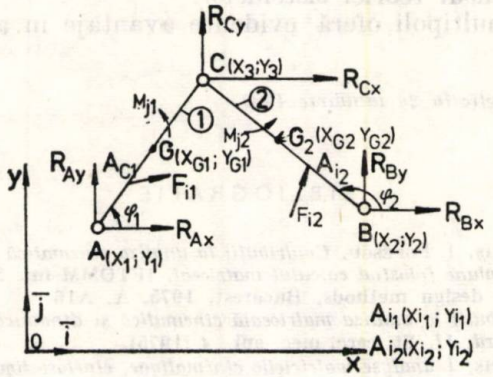


Fig. 4

Fie

$$\bar{F}_{i_1} = X_{i_1}\bar{i} + Y_{i_1}\bar{j},$$

$$\bar{F}_{i_2} = X_{i_2}\bar{i} + Y_{i_2}\bar{j}.$$

În acest caz matricele adoptate sînt

$$(M) = \operatorname{diag}[m_1;\ m_1;\ m_2;\ m_2;\ J_{G_1};\ J_{G_2}];$$

$$(\rho) = (x_{G_1};\ y_{G_1};\ x_{G_2};\ y_{G_2};\ \varphi_1;\ \varphi_2)^{(t)},$$

$$(F) = (\sum_{(i_1)} X_{i_1};\ \sum_{(i_1)} Y_{i_1};\ \sum_{(i_2)} X_{i_2};\ \sum_{(i_2)} Y_{i_2};\ \sum_{i_1} [(x_{i_1} - x_{G_1})Y_{i_1} - (y_{i_1} - y_{G_1})X_{i_1}]\ +$$

$$+ \sum_{(j_1)} M_{j_1};\ \sum_{(i_2)} [(x_{i_2} - x_{G_2})Y_{i_2} - (y_{i_2} - y_{G_2})X_{i_2}] + \sum_{(j_2)} M_{j_2})^{(t)}$$

$$(P) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -(y_1 - y_{G_1}); & x_1 - x_{G_1}; & 0 & 0 & -(y_3 - y_{G_1}); & (x_3 - x_{G_1}) \\ 0 & 0 & -(y_2 - y_{G_2}); & (x_2 - x_{G_2}); & (y_3 - y_{G_2}); & -(x_3 - x_{G_2}) \end{bmatrix};$$

$$(R) = (R_{Ax};\ R_{Ay};\ R_{Bx};\ R_{By};\ R_{Cx};\ R_{Cy})^{(t)}.$$

5. CONCLUZII

Descrierea matriceală și relațiile intrare-ieșire ce se pot introduce dau o imagine sugestivă a legăturilor cauzale și permit o interpretare a multipolilor în sensul teoriei sistemelor.

Lucrul pe multipoli oferă evidente avantaje în automatizarea calculelor.

Primită la redacție la 26 ianuarie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. M. Buculei, S. Mițiș, I. Popescu, *Contribuții la analiza cinematică și cinetostatică a mecanismelor plane folosind calculul matriceal*, IFTOMM int. Symp. in linkages and computer design methods, Bucarest, 1975, A, A16.
2. M. Buculei, *Contribuții la analiza matriceală cinematică și dinamică a grupei Assur de cl. a IV-a, ord. II*, St. cerc. mec. apl., *4* (1975).
3. M. Buculei, S. Mițis, *L'analyse matricielle cinématique, cinétostatique et dynamique des mécanismes plans de III^{-e} famille, III^{-e} classe*, Rév. Roum. Sci. Techn., — Méc. Appl., *2* (1977).
4. M. Buculei, S. Mițiș, *h'analyse matricielle thérmocinématique et dynamique des chaines cinématiques plans à deux dégrès de mobilité*, Comunicările celui de al V-lea congres Mondial TMM, Montreal, 1979.
5. Chr. Pelecudi, *Kinem atic multipoles with rigid links*, Rev. Roum. Sci. Tech., — Méc. Appl., **13**, *5* (1968).
6. Chr. Pelecudi, *Precizia mecanismelor*, Edit. Academiei, București, 1975.

ASPECTE ALE INFLUENȚEI DURITĂȚII ASUPRA COEFICIENTULUI DE FRECARE USCATĂ, LA O CUPLĂ DE TIP TIMKEN, MATERIAL PLASTIC ARMAT CU FIBRE DE STICLĂ/OȚEL

de LUCIAN CĂPITANU
Institutul de fizica și tehnologia materialelor

Materialele termoplastice armate cu fibre de sticlă au căpătat în ultimul timp o largă răspîndire, putînd fi utilizate în diverse domenii. Unul din acestea îl constituie construcția de mașini, unde materialele termoplastice dau bune rezultate ca înlocuitori ai metalului la confecționarea unor organe de mașini. Această nouă utilizare este datorată unora dintre calitățile acestor materiale, cum ar fi greutatea specifică redusă, rezistența mecanică satisfăcătoare, posibilitățile sporite de lucru în mediu coroziv, buna comportare la frecare și uzare etc. În cadrul prezentei lucrări sînt abordate o serie de aspecte privind comportarea în regim de frecare uscată a cuplelor de tip Timken, material plastic armat cu fibre de sticlă/oțel.

1. INTRODUCERE

Studierea comportării la frecare a cuplei material termoplastic armat cu fibre de sticlă/oțel, prezintă o importanță deosebită, putînd oferi indicații importante asupra domeniului de utilizare a cuplei respective.

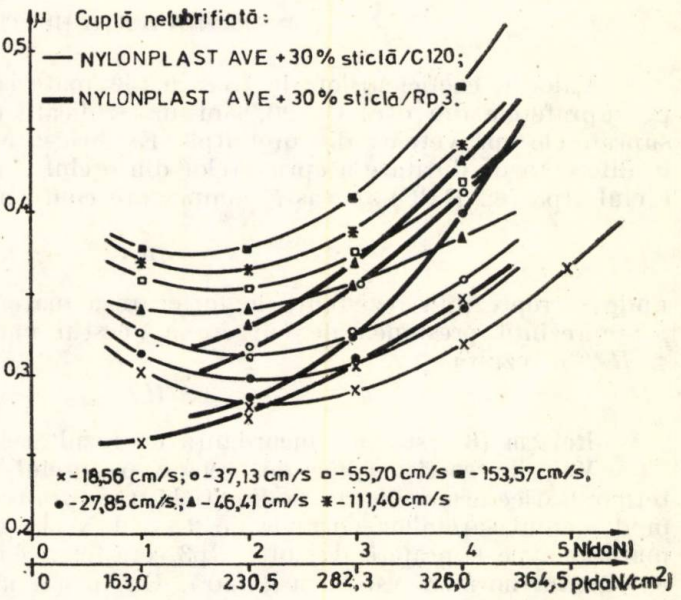


Fig. 1. — Influența sarcinii normale asupra variației coeficientului de frecare al cuplei Nylonplast AVE + 30 % sticlă/oțel.

În figura 1 este prezentată în influența sarcinii asupra variației coeficientului de frecare al cuplei poliamidă Nylonplast AVE +30 % sticlă/oțel. Diagrama permite să se observe creșterea coeficientului de frecare cu creșterea sarcinii normale aplicate cuplei, și cu creșterea vitezei relative de alunecare. Variația coeficientului de frecare cu sarcina nominală, nu este liniară. Pot fi considerate în acest caz relații de variație ale forței de frecare funcție de sarcina aplicată, de forma

$$F_f = aN + bN^n, \tag{1}$$

sau mai simplu

$$F_f = a + bN \tag{2}$$

sau

$$F_f = a + bN^x. \tag{3}$$

Ultimele relații duc la concluzia că atunci cînd forța nominală este egală cu zero, forța de frecare are o valoare diferită de zero ($F_f = a$). Deși acest lucru s-ar putea explica prin existența unei forțe de adeziune a celor două suprafețe, remanentă după înlăturarea sarcinii normale, considerăm totuși mai corectă utilizarea unei relații de forma

$$F_f = kN^n, \tag{4}$$

în care n este subunitar. Această relație este în concordanță cu rezultatele prezentate în figura 1, deși n nu este același pentru toate tipurile de materiale termoplastice.

2. INFLUENȚA DURITĂȚII

Valorile coeficienților de frecare ale materialelor plastice armate, pe suprafețele din oțel C 120, sînt mai ridicate decît cele obținute pe suprafețele epruvetelor din oțel Rp3. Explicația acestui fenomen constă în diferența de duritate a epruvetelor din oțelul C 120 (59 HRC), față de oțelul Rp3 (62 HRC). Această comportare confirmă relația

$$\mu = \tau_r / p_c, \tag{5}$$

unde τ_r reprezintă rezistența la forfecare a materialului mai moale, iar p_c reprezintă presiunea de curgere a acestui material. Deoarece $p_c \cong HB/3$, rezultă

$$\mu = 3\tau_r / HB. \tag{6}$$

Relația (6) este în concordanță cu rezultatele din figura 1.

Valorile coeficienților de frecare pe oțelul C 120 ai materialelor termoplastice armate cu fibre din sticlă, trec printr-un minimum localizat în domeniul sarcinilor normale de $2 \div 3$ daN. În cazul frecării acelorași materiale, pe suprafețe din oțel Rp3, creșterea coeficientului de frecare cu sarcina normală este cvasiliniară. Explicația acestui fenomen constă în aceea că, sub acțiunea stării de tensiune, oțelul C 120 suferă o ecruisare superficială, manifestată prin creșterea durității sale în zona de frecare.

Ecruisarea apare la eforturi normale cuprinse între 175 și 240 daN/cm², corespunzînd pentru cupla tip Timken, unei sarcini de 2 daN. La sarcini mai mari, respectiv la eforturi mai mari, stratul ecruisat se distruge și atrage după sine creșterea coeficientului de frecare ca urmare a micșorării durității.

În cazul oțelului Rp3, oțel care conține mult mai multe elemente de aliere stabilizate sub formă de carburi și care blochează de la început posibilitățile de deformare ale martensitei, ecruisarea este redusă și compensată de recristalizarea materialului, ambele fenomene desfășurîndu-se cu viteze comparabile. Aceasta face ca funcția $\mu = f(N)$ să nu prezinte puncte de minimum.

Pentru a justifica afirmațiile de mai sus, s-a efectuat un studiu asupra microdurității epruvetelor metalice utilizate în încercările de frecare ale poliamidei armate cu 30% sticlă.

Înainte de efectuarea încercărilor de frecare, epruvetelor din oțel C 120 și Rp3 li s-au făcut verificări ale normalității repartiției unor încercări de microduritate. În acest scop am executat pe fiecare epruvetă cîte 36 de amprente de microduritate, la sarcina de 1 daN. Încercările de microduritate s-au efectuat după metoda Vickers, cu ajutorul unui microdurimetru de tip PMT3. Amprentele au fost realizate la distanțe egale, în interiorul unui pătrat cu latura de 0,5 mm, așa cum se arată în figura 2.

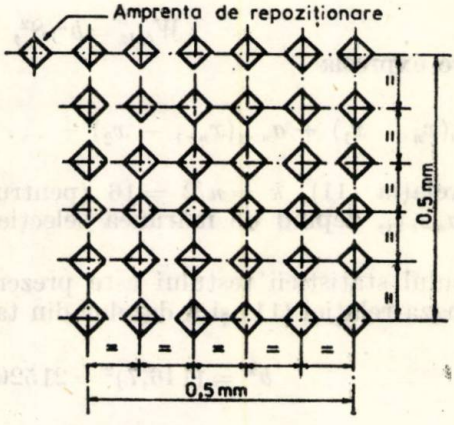


Fig. 2. — Schema amplasării amprentelor de micro duritate realizate cu microdurimetrul PMT 3.

Valorile microdurităților obținute pe o pastilă din oțel C 120, călită la 62 HRC, sînt indicate în tabela 1, în ordinea situării lor în cîmpul pe care s-au executat încercările.

Pentru a verifica normalitatea repartiției valorilor microdurității, am utilizat testul Shapiro-Wilk [1]. Acest test, bazat pe statisticile de ordine, este destinat verificării unor selecții foarte mici ($3 \leqslant n \leqslant 50$),

Tabela 1

Valorile microdurităţilor cîmpului studiat

660	636	686	713	686	648
670	670	686	629	686	629
686	670	686	694	728	648
660	660	648	670	694	694
686	670	660	713	670	713
636	660	670	660	648	694

din punct de vedere al normalităţii. Aplicarea acestui test necesită în primul rînd ordonarea valorilor caracteristicii, în sens crescător, între valoarea minimă x_1 şi valoarea maximă x_n :

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n. \tag{7}$$

Ordonînd valorile microdurităţilor prezentate în tabela 1, se obţine următorul şir al statisticilor de ordine :

629 ; 629 ; 636 ; 636 ; 636 ; 648 ; 648 ; 648 ; 648 ;
660 ; 660 ; 660 ; 660 ; 660 ; 660 ; 670 ; 670 ; 670 ;
670 ; 670 ; 670 ; 670 ; 686 ; 686 ; 686 ; 686 ; 686 ;
686 ; 694 ; 694 ; 694 ; 694 ; 713 ; 713 ; 713 ; 728.

Calculînd media şi dispersia valorilor de mai sus, s-a obţinut

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{36} x_i = 671{,}3055 \tag{8}$$

şi

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{36} (x_i - \bar{x})^2 = 22054. \tag{9}$$

S-a calculat statistica testului, W_{calc}, în conformitate cu relaţia (10) [1] :

$$W_{\text{calc}} = b^2/S^2, \tag{10}$$

unde b are expresia

$$b = a_n(x_n - x_1) + a_{n-1}(x_{n-1} - x_2) + \ldots + a_{n-k+1}(x_{n-k+1} - x_k). \tag{11}$$

În relaţia (11), $k = n/2 = 16$ (pentru n par), iar coeficienţii a_n, a_{n-1}, $\ldots$ a_{n-k+1}, depind de mărimea selecţiei şi sînt tabelaţi [1].

Calculul statisticii testului este prezentat în tabela 2.
Pe baza relaţiei (11) şi a datelor din tabela 2, rezultă

$$b^2 = (146{,}7)^2 = 21520{,}89.$$

Pentru statistica testului rezultă, în conformitate cu relaţia (10), valoarea

$$W_{\text{calc}} = 21520{,}89/22054 = 0{,}976.$$

Statistica testului $W_{\text{calc}} = 0{,}976$ se încadrează între valorile $W_{0.50} = 0{,}970$ şi $W_{0.90} = 0{,}984$ ale statisticii $W_{n,p}$ ale testului Shapiro-Wilk, pentru verificarea normalităţii [1]. Cele două valori de mai sus corespund unor probabilităţi de normalitate a repartiţiei, de 50 % şi respectiv 90 %.

Efectuînd o interpolare liniară a valorii W_{calc}, între valorile $W_{0.50}$ și $W_{0.90}$, rezultă pentru probabilitatea unei repartiții normale a microdurității valoarea

$$p = 0{,}50 + (0{,}90 - 0{,}50)\,\frac{0{,}976 - 0{,}970}{0{,}984 - 0{,}970} = 0{,}67.$$

Prin urmare, se poate aprecia că valorile obținute prin încercările de microduritate, aparțin cu o probabilitate de 67 %, unei repartiții normale, deoarece condiția $W_{0.67} > W_{50}$ este satisfăcută.

Tabela 2

Calculul statisticii testului Shapiro-Wilk.

i	x_{n-k+1}	x_k	$\omega_k = x_{n-k+1} - x_k$	a_{n-k+1}	$a_{n-k+1} \cdot \omega_k$
1	728	629	99	0,4068	40,28
2	713	629	84	0,2813	23,63
3	713	636	77	0,2410	18,56
4	713	636	77	0,2121	16,34
5	694	636	58	0,1883	10,93
6	694	648	46	0,1678	7,72
7	694	648	46	0,1496	6,88
8	694	648	46	0,1331	6,13
9	686	648	38	0,1179	4,48
10	686	660	38	0,1036	3,94
11	686	660	26	0,0900	2,34
12	686	660	26	0,0770	2,02
13	686	660	26	0,0645	1,68
14	686	660	26	0,0523	1,36
15	670	660	10	0,0404	0,41
16	670	670	0	0,0287	0
17	670	670	0	0,0172	0
18	670	670	0	0,0057	0
Σ	—	—	—	—	146,70

Pe epruvetele din oțel C 120 și Rp3, verificate astfel ca avînd repartiții normale ale valorilor microdurității, au fost efectuate încercările de frecare, la sarcini normale cuprinse între 1 și 5 daN. Pe amprentele de uzare rezultate și pe porțiunea neuzată a epruvetelor s-au efectuat apoi cîte cinci măsurători de microduritate, la distanțe egale una de alta, calculînd atît microduritatea medie, cît și abaterea standard. Rezultatele obținute sînt prezentate în tabelele 3 și 4. Pe baza lor, în figura 3 este ilustrată corespondența dintre variația cu sarcina normală a durității zonei de contact și a coeficientului de frecare.

3. CONCLUZII

Din cele prezentate, se poate observa că în cazul frecării materialelor termoplastice armate cu fibre din sticlă, pe suprafețe din oțel C 120, se poate determina un regim optim de funcționare a cuplei de frecare de tip Timken, astfel încît valoarea coeficientului de frecare să fie minimă. Acest regim este caracterizat prin viteze relative de alunecare $v \leqslant 1{,}5$ m/s

Tabela 3

Determinări de microduritate. Cupla NYLONPLAST AVE+30% sticlă/C 120; v = 18,56 cm/s.

Nr. exp.	N daN	μ	DURITATEA EPRUVETEI					DURITATEA AMPRENTEI				
			d (div.)	H_i (daN/mm²)	$\overline{H}$ (daN/mm²)	$\overline{H}-H_i$ (daN/mm²)	$\sigma_{\overline{H}}$	d (div.)	H_{ia} (daN/mm²)	$\overline{H_{ia}}$ (daN/mm²)	$\overline{H_{ia}}-H_{ia}$ (daN/mm²)	$\sigma_{\overline{H_{ia}}}$
16	1	0,300	488	788	780	8	±11,2	491	769	775	6	±3,41
	1		479	808		28		488	779		4	
	1		494	760		20		492	766		9	
	1		498	748		32		486	785		10	
	1		483	795		15		489	775		0	
34	2	0,275	498	775	797	22	±14,4	462	869	867	2	±4,80
	2		473	829		32		465	858		9	
	2		473	829		32		441	873		6	
	2		483	795		2		459	880		13	
	2		495	757		40		466	854		13	
43	3	0,290	483	795	791	4	±17,9	489	775	782	7	±5,29
	3		468	847		56		488	779		3	
	3		498	748		43		490	772		10	
	3		495	757		34		487	782		0	
	3		479	808		17		481	802		20	
33	4	0,330	482	798	793	5	±19,7	602	512	529	17	±11,2
	4		465	859		65		580	551		22	
	4		496	754		39		600	515		14	
	4		497	751		42		575	561		32	
	4		480	805		12		605	507		22	
45	5	0,363	485	788	795	7	±7,82	580	551	523	28	±15,0
	5		481	802		7		595	524		1	
	5		490	772		23		575	561		38	
	5		479	808		14		525	476		47	
	5		477	815		20		600	515		8	

Tabela 4

Determinări de microduritate. Cupla NYLONPLAST AVE + 30% sticlă/Rp 3. v = 18,56 cm/s.

Nr. exp.	N daN	μ	DURITATEA EPRUVETEI					DURITATEA AMPRENTEI				
			d (div.)	H_i (daN/mm²)	$\overline{H}$ (daN/mm²)	$\overline{H}-H_i$ (daN/mm²)	$\sigma_{\overline{H}}$	d (div.)	H_{ia} (daN/mm²)	$\overline{H}_{ia}$ (daN/mm²)	$\overline{H}_{ia}-H_{ia}$ (daN/mm²)	$\sigma_{\overline{H}}$
	1		489	775		0		486	785		19	
	1		492	766		9		488	779		13	
1	1	0,260	488	779	775	4	±3,40	498	748	766	18	±14,0
	1		491	769		6		482	798		32	
	1		486	785		10		507	721		45	
	2		510	713		32		520	686		59	
	2		485	788		43		487	782		37	
3	2	0,275	476	818	745	73	±24,8	482	798	745	53	±26,2
	2		508	719		26		485	788		43	
	2		520	686		59		525	673		72	
	3		486	785		19		500	742		45	
	3		488	779		13		520	686		11	
9	3	0,307	498	748	766	18	±14,0	531	658	697	39	±18,3
	3		482	798		32		503	733		36	
	3		507	721		45		532	655		42	
	4		497	748		32		540	636		38	
	4		423	788		8		541	634		40	
4	4	0,343	483	795	780	15	±11,2	517	694	674	20	±17,5
	4		479	808		28		523	678		4	
	4		494	760		20		505	727		53	

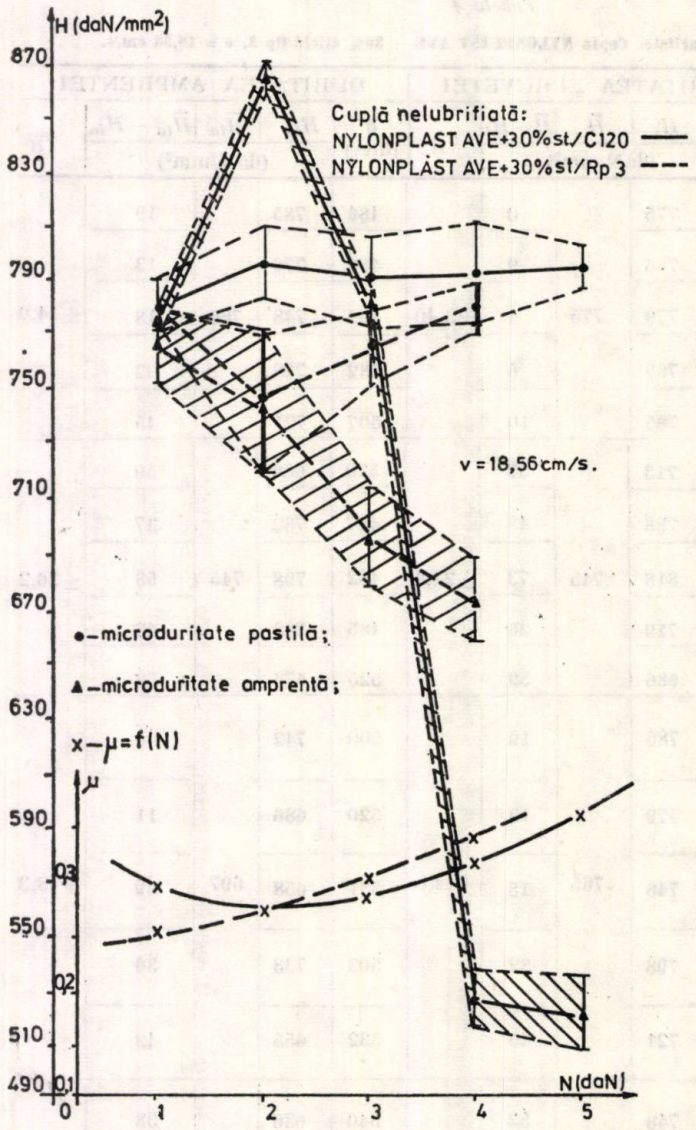


Fig. 3. — Corespondența dintre variația cu sarcina normală a durității zonei de contact a cuplei și a coeficientului de frecare.

și sarcini normale maxime de 2÷3 daN, corespunzînd la valori ale presiunii de contact (pentru cuple de tip Timken) cuprinse între 150÷300 daN/cm², funcție de natura și proprietățile fizico-mecanice ale materialelor termoplastice.

Primită la redacție la 21 martie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. D. V. Iliescu, V. G. Vodo, *Statistică și toleranțe*, Edit. tehnică, București, 1977.
2. D. Pavelescu, *Tribologie*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1977.
3. J. J. Caubet, *Théorie et pratique industrielle du frottement*, Dunod-Technip, Paris, 1967.

DINAMICA COMPACTOARELOR AUTOPROPULSATE CU AMBELE RULOURI VIBRATOARE

de POLIDOR BRATU
Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor — I. N. C. E. R. C —

În lucrare se tratează dinamica vibrațiilor compactoarelor autopropulsate cu ambele rulouri vibratoare, utilizînd un model de calcul vîscoelastic cu zece grade de libertate. De asemenea, se prezintă și modelul de calcul simplificat schematizat numai cu elemente elastice, care permite un calcul mai puțin laborios pentru proiectare.
Exemplul de calcul din lucrare se referă la un model real de compactor vibrator cu ambele rulouri vibratoare, pentru care s-au determinat pulsațiile proprii și vectorii proprii de vibrație (modurile de vibrație).

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Necesitatea creșterii productivității muncii în construcții, prin mecanizarea intensivă, a impus perfecționarea utilajelor de construcții în vederea atingerii unor performanțe superioare. Astfel, au fost realizate atît în țară, cît și în străinătate mașini și utilaje capabile să răspundă deziderateloг cerute de tehnologiile moderne și productive cît și din punct de vedere al disponibilității în exploatare, al unei fiabilități și mentenabilități ridicate. Pe de altă parte, se urmărește ca în aceste utilaje metalul să fie utilizat cît mai rațional, iar corelarea puterii instalate cu parametrii tehnico-funcționali să conducă la un optimum privind consumul minim de combustibil.

În acest context se înscriu și eforturile de concepție și execuție ale constructorilor de mașini din țara noastră privind utilajele de compactat prin vibrare. Evoluția utilajelor de compactat prin vibrare a dovedit marea capacitate de adaptare, a acestora la diversele tehnologii privind structurile rutiere din mixturi asfaltice, piatră spartă, balast sau lucrările de compactare a fundațiilor speciale. De la utilajele de compactat cu un singur rulou vibrator s-a ajuns la mașini cu două rulouri vibratoare, în acest fel dublîndu-se productivitatea. Aceasta, însă, impune găsirea unor soluții de calcul și proiectare care să corespundă următoarelor deziderate: atingerea nivelului vibrațiilor de lucru la ambele rulouri vibratoare (forță perturbatoare, amplitudine a deplasării pentru o anumită gamă de frecvențe), reducerea nivelului de vibrații în limitele impuse pentru om la postul de comandă și pentru subansamblele funcționale, mobilitate în teren, condiții ergonomice și de confort cerute de norme, elementele de design și fiabilitate — mentenabilitate corespunzătoare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 1, 1980, P. 139–155

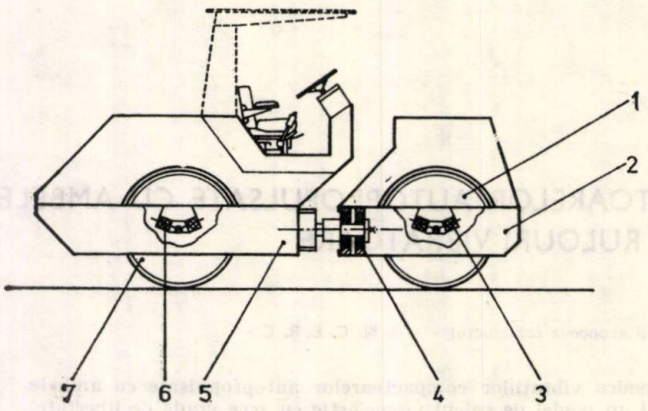


Fig. 1 — Schema constructivă a unui compactor vibrator autopropulsat cu ambele rulouri vibratoare și trei trepte de izolare a vibrațiilor.

2. MODELAREA DINAMICĂ STRUCTURALĂ A MAȘINII

În figura 1 se preizntă modelul constructiv, structural al unui compactor cu șasiu articulat și cu ambele rulouri vibratoare. Acesta se compune din următoarele elemente :

— ruloul vibrator *1*, amplasat în față ;

— șasiul anterior *2*, amplasat în față deasupra ruloului vibrator ;

— prima treaptă de izolare și amortizare a vibrațiilor amplasată între ruloul vibrator și șasiul anterior, compusă din elemente de cauciuc *3*. Aceasta are menirea să izoleze vibrațiile transmise de ruloul vibrator la șasiul anterior ;

— a doua treaptă de izolare și amortizare a vibrațiilor este înglobată în articulația șasiului și se compune din inele amortizoare de cauciuc *4*. Ea îndeplinește rolul de a izola vibrațiile transmise de la ambele rulouri vibratoare la șasiul posterior, unde se află postul mecanicului și majoritatea subansamblelor (sistemelor) de putere și comandă ;

— șasiul posterior *5* al mașinii, constituie suportul postului de comandă, cabinei, grupului de acționare, instalației de forță și comandă ;

— a treia treaptă de izolare și amortizare *6* a vibrațiilor amplasată între șasiul posterior și ruloul vibrator spate ;

— ruloul vibrator posterior *7*.

Tracțiunea se realizează cu ajutorul ambelor rulouri sau cu un singur rulou, de regulă cel din spate.

Avînd în vedere modelul real constructiv și funcțiile tehnologice ale unei mașini din această clasă se subliniază existența legăturilor vîscoelastice în structura mașinii, reprezentate prin grupuri de elemente amortizoare din cauciuc, precum și legătura elastică sau vîscoelastică cu mediul de compactat.

Analiza modelelor reologice pentru amortizoarele din cauciuc (elemente antivibratile), cît și pentru mediul de compactat (pămînt, mixturi asfaltice, balast și alte materiale compuse), a permis ca să poată fi adoptate modele Hooke sau Kelvin-Voigt care oferă posibilitatea unui calcul de proiectare corespunzător [2], [6], [7], [16], [17], [20], [29].

Vibrațiile sînt generate de două excitatoare inerțiale plasate fiecare în interiorul celor două rulouri [5], [14], [17], [25], [31].

Se precizează că mașinile din această clasă se caracterizează din punct de vedere constructiv printr-un înalt grad de simetrie masică și geometrică în raport cu planul longitudinal median.

2.1. MODELUL DINAMIC

Pe baza schematizărilor privind structura mașinii ca un ansamblu de solide rigide cu legături elastice sau vîscoelastice, compactorul autopropulsat cu două rulouri vibratoare și cu trei trepte de amortizoare, ca în figura 1, poate fi reprezentat ca un model cu zece grade de libertate (fig. 2).

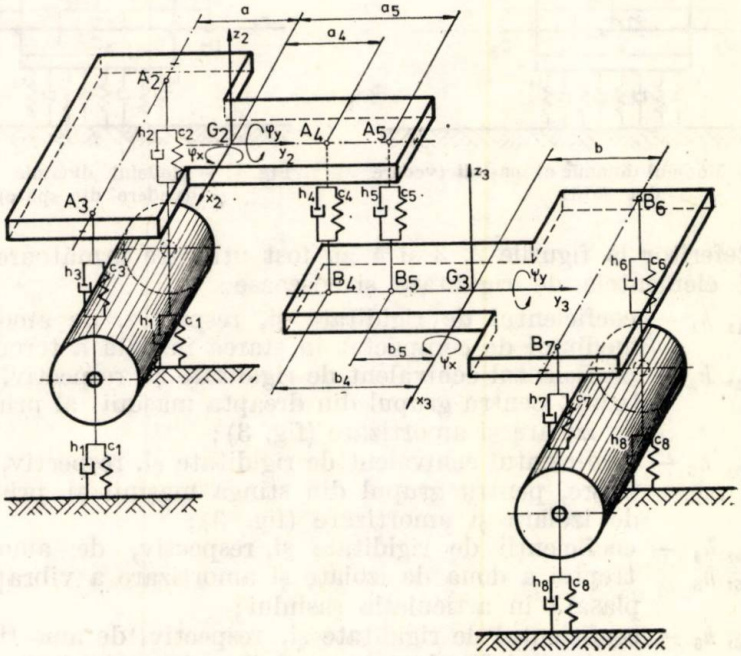


Fig. 2. — Modelul dinamic complex (spațial) al compactorului vibrator cu ambele rulouri vibratoare.

Coordonatele generalizate ale sistemului vor fi:

$q_1 = z_1$ — deplasarea pe verticală a ruloului vibrator anterior;

$q_2 = \alpha$ — rotirea ruloului anterior față de axa orizontală $G_1 y_1$, care trece prin centrul de masă al ruloului;

$q_3 = z_2$ — deplasarea pe verticală a șasiului anterior;

$q_4 = \varphi_x$ — rotirea șasiului anterior în raport cu axa $G_2 x_2$, care trece prin centrul de masă G_2;

$q_5 = \varphi_y$ — rotirea șasiului anterior în raport cu axa $G_2 y_2$ care trece prin centrul de masă G_2;

$q_6 = z_3$ — deplasarea pe verticală a șasiului posterior;
$q_7 = \psi_x$ — rotirea șasiului posterior în raport cu axa $G_3 x_3$, care trece prin centrul de masă G_3;
$q_8 = \psi_y$ — rotirea șasiului posterior în raport cu axa $G_3 y_3$, care trece prin centrul de masă G_3;
$q_9 = z_4$ — deplasarea pe verticală a ruloului posterior;
$q_{10} = \beta$ — rotirea ruloului posterior față de axa $G_4 x_4$, care trece prin centrul de masă al ruloului.

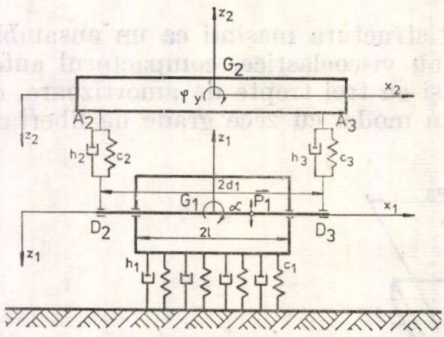


Fig. 3. — Modelul dinamic al mașinii (vedere din față).

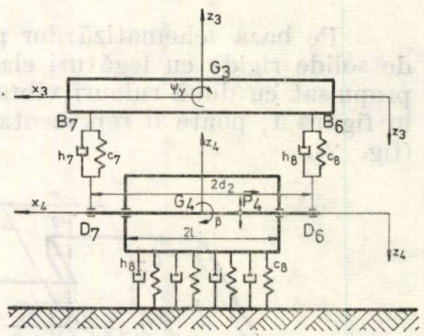


Fig. 4. — Modelul dinamic al mașinii (vedere din spate).

Referitor la figurile 2, 3 și 4 au fost utilizate următoarele notații privind elementele de rigiditate și vîscoase:

c_1, h_1 — coeficientul de rigiditate și, respectiv, de amortizare al mediului de compactat în starea inițială a terenului;
c_2, h_2 — coeficientul echivalent de rigiditate și, respectiv, de amortizare, pentru grupul din dreapta mașinii al primei trepte de izolare și amortizare (fig. 3);
c_3, h_3 — coeficientul echivalent de rigiditate și, respectiv, de amortizare, pentru grupul din stînga mașinii al primei trepte de izolare și amortizare (fig. 3);
c_4, h_4 — coeficienții de rigiditate și, respectiv, de amortizare ai
c_5, h_5 treptei a doua de izolate și amortizare a vibrațiilor, amplasată în articulația șasiului;
c_6, h_6 — coeficientul de rigiditate și, respectiv, de amortizare, pentru grupul din dreapta mașinii, al treptei a treia de izolare și amortizare (fig. 3);
c_7, h_7 — coeficientul de rigiditate și, respectiv, de amortizare, pentru grupul din stînga mașinii, a treptei a treia de izolare și amortizare (fig. 4);
c_8, h_8 — coeficientul de rigiditate și, respectiv, de amortizare al mediului de compactat după o trecere a ruloului vibrator anterior;

Caracteristicile inerțiale ale subansamblelor mașinii considerate ca solide rigide, participante la mișcarea vibratorie sînt notate astfel:

m_1 — masa ruloului vibrator anterior;
m_2 — masa șasiului anterior;

m_3 — masa șasiului posterior;
m_4 — masa ruloului vibrator posterior;
J_{1y} — momentul de inerție principal al ruloului anterior în raport cu axa $G_1 y_1$;
J_{2x}, J_{2y} — momentele de inerție principale în raport cu axele $G_2 x_2$ și, respectiv, $G_2 y_2$ ale șasiului anterior;
J_{3x}, J_{3y} — momentele de inerție principale în raport cu axele $G_3 x_3$ și, respectiv, $G_3 y_3$ ale șasiului posterior;
J_{4y} — momentul de inerție principal al ruloului posterior în raport cu axa $G_4 y_4$;

3. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE DE MIȘCARE PENTRU MODELUL ELASTIC

Deoarece sînt frecvente situațiile cînd proprietățile elastice au caracter predominant în raport cu cele vîscoase, pentru anumite regimuri de lucru determinate de frecvență, pot fi eliminate elementele vîscoase din schema modelului dinamic din figura 2. În acest caz, modelul elastic permite o analiză mai rapidă a rezultatelor, metoda fiind mai puțin laborioasă, cu acceptarea unor erori, pentru rezultate, de cele mai multe ori aceste erori sînt nesemnificative.

3.1. DETERMINAREA DEFORMAȚIILOR ELEMENTELOR ELASTICE

Deplasările punctelor de reazem ale elementelor elastice se determină cu ajutorul relației [7], [12], [15], [28]:

$$u_{i_z} = Z_j + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_y \\ 0 & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

unde u_{i_z} — deplasarea după verticală a punctului A_i, care aparține solidului;
Z_j — deplasarea după verticală a centrului de masă G_j;
α — matricea pătratică antisimetrică a vectorului rotație instantanee $\bar{\alpha}$ $(\alpha_x, \alpha_y, 0)$;
$\bar{r}_i$ — vectorul de poziție al punctelor A_i față de sistemul de axe ortogonal $G_j xyz$.

Pentru cazul schemei din figura 2 și cu simplificările introduse $\alpha_z = 0$, $z_i = 0$, avem

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_y \\ 0 & 0 & -\alpha_x \\ -\alpha_y & \alpha_x & 0 \end{bmatrix}, r_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Relaţia (1) este valabilă numai în cazul vibraţiilor la care deplasările sînt foarte mici în raport cu dimensiunile solidelor în mişcare.

Deformaţia unui element elastic va fi determinată tocmai prin deplasarea relativă a punctelor de prindere în mişcarea vibratorie pe verticală. Astfel, avem

$$\begin{aligned}
v_1 &= z_1, \\
v_2 &= -z_1 + z_2 - l\alpha - a\varphi_y + d\varphi_y, \\
v_3 &= -z_1 + z_2 + l\alpha - a\varphi_x - d\varphi_y, \\
v_4 &= z_2 - z_3 + a_4\varphi_x + b_4\psi_x, \\
v_5 &= z_2 - z_3 + a_5\varphi_x - b_5\psi_x, \\
v_6 &= z_3 - z_4 + d_2\beta + b\psi_x + n\psi_y, \\
v_7 &= z_3 - z_4 - d_2\beta + b\psi_x - n\psi_y, \\
v_8 &= z_4,
\end{aligned} \tag{2}$$

unde v_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, 8)$ — reprezintă deformaţia elementelor cu coeficientul de rigiditate respectiv, $c_1, c_2, \ldots, c_8$.

3.2. ENERGIA SISTEMULUI MECANIC

Energia cinetică a sistemului mecanic va fi dată de relaţia

$$2T = m_1 \dot{x}_1^2 + J_{1y}\dot{\alpha}^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + J_{2x}\dot{\varphi}_x^2 + J_{2y}\dot{\varphi}_y^2 + m_3 \dot{x}_3^2 + \\ + J_{3x}\dot{\psi}_x^2 + J_{3y}\dot{\psi}_y^2 + m_4\dot{z}_4^2 + J_{4y}\dot{\beta}^2, \tag{3}$$

sau utilizînd notaţia în coordonate generalizate avem:

$$2T = m_1\dot{q}_1^2 + J_{1y}\dot{q}_2^2 + m_2\,\dot{q}_3^2 + J_{2x}\dot{q}_4^2 + J_{2y}\dot{q}_5^2 + \\ + m_3\,\dot{q}_6^2 + J_{3x}\,\dot{q}_7^2 + J_{3y}\dot{q}_8^2 + m_4\,\dot{q}_9^2 + J_{4y}\dot{q}_{10}^2. \tag{4}$$

Energia cinetică fiind o mărime scalară poate fi exprimată cu ajutorul produselor de matrice şi vectori, astfel: [7], [20];

$$2T = \langle \dot{\boldsymbol{q}},\ \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}} \rangle \tag{5}$$

unde: $\boldsymbol{M}$ — matricea de inerţie;

$\dot{\boldsymbol{q}}$ — vectorul vitezelor generalizate;

ştiind că: $\dot{\boldsymbol{q}}^T = [\dot{q}_1,\ \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_{10}]$,

şi $\boldsymbol{M} = \text{DIAG}\ \{m_1,\ J_{1y},\ m_2,\ J_{2x},\ J_{2y},\ m_3,\ J_{3x},\ J_{3y},\ m_4,\ J_{4y}\}$.

Energia potențială a sistemului mecanic, ținînd seama de relațiile (2) și exprimarea în funcție de coordonatele generalizate, va fi :

$$2\Pi = c_1 q_1^2 + c_\alpha q_2^2 + c_2(-q_1 - 1q_2 + q_3 - aq_4 + dq_5)^2 + c_3(-q_1 + 1q_2 + q_3 - aq_4 - dq_5)^2 + c_4(q_3 + a_4 q_4 - q_6 + b_4 q_7)^2 + c_5(q_3 + a_5 q_4 - q_6 + b_5 q_7)^2 + c_6(q_6 + bq_7 + nq_8) - q_9 + d_2 q_{10})^2 + c_7(q_6 + bq_7 - nq_8 - q_9 - d_2 q_{10})^2 + c_8 q_9^2 + c_\beta q_{10}^2. \quad (6)$$

Utilizînd formularea matriceală pentru exprimarea energiei potențiale [7], [20], avem :

$$2\Pi = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{C}_0 \boldsymbol{v} \rangle, \quad (7)$$

în care $\boldsymbol{v}$ — vectorul deformațiilor elementelor elastice :
$\boldsymbol{C}_0$ — matricea rigidităților.

Vectorul $\boldsymbol{v}$ și matricea $\boldsymbol{C}_0$ sînt de forma :

$$\boldsymbol{v}^T = [v_1, v_{1\alpha}, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_{8\beta}],$$

$$\boldsymbol{C}_0 = \text{DIAG}\,\{C_1, C_\alpha, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_\beta\}.$$

Legătura între vectorul deformațiilor $\boldsymbol{v}$ și vectorul deplasărilor $\boldsymbol{q}$ se realizează prin transformarea liniară :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q}, \quad (8)$$

în care $\boldsymbol{A}$ — reprezintă matricea de influență a deplasărilor asupra deformațiilor [7], [16].

În acest caz matricea $\boldsymbol{A}$ se exprimă astfel :

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -a & d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -a & -d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_4 & 0 & -1 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_5 & 0 & -1 & b_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & n & -1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b & -n & -1 & -d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Efectuînd transformarea adjunctă cu ajutorul lui A^T pe mulțimea valorilor lui q în relația (7), unde s-a introdus (8), vom obține [3], [7] [9]:

$$2\,\Pi = \langle Aq,\ C_0\ Aq\rangle,$$

$$2\,\Pi = \langle q,\ A^T C_0\, Aq\rangle \tag{9}$$

sau

$$2\,\Pi = \langle q,\ Cq\rangle,$$

unde $C = A^T\ C_0 A$,

dar A^T — transpusa matricei A.

Relația (9) exprimă energia potențială a sistemului, care este un scalar, funcție de coordonatele generalizate.

3.3. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII

3.3.1. Vibrațiile libere

Utilizînd ecuațiile lui Lagrange de speța a doua pentru vibrațiile libere, în absența forțelor disipative (model elatic) [4], [8], [9], [11], [20], [23], [25], [26], [31], vom avea

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \tag{10}$$

unde q_j, $\dot{q}_j$ $(j = 1,\ 2, \ldots, 10)$ — coordonata generalizată și, respectiv, viteza generalizată corespunzătoare gradului de libertate j.

Prin folosirea relațiilor (5), (9) și (10) obținem sistemul de ecuații diferențiale pentru vibrațiile libere sub forma

$$M\,\ddot{q} + C\,q = 0. \tag{11}$$

Matricea de inerție M, matricea de rigiditate C din relația (11) sînt pozitiv definite, nesingulare și simetrice (coordonatele q_j reprezintă deplasările sistemului față de o poziție fixă).

Pentru ecuația diferențială (11) se caută o soluție de forma

$$q = \mathrm{Re}\{a\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}pt}\}, \tag{12}$$

echivalentă cu relația

$$q = a \cos pt. \tag{13}$$

unde q — vectorul (coloană) al coordonatelor generalizate, avînd drept componente deplasări liniare și unghiulare, pentru care $q^T = [q_1,\ q_2, \ldots\ q_j \ldots\ q_{10}]$;

a — vectorul (coloană) al amplitudinilor necunoscute, pentru care $a^T = [a_1,\ a_2 \ldots\ a_j \ldots\ a_{10}]$;

p — pulsația proprie.

Înlocuind soluția (13) în (11), rezultă sistemul de ecuații algebrice sub forma:

$$(\boldsymbol{C} - p^2 \boldsymbol{M})\,\boldsymbol{a} = 0. \tag{14}$$

Este necesar ca relația (14) să fie satisfăcută de $\boldsymbol{a}$ și p, deci trebuie rezolvată problema de valori proprii și vectori proprii ce privesc matricele $\boldsymbol{M}$ și $\boldsymbol{C}$, care de regulă sînt matrice pătrate, iar în cazul nostru au dimensiunea (6×6).

Sistemul (14) are și soluții nebanale numai dacă

$$\det (\boldsymbol{C} - p^2 \boldsymbol{M}) = 0. \tag{15}$$

Avînd în vedere cazul de față, relația (15) este o ecuație algebrică de gradul zece în p^2, numită ecuația pulsațiilor, care are rădăcinile p_1^2, p_2^2, ... p_{10}^2 reale (cazul matricelor simetrice, nesingulare și, cu elemente reale), pozitive și distincte numite valori proprii. Ansamblul valorilor pozitive $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{10}$ se numesc pulsațiile proprii ale sistemului mecanic.

Pentru fiecare valoare proprie p_r^2 corespunde un vector propriu $\boldsymbol{a}^r$ care trebuie să satisfacă ecuația

$$(\boldsymbol{C} - p_r^2 \boldsymbol{M})\boldsymbol{a}^r = 0. \tag{16}$$

Sistemul (16) definește forma unui mod propriu de ordinul r, dată de ansamblul componentelor vectorului $\boldsymbol{a}^r$, cu $(\boldsymbol{a}^r)^T = [a_1^r, a_2^r, \ldots, a_j^r \ldots \ldots a_{10}^r]$.

3.3.2. Vibrațiile forțate

Se introduce lucrul mecanic elementar al forțelor perturbatoare (exterioare), astfel [20] [26]:

$$\mathrm{d}L = \langle \boldsymbol{f},\ \mathrm{d}\boldsymbol{q} \rangle, \tag{17}$$

în care $\boldsymbol{f}$ — vectorul forțelor exterioare perturbatoare generalizate, cu $\boldsymbol{f}^T = [P_1, 0, \ldots 0, P_4, 0]$.

Componentele $P_1 = P_{10} \sin(\omega t + \theta_1)$ și $P_4 = P_{40} \sin(\omega t + \theta_4)$ ale vectorului $\boldsymbol{f}$ sînt corespunzătoare gradelor de libertate definite prin coordonatele generalizate q_1 și, respectiv, q_9.

Scriind ecuațiile lui Lagrange de speța a doua sub forma [20], [26], [31]:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + \frac{\partial L}{\partial q_j}, \tag{18}$$

și utilizînd relațiile (5), (7) și (17) sistemul ecuațiilor de mișcare va fi:

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}. \tag{19}$$

Prin alegerea unei soluții de forma membrului drept ecuația (19) se transformă într-un sistem algebric de ecuații cu soluții pentru cazul vibrațiilor staționare. Această problemă este tratată pe larg în lucrările [4], [8], [9], [11], [24].

4. ECUAȚIILE DIFERENȚIALE DE MIȘCARE PENTRU MODELUL VISCOELASTIC

4.1. VIBRAȚIILE LIBERE

Avînd în vedere modelul vîscoelastic al mașinii, prezentat în figura 2, se introduce funcția disipativă D care se află în următoarea relație cu forța disipativă [26];

$$Q_{jR} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots 10), \tag{20}$$

în care

Q_{jR} — forța generalizată corespunzătoare forțelor disipative.

Deoarece viteza relativă a elementelor amortizoare este corespunzătoare deformației elementelor elastice, atunci funcția disipativă, ținînd seama de relațiile (2) și notația în coordonate generalizate, va avea forma:

$$\begin{aligned} 2D = {} & h_1\dot{q}_1^2 + h\alpha\dot{q}_2^2 + h_2(-\dot{q}_1 - 1\,\dot{q}_2 + \dot{q}_3 - a\,\dot{q}_4 + d\,q_5)^2 + \\ & + h_3(-\dot{q}_1 + 1\,\dot{q}_2 + \dot{q}_3 - a\dot{q}_4 - d\dot{q}_5)^2 + h_4(\dot{q}_3 + a_4\dot{q}_4 - \\ & - \dot{q}_6 + b_4\dot{q}_7)^2 + h_5(\dot{q}_3 + a_5\dot{q}_4 - \dot{q}_6 + b_5\dot{q}_7) - h_6(\dot{q}_6 + \\ & + b\dot{q}_7 + n\dot{q}_8 - \dot{q}_9 + d_2\dot{q}_{10})^2 + h_7(\dot{q}_6 + b\dot{q}_7 - n\dot{q}_8 - \\ & - \dot{q}_9 - d_2\dot{q}_{10})^2 + h_8\dot{q}_9^2 + h_\beta\dot{q}_{10}^2. \end{aligned} \tag{21}$$

În formulare matriceală pentru exprimarea funcției disipative, [4], [7], [20], [24] avem:

$$2D = \langle \dot{\boldsymbol{v}}\boldsymbol{H}_0\,\dot{\boldsymbol{v}}\rangle, \tag{22}$$

sau ținînd seama de relația

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{A}\,\dot{\boldsymbol{q}}, \tag{23}$$

vom obține

$$2D = \langle \boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{q}},\ \boldsymbol{H}_0\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{q}}\rangle, \tag{24}$$

sau

$$2D = \langle \dot{\boldsymbol{q}},\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{H}_0\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{q}}\rangle.$$

în care $\dot{\boldsymbol{q}}$ — vectorul vitezelor generalizate;

$\boldsymbol{A}^T$ — transpusa matricei $\boldsymbol{A}$;

$\boldsymbol{H}_0$ — matricea diagonală a amortizărilor;

Matricea $\boldsymbol{H}_0$ este de forma:

$$\boldsymbol{H}_0 = \mathrm{DIAG}\{h_1,\ h_\alpha,\ h_2,\ h_3,\ h_4,\ h_5,\ h_6,\ h_7,\ h_8,\ h_\beta\}.$$

Notînd matricea simetrică a amortizărilor

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{H}_0 \boldsymbol{A}, \tag{25}$$

relaţia (21) devine

$$2D = \langle \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{q}} \rangle, \tag{26}$$

care exprimă funcţia disipativă ca un scalar în coordonatele generalizate q_j ($j = 1, \ldots 10$).

Ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua pentru mişcarea sistemului în prezenţa forţelor disipative se scriu astfel [26]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j} + Q_{jR} \tag{27}$$

$$(j = 1, 2, \ldots 10).$$

Pe baza relaţiilor (5), (7), (26) ecuaţia (27) se transformă în :

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{q} = 0, \tag{28}$$

descriind vibraţiile libere ale sistemului vîscoelastic. Pentru ecuaţia (28) se alege o soluţie de forma :

$$\boldsymbol{q} = \mathrm{Re}\{\boldsymbol{a}\, \mathrm{e}^{pt}\}, \tag{29}$$

care conduce la următoarea problemă algebrică :

$$(p^2\boldsymbol{M} + p\boldsymbol{H} + \boldsymbol{C})\boldsymbol{a} = 0, \tag{30}$$

ce necesită determinarea vectorului $\boldsymbol{a}$ şi scalarului p, care sînt în general cantităţi complexe (problema valorilor proprii complexe) [8], [11], [20], [24]. În lucrările [3], [11], [20], se indică metodele de rezolvare a acestei probleme.

4.2. VIBRAŢIILE FORŢATE

Prin utilizarea relaţiilor (17), (18), (28) ecuaţiile de mişcare ale sistemului vîscoelastic mecanic, în prezenţa forţelor perturbatoare, se obţine :

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{H}\dot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{q} = \boldsymbol{f}. \tag{31}$$

Determinarea amplitudinilor în regim staţionar folosind calculul matriceal comportă rezolvarea unei probleme tratată în lucrările [4], [8], [11], [24].

5. STUDIUL MODURILOR PROPRII DE VIBRAŢIE PENTRU MODELUL ELASTIC SIMPLIFICAT AL COMPACTOARELOR CU DOUĂ RULOURI VIBRATOARE

Avînd în vedere particularităţile constructive şi tehnico-funcţionale pentru maşinile din această clasă se scot în evidenţă următoarele ipoteze simplificatoare ale modelului complex :

a) simetria rigidităţilor faţă de planul longitudinal median ;

b) mişcarea de translaţie verticală a rulourilor este preponderentă faţă de tendinţa de mişcare de rotaţie în jurul axei orizontale ;

c) mișcarea de rotație a celor două șasiuri componente față de axa $G\,y$ este nesemnificativă, putînd fi neglijată în mișcarea generală de vibrare, față de mișcarea verticală de translație.

În acest caz modelul complex spațial se transformă într-un model plan (fig. 5), în care au fost neglijate elementele disipative, deoarece prezența acestora nu ar fi modificat esențial valorile pulsațiilor proprii, în schimb erau necesare calcule mai laborioase. Eliminarea din model a elementelor disipative este avantajoasă pentru aprecierea vibrațiilor în domeniul funcționării mașinii în postrezonanță, unde influența amortizării este redusă.

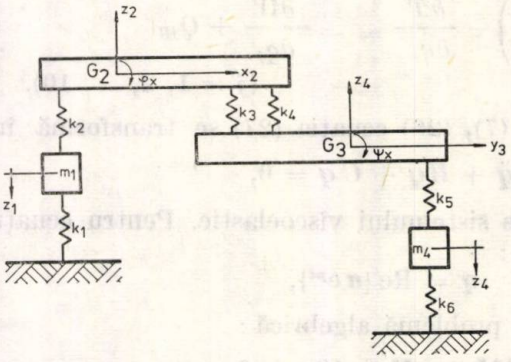


Fig. 5. — Modelul dinamic elastic simplificat (plan) al mașinii.

Față de adoptarea ipotezelor simplificatoare se poate scrie

$$\varphi_y = 0\,;\ \psi_y = 0\,;\ \alpha = 0\,;\ \beta = 0\,;\ C_\alpha = 0\,;\ C_\beta = 0.$$

De asemenea, vom nota coeficienții de rigiditate ai modelului simplificat astfel :

$$K_1 = C_1\,;\ K_2^1 = C_2 = C_3\,;\ K_2 = 2K_2^1\,;\ K_3 = C_4,$$

$$K_4 = C_5\,;\ K_5^1 = C_6 = C_7\,;\ K_5 = 2K_5^1\,;\ K_6 = C_8.$$

Deformațiile elementelor elastice vor fi :

$$\begin{aligned} v_1 &= z_1, \\ v_2 &= v_3 = z_2 - a\varphi_x - z_1, \\ v_4 &= z_2 - z_3 + a_4\varphi_x + b_4\psi_x, \\ v_5 &= z_2 - z_3 + a_5\psi_x + b_5\psi_x, \\ v_6 &= v_7 = z_3 - z_4 + b\psi_x, \\ v_8 &= z_4, \end{aligned} \tag{32}$$

sau în coordonatele generalizate :

$$\begin{aligned} v_1 &= q_1, \\ v_2 &= v_3 = -q_1 + q_2 - aq_3, \\ v_4 &= q_2 - q_4 + a_4q_3 + b_4q_5, \\ v_5 &= q_4 - q_6 + a_5q_3 + b_5q_5, \\ v_6 &= v_7 = q_4 - q_6 + bq_5, \\ v_8 &= q_6. \end{aligned} \tag{33}$$

Energia cinetică exprimată cu ajutorul vitezelor generalizate este

$$2T = m_1\dot{q}_1^2 + m_2\dot{q}_2^2 + J_{2x}\,\dot{q}_3^2 + m_3\dot{q}_4^2 + J_{3x}\,\dot{q}_5^2 + m_4\dot{q}_6^2. \tag{34}$$

Energia potențială exprimată cu ajutorul coordonatelor generalizate va avea expresia :

$$2\Pi = k_1q_1^2 + k_2\,(-q_1 + q_2 - aq_3)^2 + k_3\,(q_2 + a_4q_3 - q_4 + b_4q_5)^2 +$$

$$+ k_4(q_2 + a_5q_3 - q_4 + b_5q_5)^2 + k_5(q_4 + bq_5 - q_6)^2 + k_6q_6^2. \tag{35}$$

În formulare matriceală vectorul deformațiilor se va putea scrie funcție de coordonatele generalizate, care exprimă deplasări absolute față de sistemul de referință ales, astfel :

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{q} \tag{36}$$

sau

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_4 & -1 & b_4 & 0 \\ 0 & 1 & a_5 & -1 & b_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Relația (34) se transpune matriceal sub forma

$$2\,T = \langle \dot{\boldsymbol{q}},\ \boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{q}} \rangle. \tag{38}$$

unde

$\boldsymbol{q}$ — vectorul vitezelor generalizate cu transpusul său

$\dot{\boldsymbol{q}}^T = [\dot{q}_1,\ \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_6]$;

$\boldsymbol{M}$ — matricea de inerție de formă diagonală, adică

$\boldsymbol{M} = \text{DIAG}\,\{m_1, m_2, J_{2x}, m_3, J_{3x}, m_4\}$.

Relația (35) transpusă matriceal cu ajutorul componentelor vectorului $\boldsymbol{v}$ este

$$2\Pi = \langle \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{K}_0\,\boldsymbol{v} \rangle, \tag{39}$$

sau cu ajutorul coordonatelor generalizate cuprinse în vectorul $\boldsymbol{q}$, va fi :

$$2\Pi = \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{K}_0\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} \rangle = \langle \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{q} \rangle, \tag{40}$$

în care, notînd $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{K}_0\boldsymbol{A}$ matricea simetrică de rigiditate, vom avea

$$2\Pi = \langle \boldsymbol{q},\ \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{q} \rangle. \tag{41}$$

Matricea $\boldsymbol{K}_0 = \text{DIAG}\,\{k_1, k_2, k_3 \ldots k_6\}$ conține coeficienții de rigiditate echivalenți ai legăturilor elastice.

În acest caz ecuațiile diferențiale de mișcare pentru vibrațiile libere, pentru modelul elastic și simplificat vor fi :

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{q} = 0. \tag{42}$$

Pentru calcul au fost utilizate datele unui model real de compactor vibrator, astfel:

— pentru matricea de inerție $\boldsymbol{M}$:

$m_1 = 1700$ kg; $m_2 = 736$ kg; $m_3 = 2720$ kg; $m_4 = 2000$ kg,

$J_{2x} = 1400$ kg m^2; $J_{3x} = 1420$ kg m^2,

— pentru matricea diagonală a rigidităților $\boldsymbol{K}_0$:

$K_1 = 90 \cdot 10^6$ N/m; $K_2 = 9{,}2 \cdot 10^6$ N/m; $K_3 = 1{,}52 \cdot 10^6$ N/m,

$K_4 = 1{,}52 \cdot 10^6$ N/m; $K_5 = 9{,}2 \cdot 10^6$ N/m; $K_6 = 90 \cdot 10^6$ N/m,

— pentru matricea de influență $\boldsymbol{A}$:

$a = 0{,}15$ m; $b = 0{,}40$ m; $a_4 = 0{,}95$ m,

$a_5 = 1{,}15$ m; $b_4 = 1{,}30$ m; $b_5 = 1{,}10$ m.

Utilizînd un program de calcul în limbaj FORTRAN au fost determinate pulsațiile proprii și vectorii proprii care dau configurația modurilor de vibrație pentru un model real de compactor vibrator cu datele prezentate. S-au obținut următoarele rezultate:

$$p_1 = 5{,}28 \text{ s}^{-1} \text{ cu } a^{(1)} = \begin{bmatrix} -0{,}27 \cdot 10^{-5} \\ -0{,}26 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}17 \cdot 10^{-1} \\ -0{,}52 \cdot 10^{-2} \\ +0{,}13 \cdot 10^{-1} \\ -0{,}22 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix},$$

$$p_2 = 53{,}48 \text{ s}^{-1}, \quad a^{(2)} = \begin{bmatrix} -0{,}64 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}45 \cdot 10^{-2} \\ +0{,}14 \cdot 10^{-1} \\ +0{,}98 \cdot 10^{-2} \\ +0{,}12 \cdot 10^{-1} \\ 0{,}14 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix},$$

$$p_3 = 67{,}06\ s^{-1}, \quad a^{(3)} = \begin{bmatrix} +0{,}12 \cdot 10^{-2} \\ +0{,}10 \cdot 10^{-1} \\ -0{,}13 \cdot 10^{-1} \\ +0{,}15 \cdot 10^{-1} \\ -0{,}26 \cdot 10^{-2} \\ +0{,}14 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix},$$

$$p_4 = 127{,}77\ s^{-1}, \quad a^{(4)} = \begin{bmatrix} +0{,}43 \cdot 10^{-2} \\ +0{,}34 \cdot 10^{-1} \\ +0{,}48 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}36 \cdot 10^{-2} \\ +0{,}33 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}31 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix},$$

$$p_5 = 223{,}58\ s^{-1}, \quad a^{(5)} = \begin{bmatrix} +0{,}60 \cdot 10^{-4} \\ +0{,}10 \cdot 10^{-3} \\ +0{,}51 \cdot 10^{-4} \\ -0{,}16 \cdot 10^{-2} \\ -0{,}57 \cdot 10^{-3} \\ +0{,}22 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix},$$

$$p_6 = 244{,}80\ s^{-1}, \quad a^{(6)} = \begin{bmatrix} +0{,}23 \cdot 10^{-1} \\ -0{,}68 \cdot 10^{-2} \\ +0{,}24 \cdot 10^{-3} \\ +0{,}13 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}14 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}35 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix},$$

6. CONCLUZII

a) Modelul dinamic de calcul cu zece grade de libertate, schematizat cu ajutorul elementelor elastice și vîscoase liniare, permite determinarea frecvențelor proprii și a răspunsului sistemului pentru vibrațiile forțate de lucru. Influența elementelor amortizoare s-a dovedit a fi foarte importantă în zona rezonanțelor și neglijabile în regimul de postrezonanță, unde funcționează mașinile din această clasă. Deoarece la trecerea prin punctele de rezonanță, pînă la funcționarea în regim, creșterea amplitudinii este condiționată de prezența amortizării în sistem, pentru analiza vibrațiilor forțate trebuie să se adopte modelul complex vîscoelastic.

b) Modelul dinamic elastic simplificat cu 6 grade de libertate este suficient pentru utilajele din această clasă la începutul perioadei de exploatare, timp în care elementele elastice sînt identice. După o anumită perioadă de exploatare caracteristicile elementelor elastice se modifică diferit, ceea ce implică reconsiderarea modelului complex cu zece grade de libertate. Dacă prin operațiile de mentenanță aceste elemente sînt înlocuite cu altele noi, atunci modelul simplificat este cel mai util în calculul de proiectare și pentru urmărirea menținerii parametrilor vibrațiilor în timpul funcționării utilajului.

Primită la redacție la 13 iulie, 1979.

BIBLIOGRAFIE

1. Șt. Bălan, *Complemente de mecanică teoretică*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1975.
2. I. Bardescu, *Studiul vibrațiilor la plăcile vibratoare pentru coopactarea pămînturilor*, Teză de doctorat. Institutul de construcții, București, 1971.
3. R. Belman, *Introducere în analiza matricealâ* (trad. din limba engleză), București, Edit. tehnică, 1969.
4. R.E.D. Bishop, G. M. L. Gladwell, S. Michaelson, *The matrix analysis of vibration*. Cambrige at the University Pres, 1965.
5. P. Bratu, *Cercetări privind dinamica cilindrilor compactori vibratori*, St. cerc. mec. apl., **35**, *3* (1976).
6. — *Cercetări experimentale asupra elementelor amortizoare din cauciuc*, Lucrările conferinței „Vibrații în construcția de mașini", Timișoara, 1978.
7. — *Dinamica mașinilor compactoare vibratoare autopropulsate mixte*. St. cerc. mec. apl., **38**, *3* (1979).
8. Gh. Buzdugan, L. Fetcu, M. Radeș, *Vibrațiile sistemelor mecanice*, București, Edit. Academiei R.S.R., 1975.
9. I. Constantinescu, C. Bolog, *Mecanica*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1978.
10. B. Demidovitch, I. Maron, *Eléménts de calcul numérique*, Editions Mir., 1973.
11. C. Harris, C. Crede, *Șocuri și vibrații.*, vol. I—II (trad. din limba engleză), București, Edit. tehnică, 1967.
12. A. M. Julien, *Dynamique de la voiture automobile*. tome I, Paris, 1968.
13. L. D. Landau, E. M. Lifsit, *Mecanica* (trad. din limba rusă) București, Edit. tehnică, 1966.
14. L. Dragoș, *Principiile mecanicii analitice*. București, Edit. tehnică, 1976.
15. D. Mangeron, N. Irimiciuc, *Mecanica rigidelor cu aplicații, în inginerie*, vol. I, București, Edit. tehnică, 1978.
16. Ch. Massonnet, ș.a. *Calculul structurilor la calculatoare electronice* (trad. din limba franceză), București, Edit. tehnică, 1974.
17. S. N. Mohsin, *Bodenmodelle zur theoretiscenn Untersuchung an dynamischen Verdichtungsgeräten und numerische Auswertung der Bodenparameter*, Baumaschine und Bautechnik., **13**, *10* (1966).

18. Șt. Mihăilescu, GH. Vlasiu, *Mașini de construcții și procedee de lucru*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1973.
19. Șt. Mihăilescu, V. Goran, P. Bratu, P. Zafiu, *Criterii de alegere a caracteristicilor optime pentru compactoarele vibratoare autopropulsate*, Revista Construcții, *3* (1978).
20. V. Nicolae, N. Truică, *Studiul vibrațiilor de torsiune ale unui sistem viscoelastic liniar cu mai multe grade de libertate cu aplicații la transmisia de forță a autovehiculelor*, Lucrările conferinței „Vibrații în construcția de mașini", Timișoara, 1975.
21. B. Persoz, *Introduction a l'etude de la rheologie*, Dunod, Paris, 1960.
22. N. V. Poturaev, I. V. Dirda, I. I. Krus, *Prieladnaia mehanic rezini*, izdatelstvo „Namkova Dumka" Kiev, 1975.
23. M. Rădoi, E. Deciu, *Mecanica*, București, Edit. didactică. și pedagogică, 1977.
24. M. Radeș, *Metode dinamice pentru identificarea sistemelor mecanice*, Edit. Academiei R.S.R., București, 1979.
25. Ch. Silaș, *Mecanica. Vibrații mecanice*, Edit. didactică și pedagogică, 1968.
26. C. Stanciu, *Vibrații și dinamica mașinilor*, Edit. Institutului de construcții, București, 1974, 1975.
27. C. Stanciu, Cr. Diaconu, P. Bratu, C. Axinte, I. Drăghici. *Metodă experimentală pentru determinarea momentelor de inerție principale a subansamblelor de mașini*, Lucrările sesiunii tehnico-științifice. IUG „PROGRESUL" — ICPUC, Brăila, 1977.
28. C. Stanciu, Cr. Diaconu, Fl. Bădulescu, P. Bratu, *Determinarea pulsațiilor proprii a sistemului de acționare rezemat elastic pe șasiul mașinilor de construcții*. Lucrările sesiunii de comunicări tehnico-științifice IUG „PROGRESUL" — ICPUC, Brăila, 1977.
29. N. Truică, *Un model matematic al sistemului oscilant format de suspensia și transmisia unui automobil aflat în regim de funcționare tranzitoriu*, St. cerc. mec. apl., **37**, *5* (1977).
30. Al. Vaicum, *Studiul reologic al corpurilor solide*, București, Edit. Academiei R.S.R., 1978.
31. R. Voinea, D. Voiculescu, V. Ceaușu, *Mecanica*, București, Edit. didactică, și pedagogică, 1975.
32. * * * *Prospecte ale firmelor de specialitate*: *DYNAPAC, AVELING — BARFORD LTD, MASCHINENBAU* (MBU), VIBROLL, BOMAG, CASE.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 39, nr. 2 martie—aprilie 1980

SUMAR

STUDII

Pag.

ECATERINA BORCIA, Considerații asupra modelării fenomenului de lichefiere 159

TRAIAN BĂDOIU, Algoritmi de generare automată de elemente finite conforme și de înaltă precizie pentru problemele la limită ale teoriei elasticității. I 167

VASILE PASCU, Considerații privind optimizarea traiectoriilor aproape verticale ale rachetelor care evoluează în mediu rezistent, cu restricții flexibile asupra modulului tracțiunii 183

MIHAI BUCULEI, SEVASTULA MIȚIS, Asupra vibrațiilor elementelor cinematice ale mecanismelor plane cu cuple de translație 195

MIRCEA V. SOARE, O metodă generală de rezolvare a plăcilor ortotrope dreptunghiulare 203

GABRIEL D. POPA, Extinderea soluției prin serii duble trigonometrice pentru placa rigidizată cu nervuri dispuse pe o singură parte 221

ȘTEFAN JERCA, Calculul structurilor static nedeterminate realizate din materiale cu comportare viscoelastică. II. Metoda deplasărilor 237

VALERIU BĂNUȚ, LUCIA MIHĂILESCU, Stabilitatea structurilor spațiale . . 247

RADU NEGRUȚIU, Introducere în analiza dinamică a structurilor cu dale. II 261

N. TRUICĂ, M. MITRACHE, Un arc elicoidal cilindric cu rigiditate progresivă cu sarcina, destinat suspensiei automobilului Dacia 1302 283

I. COȘEREANU, I. GOIA, S. VLASE, V. MIHALCICA, Metoda transmiterii nodale utilizată la ridicarea nedeterminărilor arborelui cotit 301

DORIN CONSTANTINESCU, GABRIEL TEODOR PRIPOAE, Metoda de calcul a diametrului sapelor cu trei conuri 311

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

CONSIDERAȚII ASUPRA MODELĂRII FENOMENULUI DE LICHEFIERE*

de ECATERINA BORCIA
nstitutul de fizica și tehnologia materialelor

Se definește fenomenul de lichefiere și se analizează lichefierea unui depozit saturat de pămînt slab coeziv, solicitat la bază de unde de forfecare ce se propagă vertical (induse de mișcarea seismică) sub încărcare verticală constantă.

1. INTRODUCERE

S-a constatat că în timpul mișcării seismice depozitele de pămînturi slab coezive, în general, și de nisipuri, în special, mărginite de suprafețe puțin permeabile își pot pierde stabilitatea prin reducerea considerabilă a rezistenței la forfecare, materialul ajungînd să se comporte ca un lichid. Acest fenomen și-a căpătat firesc numele de *lichefiere*.

Modul cel mai spectaculos de manifestare al lichefierii (observat și la noi în țară după cutremurul de la 4 martie 1977 în lunca Dunării și în albiile altor rîuri [1]) este fisurarea terenului și formarea de „vulcani" sau „furunculi" de nisip izolați sau aliniați în lungul fisurilor.

Comportarea depozitelor de nisip în timpul mișcărilor seismice depinde de gradul de îndesare al depozitului.

Depozitele de nisip de îndesare medie și pantă foarte redusă (de ordinul 0,5—2%) capătă în timpul șocului seismic deplasări orizontale însoțite de fisurări, deplasările maxime putînd ajunge de ordinul metrilor. Aceste mișcări se stabilizează după încetarea cutremurului.

Depozitele de nisip de pante abrupte și cu grad mic de îndesare pot ajunge la curgeri de versanți. Astfel, dacă înclinarea inițială a taluzului este de ordinul 18—36%, după cedare suprafața depozitului de nisip are înclinarea de aproximativ 7%.

Lichefierea unor depozite slab coezive aflate la adîncimi de ordinul metrilor determină alunecarea masivelor coezive situate deasupra.

De asemenea, în urma cutremurelor s-a mai observat secarea fîntînilor sau umplerea lor cu nisip, inundarea temporară a terenului și ejectarea unui amestec apă-nisip pînă la 2—3 metri.

În figura 1 sînt ilustrate, după Chu Haichif [2], principalele manifestări ale lichefierii prezentate mai sus.

În cele ce urmează vom prezenta cîteva considerații asupra modului în care se pot stabili condițiile necesare producerii lichefierii într-un depo-

* Lucrarea a fost prezentată la „Colocviul de Mecanică", Iași, 10—11 noiembrie, 1978.

zit de nisip saturat stratificat orizontal supus la forfecarea ciclică indusă de mișcarea seismică, sub o tensiune verticală constantă.

Vom considera că s-a produs lichefierea atunci cînd presiunea fluidului de saturare a crescut suficient de mult, astfel încît tensiunea efectivă să devină neglijabilă.

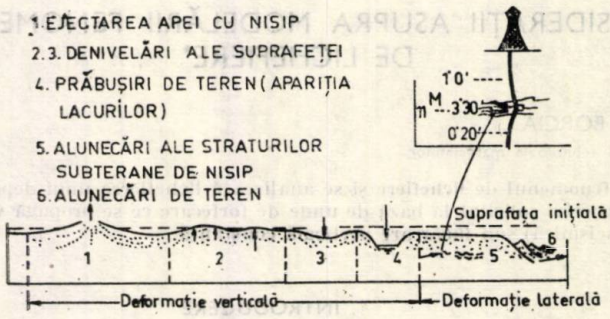


Fig. 1.

2. DESCRIEREA MECANICĂ A LICHEFIERII

Într-un depozit de nisip saturat, solicitat la bază de unde de forfecare orizontală ce se propagă vertical (fig. 2), apar tensiuni și deformații de forfecare care produc alunecări interparticulare. În cazul unui nisip uscat, aceste alunecări produc compactarea volumetrică. În cazul nisipului saturat alunecările granulelor solide micșorînd volumul porilor determină o creștere a presiunii fluidului de saturare, **W**. Dacă depozitul de nisip are frontierele slab permeabile sau posibilitatea de filtrare este redusă în raport cu viteza solicitării, ne situăm în cazul nedrenat deci tensiunea totală, τ, rămîne constantă sub o încărcare constantă. În acest caz, creșterea presiunii fluidului de saturare are ca rezultat reducerea tensiunii efective, σ', (în cazul nedrenat $\sigma = \sigma' + \mathbf{W}$).

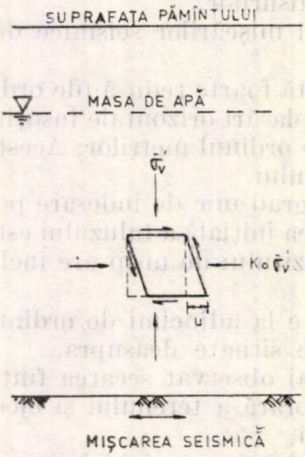


Fig. 2.

Diminuarea tensiunii efective permite o refacere a structurii scheletului solid. Această revenire nu este totală, particulele nereușind să ajungă în pozițiile ocupate înaintea alunecării. În cazul extrem, în timpul cutremurului, presiunea lichidului interstițial poate să crească pînă cînd tensiunea efectivă devine nulă. Atunci nisipul nu mai opune o rezistență semnificativă și se comportă ca un fluid, producîndu-se astfel fenomenul de lichefiere.

Se observă că pentru modelarea fenomenului de lichefiere trebuie formulate legi care să descrie atît comportarea scheletului solid, cît și comportarea fluidului de saturare. De asemenea, trebuie stabilit modul de interacțiune dintre aceste două aspecte.

Modul de deformare al scheletului solid și variația presiunii lichidului interstițial depind de caracteristicile geomecanice ale depozitului analizat, și anume : tipul nisipului, densitatea, tipul de amortizare, condițiile de drenare.

În cazul forfecării simple, rezistența nisipului depinde de modulul de forfecare care la rîndul lui depinde de tensiunea efectivă normală și de mărimea deformației de forfecare.

În cazul forfecării ciclice, nisipurile se comportă ca un material ecruisabil deoarece alunecarea granulelor solide producînd compactarea volumetrică mărește rezistența la forfecare și valoarea coeficientului de împingere laterală, K_0.

Pentru caracterizarea comportării mecanice a unui depozit saturat de pămînturi slab coezive, supus la forfecare ciclică, trebuie cunoscute : valoarea inițială a modulului de forfecare „in situ", variația modulului de forfecare în raport cu deformația de forfecare, modul de generare și disipare a presiunii fluidului de saturare, variația tensiunii normale efective, modul de ecruisare, tipul de amortizare etc. Vom analiza cîteza din aceste aspecte.

3. ECUAȚIA CONSTITUTIVĂ

Considerînd diagrama ($\tau - \gamma$) în cazul static (fig. 3), unde

τ este intensitatea tensorului tensiune σ,

γ — intensitatea tensorului deformație ε,

se notează :

G_{m0} — valoarea inițială a modulului de forfecare,

τ_{m0} — valoarea maximă a tensiunii de forfecare pe care o suportă masivul fără a ajunge la rupere.

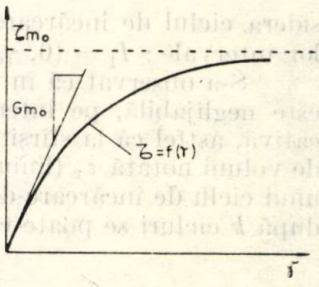


Fig. 3.

S-a arătat experimental că G_{m0} și τ_{m0} sînt funcții de tensiunea efectivă verticală, σ'_v — coeficientul de împingere laterală, K_0 — unghiul de frecare internă, Φ — valoarea inițială a indicelui de pori e,

$$G_{m0} = G_{m0}(\sigma'_v, K_0, \Phi, e), \tag{1}$$

$$\tau_{m0} = \tau_{m0}(\sigma'_v, K_0, \Phi, e). \tag{2}$$

Cum este firesc, răspunsul inițial al depozitului de pămînturi slab coezive la solicitarea ciclică de forfecare indusă de mișcarea seismică va depinde de G_{m0} și τ_{m0}. Deci, ecuația constitutivă pentru încărcarea inițială va avea forma generală :

$$\tau = f(\gamma, G_{m0}, \tau_{m0}). \tag{3}$$

Dacă din punctul (γ^*, τ^*) al curbei tensiune-deformație se face o descărcare urmată de o reîncărcare (fig. 4), ecuația constitutivă pentru ciclul de încărcare-descărcare va fi :

$$\frac{\tau - \tau^*}{2} = f\left(\frac{\gamma - \gamma^*}{2}, G_{mk}, \tau_{mk}\right). \tag{4}$$

În literatura de specialitate sînt citate relații obținute experimental pentru calculul valorilor G_{mk} și τ_{mk} în funcție de valorile inițiale G_{m0} și τ_{m0} și forme empirice pentru ecuațiile constitutive (3) și (3′), [3, 4, 5].

Studiile experimentale au arătat că pe parcursul unui ciclu de forfecare apare o variație de volum. Dacă se notează cu γ_{ak} valoarea maximă a deformației de forfecare atinsă pe ciclul de încărcare k (fig. 5), vom con-

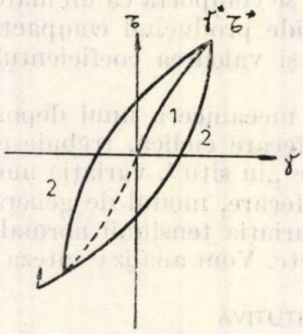


Fig. 4. — Primul ciclu de încărcare.

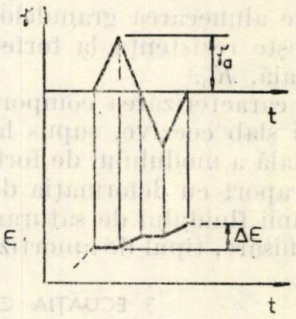


Fig. 5. — Variația volumului pe parcursul unui ciclu de forfecare.

sidera ciclul de încărcare-descărcare realizat prin succesiunea următoarelor intervale : $I_1 = (0, \gamma_{ak})$, $I_2 = (\gamma_{ak}, 0)$, $I_3 = (0, -\gamma_{ak})$, $I_4 = (-\gamma_{ak}, 0)$.

S-a observat că în timp ce pe intervalele I_1 și I_3 variația volumului este neglijabilă, pe intervalele I_2 și I_4 variația volumului este semnificativă, astfel că la sfîrșitul ciclului k de forfecare se înregistrează variația de volum notată $\bar{\varepsilon}_k$ (liniuța suprapusă indică variația mărimii pe parcursul unui ciclu de încărcare-descărcare). Deformația de volum totală realizată după k cicluri se poate calcula recurent după formula

$$\varepsilon_k = \varepsilon_{k-1} + \bar{\varepsilon}_k.$$

În conformitate cu aceste date experimentale rezultă că ecuația constitutivă (3′) este valabilă doar pe intervalele I_1 și I_3, pe intervalele I_2 și I_4 impunîndu-se o corecție care să permită luarea în considerare a variației de volum apărute. Aceasta se poate realiza printr-o ecuație constitutivă proprie unui material ecruisabil, în care parametrul de ecruisare este deformația de volum,

$$\tau = h(\gamma, G_{mk}, \tau_{mk}, \varepsilon_k). \tag{4}$$

Deci ecuația constitutivă pentru ciclul de forfecare k este de tipul (3′) dacă $\gamma \in I_1 \cup I_3$ și de tipul

$$\frac{\tau - \tau^*}{2} = h\left(\frac{\gamma - \gamma^*}{2}, G_{mk}, \tau_{mk}, \varepsilon_k\right) \tag{4′}$$

dacă $\gamma \in I_2 \cup I_4$.

4. VARIAȚIA PRESIUNII FLUIDULUI DE SATURARE

Se consideră un element de nisip saturat, de volum unitar și de porozitate n, aflat sub tensiunea efectivă verticală, σ'_v, și orizontală, $K_0\sigma'_v$ (fig. 2).

S-a arătat în §2 că în urma alunecărilor interparticulare se produce o creștere a presiunii fluidului de saturare. Pentru ciclul de încărcare-descărcare k, această creștere a presiunii din pori se va nota $\mathbf{W}_k$. Creșterea totală a presiunii de saturare după k cicluri de forfecare se poate calcula recurent cu formula

$$\mathbf{W}_k = \mathbf{W}_{k-1} + \overline{\mathbf{W}}_k. \tag{5}$$

În §3 s-a arătat că pe ciclul de forfecare k apare variația de volum $\bar{\varepsilon}_k$.

Considerînd fluidul de saturare incompresibil, în cazul solicitării nedrenate (viteza de solicitare este foarte mare în raport cu viteza de filtrare) nu au loc variații ale volumului. Aceasta înseamnă că deformația de compactare volumetrică potențială este contracarată de deformația datorată creșterii presiunii fluidului de saturare, $\mathbf{W}_k$, deci reducerii corespunzătoare a tensiunii efective, prin care se permite o refacere a scheletului solid.

Notînd cu E_r modulul de revenire al nisipului, deformația datorată lui $\overline{\mathbf{W}}_k$ va fi $\overline{W}_k/E_r$. Deci,

$$\bar{\varepsilon}_k = \frac{\overline{W}_k}{E_r}, \tag{6}$$

unde $\overline{W}_k$ este presiunea hidrostatică (primul invariant al tensorului $\mathbf{W}_k$).

Modulul de revenire E_r depinde de valoarea inițială și cea curentă a tensiunii efective verticale,

$$E_r = E_r(\sigma'_v, \sigma'_{v0}). \tag{7}$$

În literatura de geotehnie se întîlnesc forme empirice pentru relația (7), [5].

Dacă fluidul de saturare este compresibil și se notează K_w modulul volumetric (evident $K_w \gg E_r$), atunci

$$\bar{\varepsilon}_k = \overline{W}_k \left(\frac{1}{E_r} + \frac{n}{K_w} \right). \tag{6'}$$

Experimental s-a arătat că variația deformației de volum pe ciclul de forfecare k depinde de deformația de volum acumulată în ciclurile anterioare de încărcare-descărcare, ε_{k-1}, și de amplitudinea deformației de forfecare pe ciclul de forfecare curent, γ_{ak}, deci

$$\bar{\varepsilon}_k = (\varepsilon_{k-1}, \gamma_{ak}). \tag{8}$$

Variația presiunii fluidului de saturare într-un ciclu de forfecare respectă legea (6) sau (6′), după ipoteza de compresibilitate ce se ia în considerare, în care intervine variația (8) deformației de volum produsă pe acel ciclu.

În continuare vom folosi rezultatele obținute în paragrafele anterioare pentru analiza lichefiabilității unui depozit de pămînt slab coeziv.

5. PROCEDEU ITERATIV DE ANALIZA LICHEFIABILITĂȚII

Vom considera un depozit saturat de pămînturi slab coezive, stratificat orizontal, solicitat la bază de unde de forfecare ce se propagă vertical (induse de mișcarea seismică) în condiții nedrenate.

Se consideră cunoscută starea inițială de deformare (ε_0 și γ_0) și tensiunea efectivă inițială σ'_0. Cunoscînd modul de încărcare ciclică (numărul de cicluri, frecvența ciclurilor, tensiunea de forfecare aplicată pe fiecare ciclu) și presupunînd încărcarea verticală constantă, vom determina numărul de cicluri de încărcare necesar producerii lichefierii depozitului analizat. Aceasta se va realiza prin următorul procedeu iterativ :

pasul I — se determină deformația de forfecare corespunzătoare tensiunii de forfecare aplicată pe ciclul curent folosind ecuații de tipul (3) și (4),

pasul II — se determină $\bar{\varepsilon}_k$ din relația (8),

pasul III — se determină modulul de revenire, E_r, pentru ciclul curent, folosind relația (7),

pasul IV — se determină creșterea presiunii fluidului de saturare pe ciclul curent, folosind relația (6) sau (6′),

pasul V — se calculează (din relația (5)) valoarea presiunii fluidului de saturare în urma creșterii produse pe ciclul curent,

pasul VI — se calculează valoarea redusă a tensiunii efective

$$\sigma'_k = \sigma'_{k-1} - \overline{W}_k,$$

pasul VII — se repetă pașii I—VI pentru ciclul de forfecare următor pînă cînd σ'_k devine zero și se reține numărul ciclului.

Dacă numărul rezultat prin acest procedeu este superior numărului de cicluri la care se presupune că va fi supus depozitul de pămînt analizat, se trage concluzia că această solicitare nu poate produce lichefierea masivului.

Dacă, însă, numărul rezultat în urma procedeului descris este inferior numărului de cicluri de încărcare la care se presupune că va fi solicitat masivul, se trage concluzia că în timpul acestei solicitări lichefierea se va produce și se poate calcula valoarea maximă a tensiunii de forfecare suportată de masiv fără să ajungă la lichefiere.

Evident, acest procedeu devine utilizabil atunci cînd pentru funcțiile ce intervin în relațiile (1)—(8) se aleg acele forme care descriu cel mai exact ceea ce fiecare din aceste relații își propune. Astfel, acest procedeu constituie un instrument de analiză a lichefiabilității depozitelor saturate supuse la încărcări ciclice de forfecare sub încărcare verticală constantă, în condițiile în care frontierele depozitului sînt suprafețe puțin permeabile

în raport cu solicitarea aplicată, făcînd acceptabilă ipoteza că fluidul de saturare nu drenează în timpul acestui proces. Dacă există posibilitatea de filtrare, atunci variația presiunii fluidului de saturare va rezulta dintr-o ecuație de tipul (6) sau (6′) corelată cu o lege de filtrare.

6. CONCLUZII

În articol au fost prezentate principalele manifestări ale fenomenului de lichefiere și a fost descris mecanismul de producere al acestui fenomen.

S-au stabilit ecuațiile necesare modelării fenomenului de lichefiere și condiția ce trebuie satisfăcută pentru ca lichefierea să se producă.

S-a propus un procedeu iterativ pentru analiza lichefiabilității unui depozit saturat de pămînturi slab coezive solicitat la bază de unde de forfecare induse de mișcarea seismică, sub încărcare verticală constantă, considerînd că nu are loc filtrarea fluidului de saturare.

Primită la redacție la 21 martie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. V. Perlea, *Caracterizarea terenurilor de fundare din punct de vedere al lichefierii*, Conferința de seismologie, București, 1978.
2. Chu Haichih, *Lichefaction of sand during earthquake and structural index of lichefaction*, Conferința de seismologie, București, 1978.
3. B. H. Seed, P. De Alba, C. K. Chan, *Sand lichefaction in large scale simple shear tests*, J. of geotch. eng. div., sept. 1978.
4. B. H. Seed, C. K. Chan, K. Mori, *Influence of seismic History on lichefaction of sand*, J. of geotch. eng. div., ian., 1978.
5. V. L. Streeter, E. B. Wylie, *Characteristic method for lichefaction of soils*, Proc. of the "Numerical methods in geomechanics", Virginia, 1976.

ALGORITMI DE GENERARE AUTOMATĂ DE ELEMENTE FINITE CONFORME ŞI DE ÎNALTĂ PRECIZIE PENTRU PROBLEMELE LA LIMITĂ ALE TEORIEI ELASTICITĂŢII. I

de TRAIAN BĂDOIU
INCREST — Bucureşti

Lucrarea se ocupă de generarea de elemente finite de precizie, ridicată pentru orice problemă la limită căreia i se poate aplica metoda Galerkin sau Ritz, în special pentru cele ale teoriei elasticităţii.
Se ia în dezbatere ce se înţelege prin element conform şi care sînt posibilităţile de îmbunătăţire a preciziei.
Posibilitatea generării automate a oricărui tip de element finit a condus la construcţia de programe cu avantaje deosebite în ceea ce priveşte:
1) uşurinţa de folosire a oricărei clase de continuitate pentru funcţiile necunoscute;
2) uşurinţa îmbunătăţirii preciziei prin schimbarea clasei de continuitate, fără schimbarea idealizării nodurilor şi elementelor;
3) uşurinţa îmbunătăţirii preciziei prin schimbarea idealizării elementelor, pe aceeaşi clasă de continuitate şi idealizare a nodurilor.

INTRODUCERE

Este cunoscut faptul că metoda elementului finit este legată în principal de problemele corpurilor deformabile, unde fiecare problemă elementară (întindere-compresiune, torsiune, încovoiere, stare plană etc.) are tipul ei de element finit. Mai mult decît atît, în cadrul aceleiaşi probleme există mai multe tipuri de elemente după: locul ocupat, numărul punctelor şi gradelor de libertate pe punct ales în descrierea funcţiilor problemei, forma sa etc.

Astfel, în problema încovoierii plăcilor plane (modelul Love-Kirchhoff) se cunosc mai bine de zece tipuri de elemente, parte din ele nesatisfăcătoare în anumite situaţii. Acest lucru scoate în evidenţă două aspecte:

1) fiecare nou element creat a apărut în urma unor situaţii specifice noi pe care elementele precedente nu le puteau prinde, lucru ce arată că metoda elementului finit este o metodă a specificului;

2) crearea multor elemente a fost făcută fără o orientare calitativă, autorii înţelegînd că este suficient să reprezinte funcţiile necunoscute printr-un număr de parametri (de regulă, valorile funcţiilor în diverse puncte) pe interiorul elementului, lucru afirmat din nefericire şi în unele cărţi.

În cel de-al doilea caz ne referim la elementele neconforme elaborate (întrebuinţate), în majoritate, la începuturile dezvoltării acestei metode şi, ce este mai regretabil, astfel de elemente se mai elaborează (întrebuinţează) şi astăzi.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 2, 1980, P. 167—182

Legat de acest aspect, lucrarea ia în dezbatere ce înseamnă element conform pentru mediile deformabile, generalizează noțiunea pentru probleme la limită rezolvabile cu metoda Ritz sau Galerkin, analizează posibilitățile de îmbunătățire a preciziei pentru aceeași idealizare a nodurilor cu sau fără păstrarea idealizării în elemente. De asemenea, adoptă un mod de reprezentare a funcțiilor pe interiorul elementelor, astfel încît pretențiile de continuitate sau discontinuitate la interfața elementelor să fie satisfăcute cu ușurință, oricare ar fi acestea, și să permită o programare ușoară.

Pentru problemele liniare unidimensionale se dau algoritmii de construcție ai matricei caracteristice (matricei de rigiditate — pentru problemele de rezistență), corespunzătoare termenului general $x^{p} \cdot z^{(i)} \cdot w^{(j)}$.

Pe baza celor stabilite pentru problemele unidimensionale, se construiesc matricele caracteristice corespunzătoare termenilor pătratici cu caracter general pentru problemele bidimensionale și tridimensionale.

Pentru problemele la limită liniare unidimensionale (modelate fie prin funcționale pătratice, ecuații diferențiale liniare sau ecuații integrale) autorul a pus la punct un program de calcul cu caracter general, destul de flexibil în ceea ce privește introducerea datelor oricărei probleme la limită, de tipul celor de mai sus. Pentru problemele la limită bidimensionale, dată fiind complexitatea problemelor datorată compunerii din mulți termeni, în scopul ușurării introducerii datelor, s-a preferat organizarea programului pe tipuri de elemente (probleme).

Un tip de element înseamnă de fapt o problemă, la care, parametrii de interpolare — ce urmăresc continuitatea sau discontinuitatea la interfața elementelor, funcțiilor necunoscute — se stabilesc prin idealizare. Astfel, au fost create elemente pentru ecuația lui Poisson, problema plană în mecanica solidelor deformabile, încovoierea plăcilor plane, încovoierea plăcilor sandwich etc.

Cu programele amintite se rezolvă o serie de probleme unidimensionale și bidimensionale, cum ar fi : problema vibrațiilor barelor, problema plană a elasticității, problema încovoierii plăcilor (modelul Love-Kirchhoff), problema încovoierii plăcilor sandwich etc. Din rezultatele obținute se trag concluzii referitoare la convergența în anumite clase, îmbunătățirea preciziei prin schimbarea idealizării elementelor (fără schimbarea idealizării nodurilor), îmbunătățirea preciziei prin schimbarea clasei minime de continuitate (fără schimbarea idealizării nodurilor și elementelor).

§ 1. ELEMENTE CONFORME ȘI ÎMBUNĂTĂȚIREA PRECIZIEI

Plecînd de la ceea ce se înțelege prin element conform în problemele mediilor continui deformabile vom încerca să generalizăm această noțiune în cazul tuturor problemelor la limită liniare. Noțiunea de element conform a fost încetățenită de problema încovoierii plăcilor plane, impusă de observația că elementele triunghiular și patrulater, la care parametrii de reprezentare sînt numai funcția (deplasarea după normală) și gradientul ei (rotațiile din colțuri), nu corespund pentru multe situații. Acest fapt a fost justificat prin aceea că funcția deplasare astfel aleasă nu îndeplinește condițiile de continuitate ale mediului la interfața dintre

elemente, în sensul că derivata după normală la interfața elementelor este discontinuă, lucru care ar echivala cu rupturi după aceste linii de interfață (mai puțin nodurile). Dacă privim acum cele două formulări locală și globală, prima necesită derivatele continui pînă la ordinul patru (dacă încărcarea ar fi continuă), iar a doua derivatele de ordinul doi de pătrat integrabil. Dacă încărcarea ar fi concentrată (reprezentată numai de forțele normale), atunci formularea „locală" în distribuții ar pretinde funcția cu derivatele pînă la ordinul doi inclusiv continui. Dacă și încărcarea reprezentată de momentele exterioare ar fi concentrată, atunci modelul „local" ar cere funcția cu derivatele pînă la ordinul unu inclusiv continui. Observăm că minimul de continuitate impus de maximul de discontinuitate al încărcărilor coincide cu cerința de continuitate a mediului (condiție oarecum marcată în ambele formulări). De aici conchidem că clasa minimă de continuitate este aceea dată de formularea locală în distribuții, deoarece condițiile de continuitate sînt prinse implicit în ambele formulări. Odată stabilită clasa minimă de continuitate, fie că folosim metoda Galerkin pentru formularea locală, fie că folosim metoda Ritz pentru formularea globală, rezultatele sînt aceleași. Ilustrăm printr-un exemplu care este pericolul folosirii unei clase inferioare. Să considerăm problema încovoierii barelor.

A) Cazul în care bara este continuă (nu prezintă articulații în interior).

Cele două formulări „locală", respectiv globală, revin la :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} D(x) \frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2} = q(x)$$

și

$$\min_w \left\{ \int_\Omega \frac{D}{2} (w'')^2 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega wq(x) \, \mathrm{d}x \right\}, \quad \Omega = [0, l], \quad w'' = \frac{d^2 w}{\mathrm{d}x^2}$$

pentru situația din figura alăturată (fig. 1), adică $q(x) = F\delta(x - l/2)$ și condițiile limită : încastrată la capătul din stînga și pe rînd : încastrată, simplu rezemată și liberă, la capătul din dreapta. Dacă la această problemă folosim clasa lui $w(x) \in C^0$ $[0,l]$ și structura împărțită în două elemente, la care pe interiorul lor restricția lui $w(x)$ este polinom de gradul trei (soluția exactă locală) cu continuitatea la interfață numai a lui $w(x)$, avem :

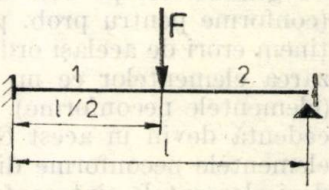


Fig. 1

1. Pentru condițiile limită de încastrare la ambele capete, săgeata la mijloc mai mare de patru ori decît cea reală ;

2. Pentru condițiile limită de încastrare la capătul din stînga și simplu rezemată la cel din dreapta, săgeata la mijloc mai mare de $2\sqrt{5}$ decît cea reală ;

3. Pentru condițiile limită de încastrare la capătul din stînga și liberă la cel din dreapta, matricea de rigiditate a structurii rezultă singulară.

Menționăm că dacă ceream pentru $w(x)$ continuitate și pentru derivata întîia (adică foloseam clasa minimă $C^1[0, l]$) la interfața celor două elemente, atunci obțineam pe idealizarea de mai sus soluția exactă.

Din exemplul de mai sus rezultă clar pericolul prezentat de aceste elemente neconforme care nu asigură clasa minimă de continuitate. Folosirea acestor elemente nu numai că conduce la o aproximare necontrolată, ci merge pînă acolo să asocieze mai multe soluții fenomenului sau nici una (cazul matricei singulare).

B) Să considerăm acum problema pentru care, în punctul de interfață $x = l/2$, bara din figura 1 ar prezenta o articulație. Această articulație realizează discontinuitatea rotației secțiunii transversale și totodată face imposibilă (întrerupe) transmiterea momentului interior de la un element la celălalt — forța de legătură dintre cele două elemente rămînînd numai forța tăietoare, consecință a continuității deplasării $w(x)$ —. Faptul că momentul nu se poate transmite de la un element la celălalt, înseamnă că rigiditatea în încovoiere în acest punct este zero (flexibilitatea ∞). Din faptul că modelul local are la bază ipoteza Bernoulli, rezultă că $\frac{dw}{dx}$ este discontinuu la interfața ($x = l/2$) dintre elemente. În această situație (deplasările : w = continuu, w' = discontinuu), putem spune că avem o discontinuitate parțială de mediu. Această problemă o putem trata deci ca fiind compusă din două probleme A) avînd în comun deplasarea w din punctul $x = l/2$ (w — continuă pe $[0, l]$). Din acest motiv punctul $x = l/2$ trebuie să fie neapărat punct de interfață.

Ținînd seamă de acest lucru formularea globală (variațională) rămîne valabilă (în baza faptului că integrala este aditivă de interval), iar formularea locală poate fi prelungită în spațiul funcțiilor generalizate (distribuțiilor) dacă pentru spațiul fundamental luăm spațiul de reprezentare a lui $w(x)$, spațiu ce respectă condițiile de continuitate ale clasei minime mai puțin discontinuitățile (de mediu) inferioare clasei minime.

Dacă folosim în această problemă elementele de mai sus (polinoame de gradul trei pe cele două subintervale) cu continuitatea lui w și w' (conforme pentru prob. precedentă) la interfața celor două elemente obținem erori de același ordin de mărime ca în problema precedentă la utilizarea elementelor ce nu asigurau clasa minimă de continuitate a lui w (elementele neconforme). Deci elementele conforme pentru problema precedentă devin în acest caz neconforme, periculoase. Dacă folosim acum elementele neconforme din cazul A) obținem soluția exactă a problemei, deci elementele sînt conforme pentru problema B).

Conchidem că, clasa minimă de continuitate (relativă la întreg intervalul) este stabilită de maximum de discontinuitate acceptat al factorilor exteriori cu respectarea discontinuităților (impuse de mediu) inferioare. Se notează această mulțime cu $\mathscr{B}$.

Deci, un element este CONFORM dacă la interfața cu celelalte elemente respectă condițiile de discontinuitate și continuitate impuse de clasa $\mathscr{B}$. Așadar, parametrii de interpolare (Hermite sau Birkkoff) de la interfața elementelor sînt în mod obligatoriu cei ce asigură clasa minimă de continuitate mai puțin derivatele discontinui din punctele de discontinuitate.

Din cele de mai sus reiese că numai atunci putem rezolva bine o problemă cînd cunoaştem clasa minimă de continuitate, precum şi punctele din domeniul unde funcţiile acestei clase au discontinuităţi inferioare. Acest lucru implică ca odată cu cunoaşterea formulării locale (dacă o cunoaştem) să cunoaştem şi discontinuităţile acceptate de factorii exteriori în baza cărora să putem determina clasa minimă de continuitate.

În cazul în care problema prezintă şi discontinuităţi, în funcţiile necunoscute, inferioare clasei minime de continuitate, atunci acestea trebuie cunoscute şi prinse ca interfaţă a elementelor. În această situaţie, formulării locale i se poate aplica metoda Galerkin, păstrînd la interfaţa cu discontinuităţi inferioare, numai continuităţile rămase din clasa minimă de continuitate. Din cele de mai sus reiese că pentru aplicarea metodei elementului finit cu succes trebuie cunoscut fenomenul fizic foarte bine atît în ceea ce priveşte acţiunea factorilor exteriori (stabilirea clasei minime de continuitate), cît şi în ceea ce priveşte comportarea lui interioară (stabilirea discontinuităţilor inferioare clasei minime), şi mai ales, mijloacele de modelare matematică a principiilor, legilor şi ipotezelor suplimentare ce au stat la baza formulării finale căreia îi căutăm soluţia. Pentru metoda elementului finit formularea matematică a unei probleme trebuie să conţină toate aceste aspecte.

Spre exemplu, problema barei cu articulaţie la mijloc s-ar formula :

$$\text{I)}\quad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} D(x) \frac{\mathrm{d}^2 w(x)}{\mathrm{d}x^2} = q(x),\ D(x) = \begin{cases} D, & x \in [0, l/2), \\ 0, & x = l/2, \\ D, & x \in (l/2, l], \end{cases} \qquad \dot{q}(x) = F\,\delta(x - l/2),$$

$$w\Big|_{x=0} = 0,\ w'\Big|_{x=0} = 0\,;\ w\Big|_{x=l} = 0,\ w'\Big|_{x=l} = 0$$

şi

a) $q(x)$ — cel mult $\delta'(x - x_j)$ (momente concentrate în $x_j \neq l/2$),

b) w' — discontinuă în $l/2, w' = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$.

Din I) + a) deducem clasa minimă de continuitate $C^1[(0, l) - l/2]$. Condiţia b) ar fi în plus dacă am înţelege că atunci cînd coeficientul D al derivatei de ordinul p se anulează, avem discontinuitate pentru derivata „$w^{(p-1)}$" de ordinul $p - 1$. Deci, $\mathscr{B} = \{f : f \in C^1[(0, l) - l/2]$ şi $f \in C^0(0, l)\}$.

Cum determinăm clasa minimă de continuitate dacă cunoaştem numai formularea globală (variaţională)? Şi în acest caz maximul de discontinuitate pentru $q(x)$ va indica clasa minimă. Pentru exemplul nostru :

$$\text{II)}\quad \min_w \left\{ \int_0^l \frac{D}{2} (w'')^2\, \mathrm{d}x - \int_0^l w(x)\, q(x)\, \mathrm{d}x \right\},\quad D(x) = \begin{cases} D, & x \in [0, l] - \{l/2\}, \\ 0, & x = l/2, \end{cases}$$

$$q(x) = F\delta(x - l/2)$$

*** Formularea rămîne locală atîta timp cît încărcările nu sînt funcţii generalizate (distribuţii).

clasa maximă de discontinuitate pentru $q(x)$ ($\delta'(x - x_j)$, $x_j \neq l/2$) ne dă că distribuția $\int_0^l w\delta'(x - x_j) = -w'(x_j)$, lucru care implică continuitatea lui w' pentru toți $x_j \in [0, l] - \{l/2\}$, care nu sînt articulații. Este evident că nu se pot face încărcări cu momente concentrate prin articulații.

Introducerea lui a) în locul analizei de continuitate a mediului și implicațiilor acestei continuități asupra funcțiilor necunoscute s-a făcut cu scopul de a ușura activitatea de determinare a clasei minime, ținînd seamă de faptul că analiza de continuitate este foarte dificilă pentru multe probleme.

Îmbunătățirea preciziei

După cum am văzut, la cele două probleme discutate mai sus, obțineam soluția exactă dacă foloseam elementele potrivite (conforme cu problema). Ce se întîmplă dacă încărcarea este ca în figura 2? Care sînt restricțiile polinomiale ale spline-ului de interoplare?

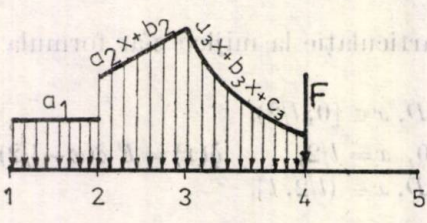


Fig. 2

În această situație, dacă pe elementul 1 polinomul de interpolare locală este de gradul patru, pe 2 de gradul cinci, pe 3 de gradul șase, pe 4 de gradul trei, unde pe lîngă parametri ce asigură clasa minimă de continuitate mai puțin discontinuitățile inferioare, folosim în interpolările locale (pînă la completare), parametri (valoarea funcției și a derivatelor) din puncte interioare sau alții de la interfață, obținem soluția exactă pentru I.

După cum se vede, din cele de pînă acum, idealizarea domeniului a fost impusă atît de singularitățile lui, cît și de natura încărcării.

Dacă avem o sarcină continuă $q(x)$ ce a fost aproximată suficient de bine cu o linie poligonală (spline-ul de gradul unu de interpolare) și nodurile de interfață sînt luate chiar nodurile spline-lui, cu elemente polinoame de gradul cinci cu respectarea clasei minime de continuitate și a discontinuităților inferioare, găsim soluția exactă pentru problema încovoierii barei.

Dacă aceeași sarcină continuă $q(x)$ este aproximată cu spline-ul cubic, atunci pentru soluția exactă trebuie să luăm pentru interpolarea locală polinoame de gradul șapte.

În ceea ce privește parametri suplimentari din interpolarea locală, în acest caz (unidimensional) este bine să fie derivate de ordin cît mai mic (valoarea funcției în puncte interioare), întrucît odată cu ordinul de derivare al parametrilor se slăbește și condiționarea matricei individuale de rigiditate care duce la o proastă stabilitate a modelului numeric. În cazul bidimensional și tridimensional nu mai poate fi stabilită cu ușurință forma exactă, corespunzătoare încărcării, a polinomului de interpolare locală și, pentru îmbunătățirea preciziei se poate cere continuitate la interfață a derivatelor imediat superioare clasei minime de continuitate, lucru care se realizează cu ușurință, după cum rezultă din paragrafele ce urmează.

§2. GENERAREA AUTOMATĂ A MATRICEI CARACTERISTICE PENTRU PROBLEMELE LINIARE UNIDIMENSIONALE

Fie e_k un element unidimensional $[0, l]$ cu discretizarea $\{x_1, x_2, \ldots x_{s_z}\}$ și $z(x)$ o funcție necunoscută. Presupunem că funcția $z(x)$ are de îndeplinit condițiile : la interfața din stînga (nodul 1) continuitatea funcției împreună cu primele $r_1 - 1$ derivate, la interfața din dreapta (nodul s_z) continuitatea funcției cu primele $r_{s_z} - 1$ derivate și, în punctele interioare 2, 3, ..., $s_z - 1$ atîția parametrii încît $\sum_{i=1}^{s_z} r_i = m$; $m - 1$ fiind gradul polinomului de interpolare Hermite. Dacă din cele r_1, respectiv r_{s_z} derivate de la interfață avem o parte discontinuă, atunci efectuăm o interpolare Birkkoff, modelul de calcul rămînînd identic.

Considerăm că avem de evaluat :

$$\int_0^l x^p z^{(i)} w^{(j)} \, dx = I(z, w), \tag{1}$$

care poate proveni din proiecția unui termen din operatorul diferențial al problemei pe funcția $w(x)$ sau un termen al distribuției (dacă sistemul diferențial este scris în distribuții) și atunci $w(x)$ aparține spațiului fundamental al problemei (care poate fi clasa minimă de continuitate cu respectarea singularităților), sau poate constitui un termen al funcționalei exprimării variaționale a problemei (aici w poate fi și z sau o altă funcție necunoscută).

Spline-urile polinomiale ale celor două funcții le notăm tot cu $z(x)$, respectiv $w(x)$.

Interpolarea Hermit-Birkkoff ne dă polinomul de gradul m, restricție a lui $z(x)$ la acest element e_k :

$$z(x) = [1, x, \ldots, x^{m-1}] \, DZ = XDZ, \tag{2}$$

unde

$$X = [1, x, \ldots, x^{m-1}], \; Z^T = [z_1, z_1', \ldots, z_1^{(r_1-1)} ; z_2, z_2', \ldots ; z_s, \ldots, z^{r_s-1},].$$

La determinarea matricei de interpolare D, dacă $m > 10$, este bine să se folosească însuși polinomul de interpolare Hermit și nu rezolvînd sistemul de interpolare, întrucît începînd cu ordinul zece acest sistem devine din ce în ce mai slab condiționat.

Pentru cerința ca $w(x)$ să fie continuă împreună cu primele $r_1' - 1$ și $r_{s_w}' - 1$ derivate la cele două capete (nodul 1, respectiv S_w) și să fie polinom de gradul $n - 1$ pe interiorul elementului e_k, avem

$$w(x) = [1, x, \ldots, x^{n-1}] \, \tilde{D}W = \tilde{X}\tilde{D}W, \tag{3}$$

unde

$$W^T = [w_1, w_1', \ldots, w_1^{r_1'-1} ; w_2, w_2', \ldots ; w_{s_w}, w_{s_w}', \ldots, w^{r_{s_w}'-1}],$$

$$\tilde{X} = [1, x, \ldots, x^{n-1}].$$

Cu relațiile (2) + (3), (1) devine :

$$I(z, w) = \int_0^l x^p \, z^{(i)} \, w^{(j)} \, \mathrm{d}x = \int_0^l x^p \, (\widetilde{X}^{(i)} \widetilde{D} w)^T \, (X^{(j)} DZ) \, \mathrm{d}x =$$

$$= w^T \widetilde{D}^T \left(\int_0^l x^p \, (\widetilde{X}^{(i)})^T \, X^{(j)} \, \mathrm{d}x \right) DZ = w^T k_{ij}^p \, Z. \tag{4}$$

Deci matricea caracteristică (rigiditate) pentru termenul de la (1), care are caracter general, este

$$k_{ij}^p = \widetilde{D}^T \left(\int_0^l x^p \, (\widetilde{X}^{(i)})^T X^{(j)} \, \mathrm{d}x \right) D = \widetilde{D}^T \bar{X} D. \tag{5}$$

Pentru cazul în care I reprezintă restricția unei probleme variaționale la elementul e_k, gradientul lui I referitor la parametrii lui W, respectiv Z, este :

$$\nabla_w (I) = k_{ij}^p \, Z, \quad \nabla_z (I) = (k_{ij}^p)^T \, W.$$

Evident, dacă $w(x) \equiv z(x)$ $(W \equiv Z)$, avem

$$\nabla_z (I) = \{k_{ij}^p + (k_{ij}^p)^T\} \, Z,$$

unde

∇_w — restricția gradientului lui (1) la componentele lui W.

Ținînd seamă că

$$\widetilde{X}^{(i)} = [0, \ldots 0, A_{k-1}^i \, x^{k-1-i}, \ldots, A_{n-1}^j \, x^{n-1-i}], \; X^{(j)} =$$

$$= [0, \ldots, 0, A_{k-1}^j \, x^{k-1-j}, \ldots, A_{m-1}^i \, x^{m-1-j}], \tag{6}$$

după calcule avem :

$$k_{ij}^p = l^{p-i-j+1} \left\{ y_{qk} \, l^{r'+r} \right\}_{q=1,n}^{k=1,m}, \quad Y_{ij}^p = \left\{ y_{qk} \right\}_{q=1,n}^{k=1,m}, \tag{7}$$

unde

r' este ordinul derivatei componentei q a lui Z ;

r — ordinul derivatei componentei k a lui W.

$$Y_{ij}^p = \widetilde{D}^T \Big|_{l=1} \bar{X} \Big|_{l=1} D \Big|_{l=1} = k_{ij}^p \Big|_{l=1},$$

$$A_{k-1}^i = \begin{cases} 0 \, ; \; k - 1 < i, \\ (k-1)(k-2) \ldots (k-i) \, ; \; k - 1 \geqslant i. \end{cases} \tag{8}$$

De observat că Y_{ij}^{p} nu depinde de l (lungimea elementului) ci numai de distribuţia de puncte interioare şi de gradele considerate pe puncte, lucru care permite ca această matrice să fie calculată o singură dată pentru elementele ce au aceeaşi distribuţie a punctelor şi aceleaşi grade de libertate pe punct. Această matrice a fost numită matricea suport a elementului şi este calculată cu subprogramul :

SUBROUTINE SUPORT ($I, J, P, N, M, XW, XZ, SW, SZ, RW, RZ, Y$) unde, pe lîngă parametrii evidenţi I, J, P, N, M, SW, SZ, avem :

XW — coordonatele adimensionale ale distribuţiei punctelor interpolării lui $w(x)$;

XZ — coordonatele adimensionale ale distribuţiei punctelor interpolării lui $z(x)$;

RW — vector cu numărul gradelor de libertate pe punct în interpolarea lui $w(x)$;

RZ — vector cu numărul gradelor de libertate pe punct în interpolarea lui $z(x)$;

Y — matricea suport înregistrată pe linii.

În ceea ce priveşte proiecţia termenului liber (distribuţia reprezentată de termenul liber) sau termenul liniar din funcţionala de minimizat, aceasta se poate realiza tot cu subprogramul „SUPORT", unde locul funcţiei $z(x)$ este luat de funcţia cunoscută $f(x)$.

Au fost efectuate manual matricele caracteristice corespunzătoare lui $n = m = 6$; $i, j = 0, 1, 2$; $p = 0, 1, 2$, confirmate cu subprogramul SUPORT, dintre care prezentăm cîteva :

$$s_w = s_z = 3,\ XW = XZ = \{0, 1/2, 1\},\ RW = RZ = \{2,2,2\}$$

$$w(x) = \widetilde{X}\widetilde{D}W,\ z(x) = XDZ,\ \widetilde{X}^T = X^T = [1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5]$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & l/2 & l \\ \left\{\begin{matrix} w_1 \\ w_1' \end{matrix}\right\}\begin{matrix} z_1 \\ z_1' \end{matrix} & \left\{\begin{matrix} w_m \\ w_m' \end{matrix}\right\}\begin{matrix} z_m \\ z_m' \end{matrix} & \left\{\begin{matrix} w_2 \\ w_2' \end{matrix}\right\}\begin{matrix} z_2 \\ z_2' \end{matrix} \end{array}$$

$$\widetilde{D} = D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -23/l^2 & -6/l & 7/l^2 & 1-/l & 16/l^2 & -8/l \\ 66/l^3 & 13/l^2 & -34/l^3 & 5/l^2 & -32/l^3 & 32/l^2 \\ -68/l^4 & -12/l^3 & 52/l^4 & -8/l^3 & 16/l^4 & -40/l^3 \\ 24/l^5 & 4/l^4 & -24/l^5 & 4/l^4 & 0 & 16/l^4 \end{bmatrix},\ W = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_1' \\ w_2 \\ w_2' \\ w_m \\ w_m' \end{bmatrix},\ Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_1' \\ z_2 \\ z_2' \\ z_m \\ z_m' \end{bmatrix}$$

$$K_{00}^{0}=\frac{l}{27720}\begin{bmatrix}4184 & 228l & 524 & -58l & 1760 & -320l\\ & 16l^2 & 58l & -6l^2 & 176l & -24l^2\\ & & 4184 & -228l & 1760 & 320l\\ & & & 16l^2 & -176l & -24l^2\\ & & & & 11264 & 0\\ & & & & & 256l^2\end{bmatrix}$$

$$K_{11}^{0}=\frac{l^{-1}}{630}\begin{bmatrix}1668 & 39l & -132 & -9l & -1536 & 240l\\ & 28l^2 & 9l & -5l^2 & -48l & -8l^2\\ & & 1668 & -39l & -1536 & -240l\\ & & & 28l^2 & 48l & -8l^2\\ & & & & 3072 & 0\\ & & & & & 256l^2\end{bmatrix}$$

$$K_{22}^{0}=\frac{l^{-3}}{35}\begin{bmatrix}5092 & 1138l & -1508 & 242l & -3584 & 1920l\\ & 322l^2 & -242l & 38l^2 & -896l & 320l^2\\ & & 5092 & -1138l & -3584 & -1920l\\ & & & 332l^2 & 896l & 320l^2\\ & & & & 7168 & 0\\ & & & & & 1280l^2\end{bmatrix}$$

$$K_{00}^{1}=\frac{l^2}{27720}\begin{bmatrix}432 & 34l & 262 & -24l & 560 & -24l\\ & 3l^2 & 34l & -3l^2 & 64l & 0\\ & & 3752 & -194l & 1200 & 296l\\ & & & 13l^2 & -112l & -24l^2\\ & & & & 5632 & 256l\\ & & & & & 128l^2\end{bmatrix}$$

$$K_{11}^{1} = \frac{1}{2520}\begin{bmatrix} 1416 & 92l & -264 & -64l & -1152 & 224l \\ & 12l^2 & -28l & -10l^2 & -64l & 16l^2 \\ & & 5256 & -64l & -4992 & -736l \\ & & & 100l^2 & 128l & -48l^2 \\ & & & & 6144 & 512l \\ & & & & & 512l^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{22}^{1} = \frac{l^2}{35}\begin{bmatrix} 946 & 126l & -754 & 148l & -192 & 576l \\ & 27l^2 & -94l & 19l^2 & -32l & 64l^2 \\ & & 4146 & -1012l & -3392 & -1344l \\ & & & 305l^2 & 864l & 256l^2 \\ & & & & 3584 & 768l \\ & & & & & 640l^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{00}^{2} = \frac{l^3}{360360}\begin{bmatrix} 1108 & 111l & 242 & -201l & 332 & 288l \\ & 12l^2 & 331l & -27l^2 & 416l & 48l^2 \\ & & 44268 & 2191l & 11648 & 3248l \\ & & & 142l^2 & -1040l & -264l^2 \\ & & & & 39936 & 3328l \\ & & & & & 1024l^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{11}^{2} = \frac{l}{27720}\begin{bmatrix} 4544 & 420l & -313 & -592l & -1408 & 1504l \\ & 48l^2 & -420l & -84l^2 & 0 & 192l^2 \\ & & 46784 & -112l & -43648 & -7136l \\ & & & 1016l^2 & 704l & -512l^2 \\ & & & & 45056 & 5632l \\ & & & & & 3584l^2 \end{bmatrix}$$

$$K_{22}^{2}=\frac{l^{-1}}{315}\begin{bmatrix} 4344 & 537l & -6456 & 1359l & 2112 & 3504l \\ & 80l^2 & -873l & 185l^2 & 336l & 440l^2 \\ & & 33144 & -8511l & -26688 & -10416l \\ & & & 2582l^2 & 7152l & 2168l^2 \\ & & & & 24576 & 6912l \\ & & & & & 4352l^2 \end{bmatrix}, \text{ toate simetrice.}$$

Termenul liber, pentru o interpolare Lagrange pe cele trei puncte, proiectat pe $w(x)$, revine la :

$$P=\frac{l}{420}\begin{bmatrix} 57 & 44 & -3 \\ 3l & 4l & 0 \\ -3 & 44 & 57 \\ 0 & -4l & -3l \\ 16 & 192 & 16 \\ -8l & 0 & 8l \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ \\ q_m \\ \\ q_2 \\ \\ \end{bmatrix}.$$

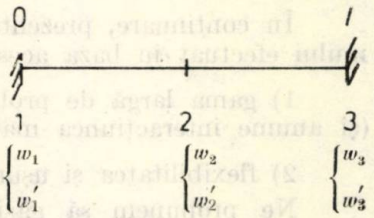
Termenul liber, pentru o interpolare Hermite (folosind capetele) proiectat pe $w(x)$, revine la :

$$P=\frac{l}{1260}\begin{bmatrix} 252 & 24l & 42 & -9l \\ 16l & 2l^2 & 5l & -1l^2 \\ 42 & 9l & 252 & -24l \\ -5l & -1l^2 & -16l & 2l^2 \\ 336 & 72l & 336 & -72l \\ -32l & -1l^2 & 32l & -4l^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_1' \\ q_2 \\ q_2' \end{bmatrix}.$$

De remarcat că matricele k_{ij}^p depind de l nu în mod uniform (elementele lui Y_{ij}^p vin înmulțite cu $l^{r+r'}$ (7)). În acest caz, se pune întrebarea dacă nu cumva acești factori ar strica condiționarea matricei Y_{ij}^p.

Din (7) și din matricele de mai sus, observăm că, dacă în vectorii W și Z luăm pentru componente aceeași dimensiune, adică în loc de $w^{(r)}$ și respectiv $z^{(r')}$, considerăm drept parametrii $w^{(r)} \cdot l^r$ și respectiv $z^{(r')} l^{r'}$, am avea în locul funcției de coordonată Φ_k, corespunzătoare lui $w^{(r)}$, Φ_k/l^r și, în locul funcției de coordonată Ψ_q, corespunzătoare lui $z^{(r')}$, $\Psi_q/l^{r'}$, în reprezentarea celor două funcții $w(x)$, și $z(x)$ pe elementul în cauză. Deoarece vectorii de coordonate nu au suferit modificări decît în mărime, unghiurile dintre doi vectori oarecari rămînînd aceleași $((\Phi_k, \Phi_l)/\|\Phi_k\|\,\|\Phi_l\|)$, se poate spune că a rămas condiționarea neschimbată (pentru cazul $\Phi \equiv \psi$ se poate arăta cu ușurință că valorile proprii ale matricei rămîn neschimbate).

În exemplul care urmează arătăm ce a însemnat folosirea polinomului de gradul cinci, pentru problema vibrațiilor transversale ale barelor încastrate, față de polinomul de gradul trei, pe aceeași idealizare de noduri (figura de mai jos) adică, un singur nod interior la mijlocul barei. Pentru polinomul de gradul cinci avem un singur element care cu ajutorul matricelor de mai înainte obținem (la care s-au pus condițiile limită) pentru matricea maselor și de rigiditate :



$$M = \rho k_{00}^0 \Big|_{\substack{w_1=0,\ w_3=0 \\ w_1'=0,\ w_3'=0}} = \rho \frac{1}{27720} \begin{bmatrix} 11264l & 0 \\ 0 & 256l \end{bmatrix},$$

$$K = D k_{22}^0 \Big|_{\substack{w_1=0 \\ w_3=0 \\ w_1'=0,\ w_2'=0}} = \frac{EI}{35} \begin{bmatrix} 7168/l^3 & 0 \\ 0 & 1280/l \end{bmatrix},$$

ρ — densitatea barei

$D = EI$ — rigiditatea barei,

care ne dau

$$\omega_1 = \frac{22{,}4}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \qquad \omega_2 = \frac{62{,}8}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}.$$

Pentru polinomul de gradul trei idealizarea se compune din două elemente și ne dă :

$$\omega_1 = \frac{22{,}73}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \qquad \omega_2 = \frac{57{,}9}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho}}.$$

Soluția analitică ne dă :

$$\omega_1 = \frac{22{,}37}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}} \qquad \omega_2 = \frac{61{,}66}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}}.$$

În tabelul de mai jos prezentăm eroarea relativă a celor două pulsații față de soluția analitică :

Pulsația	Polinom de gradul 3 2 elemente	Polinom de gradul 5 1 element
1	1,6 %	0,13 %
2	6 %	1,8 %

În continuare, prezentăm o problemă rezolvată cu ajutorul programului efectuat în baza acestui algoritm, din care reiese :

1) gama largă de probleme ce poate fi abordată cu acest program (și anume interacțiunea mai multor modele oricît de complicate ar fi);

2) flexibilitatea și ușurința introducerii datelor.

Ne propunem să găsim frecvențele proprii pentru structura din figura 3 pe modelul „teorie de bară".

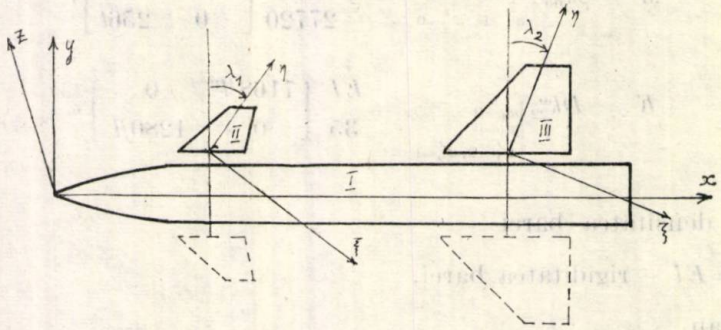


Fig 3

Considerăm aici numai vibrațiile simetrice.

Formulările locale (ipoteza Bernoulli) ne dau :
pentru structura I :

$$\frac{d^2}{dx^2} D(x) \frac{d^2 w}{dx^2} = \omega^2 M(x)\, w(x), \tag{10}$$

pentru structurile II și III (cuplaj între torsiune și încovoiere)

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} D(x) \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = \omega^2 (M(x)w - S(x)\Phi),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x} E(x) \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} = \omega^2(-S(x)w + J(x)\Phi) \tag{11}$$

sau

$$\begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} D(x) \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} & 0 \\ 0 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} E(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(x) \\ \Phi(x) \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} M(x) & -S(x) \\ -S(x) & J(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(x) \\ \Phi(x) \end{bmatrix}, \tag{11'}$$

unde $D(x)$ — rigiditatea în încovoiere;

$E(x)$ — rigiditatea în torsiune;

$M(x)$ — distribuția masei;

$S(x)$ — distribuția momentului static;

$J(x)$ — distribuția momentului de inerție;

$w(x)$ — săgeata;

$\Phi(x)$ — rotația în torsiune a secțiunii transversale.

Relațiile de legătură între structura I cu II și III, în ceea ce privește derivata lui w după direcțiile liniilor elastice în punctele de legătură, sînt:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right| = \left.\frac{\partial w}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} \sin\lambda - \Phi\cos\lambda \text{ (continuitatea rotației)}$$

pentru (x_2, λ_1) și (x_3, λ_2).

Celelalte relații de legătură sînt de continuitate a lui w. Din simetrie mai avem:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \eta}\right|_{\eta=0} = -\Phi\Big|_{\eta=0} \operatorname{tg}\lambda \text{ pentru } \lambda = \lambda_1 \text{ și } \lambda = \lambda_2.$$

De observat că în al doilea model avem de determinat o funcție vectorială cu două componente. În acest caz spațiul de proiecție este considerat spațiul de reprezentare. Ecuația vectorială (11″) o proiectăm pe vectorul $\begin{bmatrix} w \\ \Phi \end{bmatrix}$, iar (10) revine numai pe $W(x)$. Pentru o idealizare de patru noduri

pe structura I, cinci noduri pe structura II și patru noduri pe structura III, s-au scris cartelele:

1° 2 2 13 10

sînt, respectiv, numărul funcțiilor necunoscute, numărul nodurilor, numărul frecvențelor proprii cerute.

2° 0 5 2.6 3.4 0. 0.018 0.054 0.09 0. .111 .232 .235

sînt coordonatele nodurilor pe structuri

3° 2 2 2 2 2 1 1 1 1 2 1 1 1 1

sînt gradele de libertate pe nod pentru funcția W

4° 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

sînt gradele de libertate pe nod pentru funcția

5° A22 1 2 006 12. 12.

sînt date referitoare la elementul care exprimă natura operatorului ce se proiectează, legăturile elementului și valorile coeficienților pe nodurile elementului.

. . . . . .

15° 2 1 1 5 1 1 1

exprimă faptul că w de la nodul 2 (substructura I) este egal cu w de la nodul 5 (substructura II)

. . . . . .

De observat ușurința îmbunătățirii preciziei prin mărirea gradelor de libertate pe nod, schimbînd numai componentele unui vector. Același lucru în considerarea elementelor. De asemenea, posibilitatea de studiu a interacțiunii mai multor modele, lucru care se operează cu ușurință prin setul de cartele privind relațiile între diversele componente corespunzătoare la modele diferite.

Primită la redacție la 10 iulie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. O. C. Zienkiewicz, *The finite element method in structural and continuum mechanics*, McGraw-Hill, London—New York—Toronto—Sydney, Ed. Prof. P. B. Morice.
2. Richard H. Gallagher, *Finite element analysis*, Prentince—Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975, Ed. N. H. Newmark and W. S. Hall.
3. Gilbert Strang, George J. Fix, *An analysis of the finite element method*, Prentince—Hall, U.S.A., 1973.
4. L. E. Wachspress, *A Rational Finite Element Basis*, Academic Press Inc., New York. San Francisco. London, 1975, Ed. Richard Bellman.
5. J. S. Przemicniecki, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.
6. H. Miura, *An optimal configuration design of lifting surface type structures*, University Microfilms, A XEROX Company, Ann Arbor, Michigan.
7. P. P. Teodorescu, *Dinamica corpurilor liniar elastice*, București, 1972, Ed. Academiei.
8. P. P. Teodorescu, *Probleme plane în teoria elasticității*, București, 1961, Ed. Academiei.
9. P. P. Teodorescu, *Probleme spațiale în teoria elasticității*, București, 1970, Ed. Academiei.
10. W. Kecs P. P. Teodorescu, *Aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică*, București, 1970, Ed. Academiei.
11. * * * *Șocuri și vibrații*, sub. red. C. M. Harris, C. E. Crede (traducere din lb. engleză), Ed. tehnică, București, 1968.

CONSIDERAȚII PRIVIND OPTIMIZAREA TRAIECTORIILOR APROAPE VERTICALE ALE RACHETELOR CARE EVOLUEAZĂ ÎN MEDIU REZISTENT, CU RESTRICȚII FLEXIBILE ASUPRA MODULULUI TRACȚIUNII

de VASILE PASCU

În lucrare se studiază traiectoriile optime aproape verticale ale rachetelor care evoluează în mediu rezistent.
După stabilirea ecuațiilor care definesc sistemul dinamic de optimizat, prin utilizarea riguroasă a principiului maximului se obțin unele rezultate calitative și cantitative privind programele de control optimal a modulului și direcției tracțiunii și a portanței.
Spre deosebire de alte lucrări, se introduce în sistem o legătură neolonomă sub forma unei restricții flexibile asupra modulului tracțiunii, care modifică problema variațională asociată.

NOTAȚII PRINCIPALE

a — limita superioară a raportului tracțiune-masă;

c — viteza efectivă de ieșire a gazelor din motor;

m — masa instantanee a rachetei;

$\bar{v}$ — viteza centrului de greutate a rachetei;

$\bar{T}$ — tracțiunea;

$\bar{L}$ — rezultanta forțelor aerodinamice;

x_1, x_2, x_3 — componentele carteziene ale vectorului de poziție a centrului de greutate a rachetei;

β, θ — unghiurile direcției vectorului tracțiune;

γ, δ — unghiurile direcției vectorului viteză;

$\bar{x}$ — vectorul variabilelor de stare;

$\bar{u}$ — vectorul variabilelor de comandă;

$\bar{\lambda}$ — vectorul multiplicatorilor lui Lagrange;

H — funcția hamiltonianului;

S — funcția de comutare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 39, NR. 2, 1980. P. 183–193

1. INTRODUCERE

Evoluţiile pe traiectorii aproape verticale sînt caracteristice rachetelor de sondaj, rachetelor antirachetă şi tragerilor în poligoanele de evaluare a performanţelor din alte clase. Din calculele de optimizare cu restricţii rigide rezultă uneori o forţă de tracţiune foarte mare, care implică puternice solicitări dinamice asupra structurii de rezistenţă a rachetei. Pentru a evita adoptarea unei structuri de rezistenţă de greutate sporită cu influenţă asupra greutăţii utile, este necesar a include în calcule restricţia flexibilă

$$T(t) \leqslant a(t)\, m(t), \tag{1}$$

în care mărimea $a(t)$ este funcţie de tipul rachetei şi de tehnologia de realizare a structurii de rezistenţă.

O anumită traiectorie este determinată prin definirea completă a condiţiilor iniţiale şi impunerea unei legi de control în lungul său; pentru traiectoriile optime comenzile se determină cu ajutorul tehnicilor variaţionale. Optimizarea traiectoriilor rachetelor care evoluează în mediu rezistent a fost studiată de numeroşi autori, [1], [2], [3], în condiţiile adoptării unor legături olonome (mişcarea are loc în plan vertical, traiectoria are o geometrie impusă etc.), care reduc numărul gradelor de libertate şi facilitează delimitarea clasei comenzilor admise. Introducerea unor noi legături neolonome, sub forma restricţiei (1), complică problema variaţională asociată [5].

În lucrarea prezentă, prin utilizarea riguroasă a principiului maximului [6], se obţin o serie de rezultate nepublicate pînă acum, referitoare la traiectoriile optime aproape verticale, în mediu rezistent.

2. ECUAŢIILE DE MIŞCARE ALE RACHETEI ŞI FORMULAREA PROBLEMEI DE OPTIM

Sistemul dinamic care modelează toate legile de zbor fizic posibile — în acestea fiind incluse şi anumite clase de optim real care se vor determina — se defineşte prin ecuaţii furnizate de legile mecanicii clasice şi restricţiile ce descriu funcţionarea comenzilor.

Pentru clasa traiectoriilor aproape verticale în mediu rezistent, se alege un sistem de referinţă $O_1x_1x_2x_3$ cu originea O_1 în punctul de lansare, şi cu axa O_1x_3 verticală, planul $O_1x_1x_3$ fiind planul de lansare (planul vertical determinat de axa lansatorului şi verticala locului); alegerea acestui sistem de referinţă este motivată de deplasările mici pe orizontală. Faţă de acest sistem de referinţă starea de mişcare a rachetei este definită de vectorul de poziţie $\bar{r}(t)$, vectorul viteză $\bar{v}(t)$ şi masa instantanee $m(t)$.

Ecuaţia de mişcare a centrului de greutate este:

$$m\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t} = \bar{T} + \bar{L} + \bar{G}. \tag{2}$$

Tracţiunea $\bar{T}(t)$ este un vector de componente

$$\bar{T} = T(\cos\beta\cos\theta, \cos\beta\sin\theta, \sin\beta), \tag{3}$$

unde β este unghiul format de vectorul $\bar{T}$ cu planul orizontal $O_1x_1x_2$, iar θ este unghiul dintre planul vertical ce conține vectorul $\bar{T}$ și planul de lansare $O_1x_1x_3$, iar modulul se calculează cu ecuația:

$$T = -c\frac{dm}{dt}, \tag{4}$$

unde $c = \text{const.}$ În timp ce modulul tracțiunii este mărginit prin inegalitatea (1) și

$$0 \leqslant T \leqslant T_{max} \tag{5}$$

direcția sa, se admite complet controlabilă prin precizarea unghiurilor β și θ.

Pentru rachetele la care planul longitudinal de simetrie rămîne vertical sau aproape vertical și rachetele cu simetrie axială la care axa este conținută în planul vertical ce conține tangenta la traiectorie, se poate scrie:

$$L_1 = -R\cos\gamma\cos\delta - P\sin\gamma\cos\delta, \tag{6}$$

$$L_2 = -R\cos\gamma\sin\delta - P\sin\gamma\sin\delta, \tag{7}$$

$$L_3 = -R\sin\gamma + P\cos\gamma. \tag{8}$$

Forțele aerodinamice se calculează în zbor neaccelerat, la unghiuri de incidență mici, caracteristice clasei studiate, iar relația dintre rezistența R și portanța P este de forma [4]

$$R = R(x_3, v, P). \tag{9}$$

Forța de greutate $\bar{G}$ se exprimă prin relația

$$\bar{G} = m\bar{g}(\bar{r}), \tag{10}$$

iar accelerația gravitațională, pentru cazul studiat, este variabilă cu înălțimea

$$g = g_0\frac{R_P}{(R_P + x_3)^2}, \tag{11}$$

unde g_0 este accelerația gravitațională la nivelul mării, iar R_P este raza Pămîntului, considerat sferic și omogen.

Masa rachetei se calculează, în timpul funcționării motorului, cu ajutorul unei funcții monoton descrescătoare

$$m = m_0 - \int_{t_0}^{t}\frac{\mathcal{T}}{c}dt. \tag{12}$$

În concluzie, sistemul dinamic utilizat în studiul optimizării traiectoriilor aproape verticale în mediu rezistent are forma :

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1, \tag{13}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2, \tag{14}$$

$$\frac{dx_3}{dt} = v_3, \tag{15}$$

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{T}{m}\cos\beta\cos\theta - \frac{R}{m}\cos\gamma\cos\delta - \frac{P}{m}\sin\gamma\cos\delta, \tag{16}$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{T}{m}\cos\beta\sin\theta - \frac{R}{m}\cos\gamma\sin\delta - \frac{P}{m}\sin\gamma\sin\delta, \tag{17}$$

$$\frac{dv_3}{dt} = \frac{T}{m}\sin\beta - \frac{R}{m}\sin\gamma + \frac{P}{m}\cos\gamma - g_0\frac{R_P^2}{(R_P+x_3)^2}, \tag{18}$$

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T}{c}, \tag{19}$$

$$0 \leqslant T \leqslant T_{max}, \tag{20}$$

$$T \leqslant am. \tag{21}$$

Sistemul dinamic este definit prin șapte ecuații care au ca variabilă independentă timpul t și un număr de 11 variabile dependente (x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3, m, T, β, θ, P), rezultînd astfel patru grade de libertate asociate problemei de optimizare cu programele de variație a modulului și direcției tracțiunii și a portanței.

Din mulțimea traiectoriilor posibile matematic și fizic, deosebit de importante din punct de vedere al evaluării performanțelor sînt traiectoriile pentru care diferența dintre valorile inițiale și finale ale unei funcții de variabile de stare, este extremă. Practic, criteriul de optimizare poate reprezenta altitudinea, masa, viteza, timpul, presiunea dinamică, temperatura rezultată din frecări.

Date fiind condițiile inițiale de mișcare $\bar{r} = \bar{r}_0$, $\bar{v} = \bar{v}_0$ și $m = m_0$ la $t = t_0$; la momentul final $t = t_f$, $\bar{r} = \bar{r}_f$, $\bar{v} = \bar{v}_f$, $m = m_f$. Problema de optim constă în determinarea programelor tracțiunii $\bar{T}(t)$ și portanței $P(t)$, astfel încît, o anumită funcție scalară dependentă de starea finală,

să fie minimă. Această formulare de tip Mayer, are avantajul dezvoltării unei teorii unificate pentru întreaga clasă de traiectorii aproape verticale și extragerii unor rezultate calitative privind structura comenzilor optime.

3. DETERMINAREA PROGRAMELOR OPTIME DE COMANDĂ

În vederea aplicării principiului maximului, se includ în problemă multiplicatorii lui Lagrange asociați variabilelor de stare, notați prin $\bar{\lambda}_r(\lambda_{x_1}, \lambda_{x_2}, \lambda_{x_3})$, $\bar{\lambda}_v(\lambda_{v_1}, \lambda_{v_2}, \lambda_{v_3})$ și λ_m.

De asemenea, pentru a introduce în problemă constrîngerea asupra modului tracțiunii, definită prin inegalitățile (20) și (21), se include multipliatorul $\bar{\lambda}_p$ $(\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2})$ și se definește o funcție T_M, prin

$$T_M = \min (T_{max}, am). \tag{22}$$

Cu aceasta, obținem

$$\bar{\lambda}_p \bar{\Psi} = \lambda_{p_1} T + \lambda_{p_2} (T_M - T), \tag{23}$$

în care λ_{p_2} pentru problema de optimizare cu restricție flexibilă nu este în mod necesar o constantă. Ca urmare, Hamiltonianul are forma

$$H = \lambda_{x_1} v_1 + \lambda_{x_2} v_2 + \lambda_{x_3} v_3 + \lambda_{v_1}\left(\frac{T}{m} \cos \beta \cos \theta - \frac{R}{m} \cos \gamma \cos \delta - \right.$$

$$\left. - \frac{P}{m} \sin \gamma \cos \delta \right) + \lambda_{v_2}\left(\frac{T}{m} \cos \beta \sin \theta - \frac{R}{m} \cos \gamma \sin \delta - \frac{P}{m} \sin \gamma \sin \delta \right) +$$

$$+ \lambda_{v_3}\left(\frac{T}{m} \sin \beta - \frac{R}{m} \sin \gamma + \frac{P}{m} \cos \gamma - g_0 \frac{R_P^2}{(R_P + x_3)^2} \right) - \lambda_m \frac{T}{c} +$$

$$+ \lambda_{p_1} T + \lambda_{p_2} (T_M - T). \tag{24}$$

Condiția necesară de optim implică

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} = 0, \tag{25}$$

în care $\bar{u} = (P, T, \beta, \theta)$.

Prin aplicarea la problema noastră rezultă:

$$0 = \frac{\partial H}{\partial P} = \frac{\lambda_{v_1}}{m}\left(- \frac{\partial R}{\partial P} \cos \gamma \cos \delta - \sin \gamma \cos \delta \right) + \frac{\lambda_{v_2}}{m}\left(- \frac{\partial R}{\partial P} \cos \gamma \sin \delta - \right.$$

$$\left. - \sin \gamma \sin \delta \right) + \frac{\lambda_{v_3}}{m}\left(- \frac{\partial R}{\partial P} \sin \gamma + \cos \gamma \right), \tag{26}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial \beta} = -\frac{\lambda_{v_1}}{m} T \sin\beta \cos\theta - \frac{\lambda_{v_2}}{m} T \sin\beta \sin\theta + \frac{\lambda_{v_3}}{m} T \cos\beta, \tag{27}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{\lambda_{v_1}}{m} T \cos\beta \sin\theta + \frac{\lambda_{v_2}}{m} T \cos\beta \cos\theta, \tag{28}$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial T} = \frac{\lambda_{v_1}}{m} \cos\beta \cos\theta + \frac{\lambda_{v_2}}{m} \cos\beta \sin\theta + \frac{\lambda_{v_3}}{m} \sin\beta - \frac{\lambda_m}{c} + \lambda_{p_1} - \lambda_{p_3}. \tag{29}$$

Din ecuația (28) obținem

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\lambda_{v_2}}{\lambda_{v_1}} \tag{30}$$

și se calculează imediat $\sin\theta$ și $\cos\theta$ cu relațiile trigonometrice

$$\sin\theta = \pm \frac{\operatorname{tg}\theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}}, \quad \cos\theta = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\theta}}. \tag{31}$$

După simplificări și introducerea valorilor lui $\sin\theta$ și $\cos\theta$ furnizate de expresiile (30) și (31), ecuația (27) devine

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\lambda_{v_3}}{\sqrt{\lambda_{v_1}^2 + \lambda_{v_2}^2}}, \tag{32}$$

de unde obținem

$$\sin\beta = \frac{\lambda_{v_3}}{\sqrt{\lambda_{v_1}^2 + \lambda_{v_2}^2 + \lambda_{v_3}^2}}, \cos\beta = \frac{\sqrt{\lambda_{v_1}^2 + \lambda_{v_2}^2}}{\sqrt{\lambda_{v_1}^2 + \lambda_{v_2}^2 + \lambda_{v_3}^2}}. \tag{33}$$

Cu aceste rezultate, Hamiltonianul (24) devine

$$H = \pm \frac{T}{m} \sqrt{\lambda_{v_1}^2 + \lambda_{v_2}^2 + \lambda_{v_3}^2} + \lambda_{x_1} v_1 + \lambda_{x_2} v_2 + \lambda_{x_3} v_3 -$$

$$- \lambda_{v_1} \left(\frac{R}{m} \cos\gamma \cos\delta + \frac{P}{m} \sin\gamma \cos\delta \right) - \lambda_{v_2} \left(\frac{R}{m} \cos\gamma \sin\delta + \right.$$

$$\left. + \frac{P}{m} \sin\gamma \sin\delta \right) - \lambda_{v_3} \left[\frac{R}{m} \sin\gamma - \frac{P}{m} \cos\gamma + g_0 \frac{R_P^2}{(R_P + x_3)^2} \right] -$$

$$- \lambda_m \cdot \frac{T}{c} + \lambda_{p_1} T + \lambda_{p_3} (T_M - T), \tag{34}$$

în care semnul „plus" sau „minus", pare a fi nedeterminat.

Decizia de semn se face, aplicînd condiția lui Weierstrass, care arată că pentru toți vectorii de comandă neoptimali u^* (pentru minim) există :

$$H(\bar{x},\ \bar{\lambda},\ \bar{u},\ t) \geqslant H(\bar{x},\ \bar{\lambda},\ \bar{u}^*,\ t). \tag{35}$$

Cum T este reprezentat printr-o funcție semipozitiv definită, rezultă că va trebui să alegem semnul „plus" în fața radicalului.

Modulul vectorului $\bar{\lambda}_v$ este

$$|\bar{\lambda}_v| = \sqrt{\lambda_{v_1}^2 + \lambda_{v_2}^2 + \lambda_{v_3}^2} \tag{36}$$

și deci, așa cum rezultă din (30) și (32), vectorul $\bar{\lambda}_v$ este colinear cu vectorul $\bar{T}$ în timpul evoluției optime a rachetelor pe traiectorii aproape verticale și în mediu rezistent.

S-a obținut astfel, în baza unei demonstrații riguroase, un rezultat calitativ deosebit de important pentru optimizarea traiectoriilor aproape verticale în mediu rezistent ; un rezultat similar, dar pentru evoluțiile optime în vid a fost obținut de Lawden [7].

Pentru a fi util în cele ce urmează, Hamiltonianul se rescrie sub forma

$$H = T\left(\frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c}\right) + \lambda_{x_1} v_1 + \lambda_{x_2} v_2 + \lambda_{x_3} v_3 - \lambda_{v_1}\left(\frac{R}{m}\cos\gamma\cos\delta + \right.$$

$$\left. + \frac{P}{m}\sin\gamma\cos\delta\right) - \lambda_{v_2}\left(\frac{R}{m}\cos\gamma\sin\delta + \frac{P}{m}\sin\gamma\sin\delta\right) - \lambda_{v_3}\left[\frac{R}{m}\sin\gamma - \right.$$

$$\left. - \frac{P}{m}\cos\gamma + g_0\frac{R_P^2}{(R_P + x_3)^2}\right] + \lambda_{p_1} T + \lambda_{p_2}(T_M - T). \tag{37}$$

Din ecuațiile (26), (27) și (28) se observă că soluții nebanale pentru multiplicatorii Lagrange λ_{v_1}, λ_{v_2}, λ_{v_3} există, dacă

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{\partial R}{\partial P}\cos\gamma\cos\delta - \sin\gamma\cos\delta & -\frac{\partial R}{\partial P}\cos\gamma\sin\delta - \sin\gamma\sin\delta & -\frac{\partial R}{\partial P}\sin\gamma + \cos\gamma \\ -\sin\beta\cos\theta & -\sin\beta\sin\theta & \cos\beta \\ -\cos\beta\sin\theta & \cos\beta\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{38}$$

Dezvoltînd acest determinant, se obține programul optim de variație a forțelor aerodinamice în perioada activă și în cazul în care unghiul de incidență nu depășește valoarea critică după care intervine fenomenul de pierdere de viteză

$$\frac{\partial R}{\partial P} = \frac{\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma\cos(\theta-\delta)}{\sin\beta\sin\gamma + \cos\beta\cos\gamma\cos(\theta-\delta)}. \tag{39}$$

Particularizînd pentru evoluția în planul vertical ($\theta = 0$ $\delta = 0$), rezultă

$$\operatorname{tg}(\beta-\gamma) = \frac{\partial R}{\partial P}, \tag{40}$$

expresie obținută pe altă cale de Miele [2].

În vederea analizei calitative a Hamiltonianului pentru determinarea secvențelor de comutare și a programului modului tracțiunii, este necesar a calcula multiplicatorii lui Lagrange λ_x, λ_v și λ_m, utilizînd relațiile furnizate de principiul maximului.

$$\frac{d\lambda_{x_1}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \tag{41}$$

$$\frac{d\lambda_{x_2}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0, \tag{42}$$

$$\frac{d\lambda_{x_3}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -2\lambda_{v_3} g_0 R_P^2 \frac{1}{(R_P + x_3)^3} + \frac{\lambda_{v_1}}{m}\left(\frac{\partial R}{\partial x_3}\cos\gamma\cos\delta + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial P}{\partial x_3}\sin\gamma\cos\delta\right) + \frac{\lambda_{v_2}}{m}\left(\frac{\partial R}{\partial x_3}\cos\gamma\sin\delta + \frac{\partial P}{\partial x_3}\sin\gamma\sin\delta\right) +$$

$$+ \frac{\lambda_{v_3}}{m}\left(\frac{\partial R}{\partial x_3}\sin\gamma - \frac{\partial P}{\partial x_3}\cos\gamma\right), \tag{43}$$

$$\frac{d\lambda_{v_1}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial v_1} = -\lambda_{x_1} + \frac{\lambda_{v_1}}{m}\left(\frac{\partial R}{\partial v_1}\cos\gamma\cos\delta + \frac{\partial P}{\partial v_1}\sin\gamma\cos\delta\right) +$$

$$+ \frac{\lambda_{v_2}}{m}\left(\frac{\partial R}{\partial v_1}\cos\gamma\sin\delta + \frac{\partial P}{\partial v_1}\sin\gamma\sin\delta\right) + \frac{\lambda_{v_3}}{m}\left(\frac{\partial R}{\partial v_1}\sin\gamma - \frac{\partial P}{\partial v_1}\cos\gamma\right), \tag{44}$$

$$\frac{d\lambda_{v_2}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial v_2} = -\lambda_{x_2} + \frac{\lambda_{v_1}}{m}\left(\frac{\partial R}{\partial v_2}\cos\gamma\cos\delta + \frac{\partial P}{\partial v_2}\sin\gamma\cos\delta\right) +$$

$$+ \frac{\lambda_{v_2}}{m}\left(\frac{\partial R}{\partial v_2}\cos\gamma\sin\delta + \frac{\partial P}{\partial v_2}\sin\gamma\sin\delta\right) + \frac{\lambda_{v_3}}{m}\left(\frac{\partial R}{\partial v_2}\sin\gamma - \frac{\partial P}{\partial v_2}\cos\gamma\right) \tag{45}$$

$$\frac{d\lambda_{v_1}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial v_3} = -\lambda_{x_3} + \frac{\lambda_{v_1}}{m}\left(\frac{\partial R}{\partial v_3}\cos\gamma\cos\delta + \frac{\partial P}{\partial v_3}\sin\gamma\cos\delta\right) + \tag{46}$$

$$+\frac{\lambda_{v_2}}{m}\left(\frac{\partial R}{\partial v_3}\cos\gamma\sin\delta + \frac{\partial P}{\partial v_3}\sin\gamma\sin\delta\right) + \frac{\lambda_{v_3}}{m}\left(\frac{\partial R}{\partial v_3}\sin\gamma - \frac{\partial P}{\partial v_3}\cos\gamma\right),$$

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial m} = -\frac{\lambda_{v_1}}{m^2}(R\cos\gamma\cos\delta + P\sin\gamma\cos\delta) -$$

$$-\frac{\lambda_{v_2}}{m^2}(R\cos\gamma\sin\delta + P\sin\gamma\sin\delta) - \frac{\lambda_{v_3}}{m^2}(R\sin\gamma - P\cos\gamma) +$$

$$+\lambda_v\frac{T}{m^2} - \lambda_{p_2}\frac{\partial T_M}{\partial m}. \tag{47}$$

Din ecuațiile (41) și (42) avem

$$\lambda_{x_1} = C_1, \tag{48}$$

$$\lambda_{x_2} = C_2. \tag{49}$$

Cum în cazul traiectoriilor aproape verticale deplasările pe orizontală sînt reduse, rezultă că aceste constante sînt nule.

Vom demonstra în continuare că $H = 0$ și în cazul în care $T_M = ma$. Deoarece Hamiltonianul nu conține explicit timpul t, prin derivare avem

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{x}}\dot{\bar{x}} + \frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}}\dot{\bar{\lambda}} + \frac{\partial H}{\partial \bar{u}}\cdot\dot{\bar{u}}, \tag{50}$$

$\frac{\partial H}{\partial \bar{x}}$ și $\frac{\partial H}{\partial \bar{u}}$ se calculează cu relațiile

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} = -\dot{\bar{\lambda}}, \tag{51}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \bar{\lambda}} = \dot{\bar{x}}, \tag{52}$$

care incluse în (50), conduc la

$$\frac{dH}{dt} = -\lambda_{p_2}a\frac{dm}{dt} + \lambda_{p_2}\frac{dT}{dt}. \tag{53}$$

Întrucît $T = ma$, obținem $H = 0$.

Deoarece multiplicatorii Lagrange sînt reprezentați prin funcții continue, din expresia (37) a Hamiltonianului rezultă că o discontinuitate în modulul tracțiunii este permisă numai în cazul în care

$$S = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c} + \lambda_{p_1} - \lambda_{p_2} = 0, \tag{54}$$

ecuație care definește o suprafață de joncțiune între diferite tipuri de subarce care intră în componența traiectoriei optimale. Ecuația (54) rezultă din aplicarea condiției de optim și este identică cu ecuația (29).

Din analiza structurii Hamiltonianului (37) și aplicînd condiția lui Weierstrass, rezultă programul optim al modulului tracțiunii,

$$S \begin{cases} > 0 \ ; \ T = T_M, \\ = 0 \ ; \ T \text{ este variabil}, \\ < 0 \ ; \ T = 0, \end{cases} \tag{55}$$

iar S se numește funcție de comutare.

Multiplicatorul λ_{p_1} se determină în baza condiției suplimentare

$$\lambda_{p_1} T = 0. \tag{56}$$

Cum $T = ma$ și pozitiv definită, rezultă că

$$\lambda_{p_1} = 0. \tag{57}$$

Cu acest rezultat, multiplicatorul λ_{p_2} are expresia

$$\lambda_{p_2} = \frac{\lambda_v}{m} - \frac{\lambda_m}{c}. \tag{58}$$

Prin urmare, în cazul funcționării cu $T = ma$, multiplicatorul λ_{p_2} nu mai este constant, ca în cazul restricțiilor dure, iar ecuația (47) devine :

$$\frac{d\lambda_m}{dt} = -\frac{\lambda_{v_1}}{m^2}(R\cos\gamma\cos\delta + P\sin\gamma\cos\delta) - \frac{\lambda_{v_2}}{m^2}(R\cos\gamma\sin\delta + P\sin\gamma\sin\delta) - \frac{\lambda_{v_3}}{m^2}(R\sin\gamma - P\cos\gamma) + \lambda_m\frac{a}{c}. \tag{59}$$

În cazul în care $T_M = ma$, din ecuația (19) rezultă

$$\frac{1}{m}\frac{dm}{dt} = -\frac{a}{c}, \tag{60}$$

care, prin integrare pe un timp t de funcționare cu acest regim, obținem

$$m = m_0 \, e^{-\frac{a}{c}(t - t_0)}, \tag{61}$$

de unde rezultă imediat modulul tracțiunii

$$T = m_0 \, e^{-\frac{a}{c}(t-t_0)}. \tag{62}$$

Cazul în care $S = 0$ generează așa numitul „subarc singular" pentru care programul optim al modulului tracțiunii se determină prin tehnica derivărilor succesive a funcției de comutare și utilizarea ecuațiilor (13)—(19) și (41) — (47) pentru eliminarea derivatelor multiplicatorilor și variabilelor de stare. Ordinul de derivare la care, în expresia obținută după înlocuire, apare funcția de comandă, se numește grad de singularitate. Pentru acest caz general se obține o expresie foarte laborioasă. Ca urmare este indicat a se calcula expresii pentru unele evoluții semnificative, ca, de exemplu, traiectorii aproape verticale cu geometrie impusă, expresii care se pot folosi cu ușurință în calculele inginerești.

4. CONCLUZII

Rezultatele obținute în lucrarea de față pot fi aplicate pentru orice evoluție semnificativă în mediu rezistent, din clasa traiectoriilor aproape verticale, specificîndu-se legi de variație cu altitudinea și numărul Mach a forțelor aerodinamice. Prin definirea unor funcții de rezistență potrivite, se obțin detalii asupra proprietăților soluției optimale pe subarcul singular, dificil de demonstrat pentru cazul general.

Primită la redacție la 15 iulie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. N. X. Vinh, *General Theory of Optimal Trajectory for Rocket Flight in a Resisting Medium*, Journal of Optimization Theory and Applications, **11**, 2, 189—202 (1973).
2. A. Miele, *General Variational Theory of Flight Path of Rocket-Powered Aircraft, Missiles and Satellite Carriers*, Astronautica Acta, **4**, 3, 264—288 (1958).
3. M. M. Niță, *Teoria zborului spațial*. Edit. Academiei, București, 1973.
4. E. Carafoli, *Aerodinamica vitezelor mari*, Edit. Academiei, 1957.
5. V. Vâlcovici, Șt. Bălan, R. Voinea, *Mecanica teoretică*, Edit. tehnică, București, 1963.
6. L. S. Pontryagin, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, Interscience, New York, 1962.
7. D. F. Lawden, *Optimal Intermediate Thrust Arcs in a Gravitational Field*, Astronautica Acta, **8**, 3, 106—123 (1962).

ASUPRA VIBRAȚIILOR ELEMENTELOR CINEMATICE ALE MECANISMELOR PLANE CU CUPLE DE TRANSLAȚIE

de MIHAI BUCULEI și SEVASTULA MIȚIS
Universitatea din Craiova

În lucrare se stabilește un algoritm de calcul prin aproximații succesive pentru studiul vibrațiilor elementelor cinematice tip bară dreaptă cu secțiunea constantă, care intră în structura mecanismelor plane.
Se consideră cazul elementelor cinematice cu cuple de translație admițînd frecarea fluidă între culisă și piatra de culisă. Folosind ecuațiile stratului limită laminar se indică modul de calcul al încărcărilor ce acționează asupra barei datorită filmului de lubrifiant.

1. ANALIZA HIDRODINAMICĂ A CUPLEI DE TRANSLAȚIE

În lucrare se consideră cazul unui element cinematic tip bară dreaptă, cu secțiunea constantă dreptunghiulară, de lățime b, măsurată perpendicular pe planul de mișcare al elementului. Pe lungimea L elementul cinematic suportă o piatră de culisă, între ele existînd un film de lubrifiant (fig. 1).

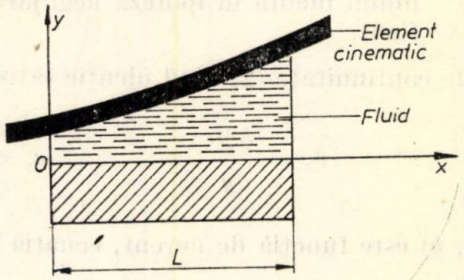


Fig. 1. — Cuplă de translație.

Modelul adoptat pentru mișcarea fluidului este : strat limită laminar plan. Ecuația lui Prandtl, ecuația de continuitate și relația de compresibilitate sînt

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

$$\rho = \rho_0 = \text{const.}, \tag{3}$$

unde

v_x, v_y sînt componentele vitezei $\bar{v}$ a fluidului pe axele sistemului xOy (fig. 1);

ρ este masa specifică;

p — presiunea;

ν — vîscozitatea cinematică.

Așa cum se știe $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$, deci $p = p(x)$.

Condițiile la limită atașate sistemului (1), (2), (3) sînt

a) $$v_x(x, 0, 0) = 0; \qquad v_y(x, 0, 0) = 0, \tag{4}$$

b) $$v_x(x, u_2, 0) = v_r; \qquad v_y(x, u_2, 0) = 0, \tag{5}$$

unde

$u_2(x, t)$ este deplasarea transversală în vibrația barei ($x \in [0; L]$);

v_r — viteza relativă a elementului cinematic în raport cu piatra de culisă, cunoscută de la analiza elastodinamică a mecanismului făcută în ipoteza neglijării influenței filmului de lubrifiant.

Ecuația de continuitate (2) fiind identic satisfăcută pentru

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \qquad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{6}$$

unde $\psi(x, y)$ este funcția de curent, ecuația (1) devine

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \tag{7}$$

Folosind integrala primă a lui Bernoulli, ecuația (7) devine

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \Phi(x) + \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \tag{8}$$

unde

$$\Phi(x) = v_r(x) \frac{\partial v_r(x)}{\partial x}.$$

În situația în care $\frac{\partial v_r(x)}{\partial x} \cong 0$ pentru $x \in [0\,;\, L]$, ceea ce se întîmplă în numeroase cazuri concrete cînd lungimea L este mică, ecuația (8) ia forma simplificată

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}. \tag{9}$$

Rezolvarea ecuațiilor (8) sau (9) este o problemă dificilă. În continuare se va folosi, pentru soluționare, metoda dezvoltării în serie punînd

$$\psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{2n+1}(y)\, x^{2n+1}, \tag{10}$$

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}\, x^{2n+1}, \tag{11}$$

unde

$$a_{2n+1} \in R.$$

Se obține un sistem infinit de ecuații diferențiale ordinare în $\psi_{2n+1}(y)$, care compact se scrie sub forma

$$\sum_{k=0}^{n} [2(n-k)+1]\,[\psi'_{2(n-k)+1}(y)\,\psi'_{2k+1}(y) - \psi_{2(n-k)+1}(y)\,\psi''_{2k+1}(y)] =$$

$$= a_{2n+1} + \psi'''_{2n+1}(y), \quad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{12}$$

Concret, primele cinci ecuații ale sistemului sînt

$$(\psi'_1)^2 - \psi_1\psi''_1 = a_1 + \nu\psi'''_1, \tag{13}$$

$$4\psi'_1\psi'_3 - \psi_1\psi''_3 - 3\psi_3\psi''_1 = a_3 + \nu\psi'''_3, \tag{14}$$

$$5\psi'_1\psi'_5 + 3(\psi'_3)^2 + \psi'_5\psi'_1 - \psi_1\psi''_5 - 3\psi_3\psi''_3 - 5\psi_5\psi''_1 = a_5 + \nu\psi'''_5, \tag{15}$$

$$7\psi'_1\psi'_7 + 5\psi'_5\psi'_3 + 3\psi'_5\psi'_3 + \psi'_7\,\psi'_1 - \psi_1\psi''_7 - 3\psi_3\psi''_5 - 5\psi_5\psi''_3 -$$

$$- 7\psi_7\psi''_1 = a_7 + \nu\psi'''_7, \tag{16}$$

$$10\psi'_1\psi'_9 + 10\psi'_3\psi'_7 + 5(\psi'_5)^2 - \psi_1\psi''_9 - 3\psi_3\psi''_7 - 5\psi_5\psi''_5 - 7\psi_7\psi''_3 -$$

$$- 9\psi_9\psi''_9 = a_9 + \nu\psi'''_9. \tag{17}$$

Condițiile inițiale pentru sistemul de ecuații diferențiale (12) sînt

$$\psi_1(0) = \psi_3(0) = \psi_5(0) = \ldots = 0,$$

$$\psi_1'(0) = \psi_3'(0) = \psi_5'(0) = \ldots = 0,$$

$$\psi_1(u_2) = \psi_3(u_2) = \psi_5(u_2) = \ldots = 0, \tag{18}$$

$$\psi_1'(u_2) = \alpha_1\,;\ \psi_3'(u_2) = \alpha_3\,;\ \psi_5'(u_2) = \alpha_5\,;\ \ldots,$$

unde

$$v_r(x) = \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \alpha_5 x^5 + \ldots \tag{19}$$

Se observă că prima ecuație (13) este neliniară în $\psi_1(y)$. Sistemul rezolvîndu-se iterativ, celelalte ecuații devin ecuații liniare cu coeficienți variabili în $\psi_3(y)$, $\psi_5(y)$, ...

Volumul de calcul fiind mare, pentru o problemă concretă se pot folosi metode numerice și programarea pe calculatorul numeric.

Pentru porțiunea din elementul cinematic supusă contactului cu filmul de lubrifiant (pe lungimea L), forța pe unitatea de lungime în direcția axei barei este

$$f_1 = \mu \left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{y=u_2(x,t)} b, \tag{20}$$

unde $v = \|\bar{v}\| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$; v_x și v_y obținîndu-se din relația (6).

Pentru aceeași porțiune forța pe unitate de lungime în direcție transversală pe axa barei este

$$f_2 = b\,p(x) = -\rho \int \Phi(x)\,\mathrm{d}x + C. \tag{21}$$

Dacă $\dfrac{\partial v_r(x)}{\partial x} \cong 0$, atunci $p = p_0 = \text{const.} \cong \dfrac{R}{L}$, unde R este forța de legătură, normală la axa barei, determinată la analiza dinamică a mecanismului făcută în ipoteza neglijării filmului de lubrifiant.

2. ECUAȚII DE MIȘCARE

Referindu-ne la figura 2, ecuațile de mișcare în deplasări elastice, pentru un element cinematic rectiliniu, aflat în mișcare plan paralelă, sînt [1, 4]

$$-EA\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \rho A\omega^2 u_1 - 2\rho A\omega\frac{\partial u_2}{\partial t} - \rho A\varepsilon u_2 +$$

$$+ \rho A a_{01} - \rho A\omega v_{02} - \rho S\varepsilon - \rho\omega^2 Ax - f_1 = 0, \tag{22}$$

$$EI\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \rho I\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^2 \partial t^2} - \rho A\omega^2 u_2 + 2\rho A\omega\frac{\partial u_1}{\partial t} + \rho A\varepsilon u_1 -$$

$$- \rho A\omega v_{01} + \rho A a_{02} + \rho A\varepsilon x + \rho\omega^2 S - f_2 = 0, \qquad (23)$$

unde

$u_1(x, t)$ — deplasarea longitudinală;

E — modulul lui Young;

A — aria secțiunii transversale a barei;

ρ — masa specifică a barei;

ω — viteza unghiulară instantanee;

ε — accelerația unghiulară instantanee;

a_{01}, a_{02} — componentele accelerației liniare ale capătului O al barei pe Ox, respectiv Oy;

v_{01}, v_{02} — componentele vitezei liniare ale capătului O al barei pe Ox respectiv Oy;

I — momentul de inerție al secțiunii transversale a barei în raport cu axa sa neutră;

S — momentul static al secțiunii transversale a barei în raport cu axa sa neutră.

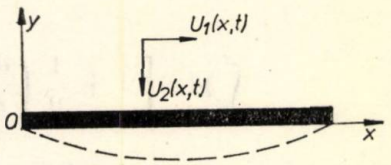


Fig. 2. — Element rectiliniu deformabil.

În ecuația (23) s-a neglijat influența forțelor tăietoare. În situația în care acestea sînt importante pentru deformația la încovoiere, în membrul stîng al ecuației se va adăuga termenul $-GAc_1 \cdot \frac{\partial^6 u_2}{\partial x^6}$, unde G este modulul de elasticitate transversală, iar c_1 este coeficientul de repartiție al eforturilor unitare tangențiale în secțiunea curentă a barei, funcție și de geometria acesteia.

De remarcat că sistemul de referință în care sînt scrise ecuațiile (22), (23) nu coincide cu sistemul de referință adoptat în prima parte a lucrării.

Pentru o problemă concretă este suficient numai să se precizeze intervalul de variație a lui x, relativ la analiza hidrodinamică a cuplelor de translație. Pe porțiunile libere (nesupuse acțiunii filmului de lubrifiant) f_1 și f_2 sînt date de încărcările exterioare aferente.

Pentru introducerea în calcul a forțelor și momentelor concentrate se va folosi cunoscuta scriere cu ajutorul distribuțiilor Dirac, iar pentru discontinuitățile de prima speță ale încărcărilor continui se va folosi scrierea cu ajutorul distribuției Heaviside [3].

De remarcat că în ecuațiile (22) și (23), v_{01}, v_{02}, a_{01}, a_{02} se referă la extremitatea stîngă a fiecărui tronson de bară, pentru fiecare tronson scriindu-se un set de ecuații (22), (23). Trebuie precizat că v_{01}, v_{02}, a_{01}, a_{02} se referă la viteza și accelerația determinate, în ipoteza rigidității elementului cinematic, cu una din metodele cunoscute : metoda grafico-analitică, metoda matriceală, metoda ciclurilor independente etc.

3. ALGORITM DE CALCUL

Determinarea constantei C din relația (21) este o problemă lăsată pînă acum în suspensie. În cele ce urmează se va prezenta un algoritm cu aproximații succesive avînd drept unul din scopuri și determinarea cîmpului de presiuni în filmul de lubrifiant în frecare din cuplele de translație.

Se poate scrie

$$\int_0^L p(x)\sqrt{1+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{R}{b} \tag{24}$$

pentru porțiunea din element cuprinsă în cupla de translație. Ecuația integrală de tip Fredholm (24), în $p(x)$ se poate scrie și sub formă aproximativă

$$\int_0^L p(x)\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x = \frac{R}{b}\,. \tag{25}$$

Se propune următorul algoritm pentru analiza vibrațiilor unui element cu cuple de translație :

1) Se face analiza elastodinamică a mecanismului, în ecuațiile (22) și (23) introducîndu-se $f_1 = 0$ și $f_2 = \frac{R}{L}\,b$, pentru fiecare tronson cuprins într-o cuplă de translație.

Fie $u_1^{(0)}(x, t)$; $u_2^{(0)}(x, t)$ deplasările elastice determinate.

2) Se face analiza hidrodinamică a cuplei de translație, determinîndu-se, cu $u_1^{(0)}(x, t)$ și $u_2^{(0)}(x, t)$, funcția de curent $\psi^{(0)}(x, y)$, cîmpul vitezelor în stratul limită laminar și presiunea $p^{(0)}(x)$, soluție a ecuației integrale (25), în care se înlocuiește $u_2(x, t)$ cu $u_2^{(0)}(x, t)$.

3) Se calculează, pentru porțiunile cuprinse în cuplele de translație, $f_1^{(0)}$ și $f_2^{(0)}$ cu relațiile (20) și (21).

4) Se rezolvă din nou ecuațiile (22) și (23), pentru porțiunile cuprinse în cuplele de translație, punînd $f_1 \to f_1^{(0)}$; $f_2 \to f_2^{(0)}$. Fie $u_1^{(1)}$ și $u_2^{(1)}$ deplasările elastice obținute.

Procedeul se continuă pînă cînd

$$|f_1^{(k+1)}(x) - f_1^{(k)}(x)| < \varepsilon; \quad |f_2^{(k+1)}(x) - f_2^{(k)}(x)| < \varepsilon,$$

unde $\varepsilon > 0$ este ales apriori în funcție de precizia impusă.

Condițiile la limită pentru fiecare tronson de bară exprimă continuitatea deformațiilor.

4. CONCLUZIE

Așa cum se știe, [2, 3, 4, 5], procedeul de analiză elastodinamică fără considerarea filmului de lubrifiant la cuplele de translație este, la rîndul său, un proces cu aproximații succesive. Algoritmul expus mai sus se intercalează ca o ramură în cadrul analizei cinetoelastice, parte componentă a analizei elastodinamice.

Primită la redacție la 10 februarie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. M. Bucurei, *Sur les équations du mouvement des éléments rectilignes linéaire — élastiques des chaînes cinématiques spatiaux*, Analele Univ. Craiova, Seria St. tehnice, **4**.
2. M. Bucurei, S. Mițis, *Sur l'analyse des vibrations des mécanismes plans*, Proceedings of the Fourth World Congress for TMM, Newcastle upon Tyne, England, 1975, p. 229—234.
3. M. Bucurei, S. Mițis, *Une méthode d'analyse dynamique des mécanismes plans a elements deformables*, Second IFTOMM int. symp, Syrom'77, București, vol. I — 1, p. 131—138.
4. S. Mițis, *Contribuții la studiul vibrațiilor grupelor structurale*, Teză, Inst. de fizică și tehn. mat., București, 1979.
5. Chr. Pelecudi, M. Bucurei, *Model termoelastodinamic pentru analiza vibrațiilor mecanismelor plane*, Conf. „Vibrații în constr. de mașini", Timișoara 1978, p. 27—32.

O METODĂ GENERALĂ DE REZOLVARE A PLĂCILOR ORTOTROPE DREPTUNGHIULARE[1)]

de MIRCEA V. SOARE
Institutul de construcții București

Se pleacă de la ecuația cu derivate parțiale a plăilor ortotrope, bazată pe netezirea nervurilor după cele două direcții ortogonale, ecuație completată cu termenul reprezentînd efectul rezemării pe un mediu elastic de tip Winkler. Soluția, bazată pe utilizarea seriilor duble de funcții fundamentale, revine la stabilirea și rezolvarea unui sistem liniar cu un număr infinit de ecuații și de necunoscute.

1. INTRODUCERE

Plăcile ortotrope cu diferite rezemări pe contur au făcut obiectul a numeroase studii în literatura de specialitate. Pentru soluționarea problemei se disting două moduri de abordare și anume :

a) considerarea sistemului discret, alcătuit din placa propriu-zisă și nervurile de rigidizare (pe una sau două direcții ortogonale) prezentînd o regularitate de conformare ;

b) netezirea nervurilor pe lățimea aferentă, astfel încît să rezulte un mediu continuu echivalent [8], [9],

Situîndu-se în această a doua ipoteză, ecuația plăcilor ortotrope rezemate pe un mediu elastic, se scrie :

$$K_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + kw = Z(x, y), \tag{1.1}$$

în care w reprezintă săgeata plăcii într-un punct curent (x, y),

K_x, K_y — rigidităţile la încovoiere ale plăcii ortotrope în direcţiile x, respectiv y,

H — rigiditatea la torsiune a plăcii ortotrope,

k — coeficientul de pat al mediului elastic, de tip Winkler,

$Z(x, y)$ — încărcarea transversală a plăcii, presupusă cunoscută.

Presupunînd K_x, H, K_y = const., ecuația cu derivate parțiale (1.1) are coeficienții constanți și pot fi obținute soluții, pentru anumite condiții de rezemare, utilizînd metoda separării variabilelor.

În cazul conturului dreptunghiular, se cunoaște soluția prin serii duble trigonometrice — dacă cele patru laturi sînt simplu rezemate —,

[1)] Text revăzut și completat al comunicării prezentate la Consfătuirea de Mecanica Solidelor, Timișoara, 15 iunie 1979.

respectiv soluția prin serii simple trigonometrice cu coeficienți variabili — dacă două laturi opuse sînt simplu rezemate, celelalte două laturi putînd avea rezemări arbitrare.

Mai sînt cunoscute soluții variaționale și numerice, asupra cărora însă nu vom insista.

Vom mai remarca suplimentar un studiu al lui P. Lardy [4]; ideea soluției este foarte simplă și constă în utilizarea unor funcții care satisfac riguros condițiile la limită pe cele două perechi de laturi opuse ale plăcii. Aceste funcții denumite fundamentale (sau caracteristice), se deduc din expresia liniei elastice a grinzii supuse la vibrații transversale ținînd seama de influența masei proprii (ele vor fi definite în §3).

Așa cum sînt aplicate în studiul amintit al lui Lardy, funcțiile fundamentale extind, pentru placa isotropă dreptunghiulară încastrată perfect pe contur, metoda seriilor duble trigonometrice (a lui Navier), aplicabilă plăcilor dreptunghiulare simplu rezemate.

În studiul de față ne-am propus să generalizăm rezultatele cunoscute în literatură prin aceea că

— cele patru laturi pot avea orice rezemări (cu restricțiile semnalate în § 7);

— placa este ortotropă (placa isotropă reprezentînd doar un caz particular);

— se include influența unui mediu elastic caracterizat printr-un singur coeficient de pat.

În paragraful al doilea, ecuația (1.1) va fi redusă la o formă canonică, evidențiindu-se diferitele cazuri particulare întîlnite în practică; în paragraful al treilea vor fi definite funcțiile fundamentale. În paragrafele 4 și 5 vor fi prezentate soluția analitică exactă, respectiv o abordare variațională a problemei, iar în paragrafele 6 și 7 cazuri particulare, respectiv vor fi subliniate observații finale.

2. ECUAȚIA CANONICĂ A PLĂCILOR ORTOTROPE

În ecuația (1.1) vom împărți toți termenii cu una dintre rigiditățile la încovoiere, fie K_x:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{H}{K_x}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{K_y}{K_x}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{k}{K_x} w = \frac{Z(x, y)}{K_x}$$

și vom face, după S. Krug și P. Stein [3], o schimbare de variabilă independentă

$$y = \gamma y', \quad \frac{\partial (\ldots)}{\partial y} = \gamma \frac{\partial (\ldots)}{\partial y'},$$

Ecuația precedentă devine:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\gamma^2 \frac{H}{K_x}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y'^2} + \gamma^4 \frac{K_y}{K_x}\frac{\partial^4 w}{\partial y'^4} + \frac{k}{K_x} w = \frac{Z(x, \gamma y')}{K_x}. \tag{2.1}$$

Parametrul γ poate fi determinat astfel încît coeficientul lui $\partial^4 w/\partial y'^4$ să fie egal cu unitatea, adică

$$\gamma^4 \frac{K_y}{K_x} = 1,$$

de unde

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{K_x}{K_y}} \quad \text{și} \quad \gamma^2 = \sqrt{\frac{K_x}{K_y}}. \tag{2.2}$$

Cu această valoare, ecuația (2.1) se scrie

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{H}{\sqrt{K_x K_y}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y'^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y'^4} + \frac{k}{K_x} w = \frac{Z(x, \gamma y')}{K_x}. \tag{2.3}$$

Vom nota

$$\varkappa = \frac{H}{\sqrt{K_x K_y}} \text{ parametrul plăcii ortotrope,} \tag{2.4}$$

$$k_1 = \frac{k}{K_x} \text{ coeficientul de pat transformat.} \tag{2.5}$$

Cu aceste notații, ecuația (2.3) se scrie sub forma canonică

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\varkappa \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + kw = \frac{Z}{K} \tag{2.6}$$

în care, pentru simplitatea scrierii, s-a luat

$$y' \to y, \; k_1 \to k, \; K_x \to K.$$

Se va nota că în (2.6) y reprezintă o coordonată transformată, iar Z și w sînt funcții de coordonata reală x și cea *transformată* y.

În cele ce urmează vom semnala unele particularizări importante.

Cazul $k = 0$ corespunde absenței mediului elastic. Ecuația corespunzătoare se deduce din (2.6):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\varkappa \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{Z}{K} \tag{2.7}$$

și ea concordă cu aceea stabilită de S. Krug și P. Stein [3].

Prin particularizarea în continuare a lui $\varkappa$ se obțin următoarele subcazuri:

a) $\varkappa = 0$, rețea de grinzi ortogonale (legate pendular) și structura reticulată planară simplă [6] :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{Z}{K}, \tag{2.8a}$$

b) $\varkappa = 1$, placă isotropă :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{Z}{K}, \tag{2.8b}$$

c) $\varkappa = 3$, structura reticulată planară oblică [7] :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 6\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{Z}{K}. \tag{2.8c}$$

Studiul general va fi făcut plecînd de la ecuația (2.6), urmînd apoi să se discute cazurile corespunzătoare valorilor particulare ale lui $\varkappa$ (§6).

3. FUNCȚIILE FUNDAMENTALE

Este cunoscut că deformata dinamică X a unei grinzi cu masa uniform distribuită satisface ecuația diferențială

$$\frac{\mathrm{d}^4 X}{\mathrm{d}x^4} - \frac{\alpha^4}{a^4} X = 0 \tag{3.1}$$

în care a reprezintă deschiderea grinzii,

α — o valoare proprie ce se determină dintr-o condiție de compatibilitate.

Soluția generală a ecuației (3.1) se scrie :

$$X(x) = C_1 \operatorname{ch} \alpha \frac{x}{a} + C_2 \cos \alpha \frac{x}{a} + C_3 \operatorname{sh} \alpha \frac{x}{a} + C_4 \sin \alpha \frac{x}{a},$$

în care C_1, C_2, C_3, C_4 reprezintă constante de integrare.

Pentru diferite condiții de rezemare ale grinzii, impunerea condițiilor marginale conduce la un sistem de patru ecuații liniare omogene ; din exprimarea condiției că determinantul principal al sistemului este nul, rezultă condiția de compatibilitate menționată anterior, care este o ecuație transcendentă în α. Se constată că, pentru fiecare set de condiții marginale, această ecuație are o infinitate de rădăcini α_m ($m = 1, 2, 3, \ldots$), deci există o infinitate de funcții $X_m(x)$. De aceea, soluția generală a ecuației (3.1) poate fi considerată ca o dezvoltare în serie de funcții fundamentale $X_m(x)$, la care fiecare termen satisface condițiile la limită.

Seriile trigonometrice în sinus și cosinus reprezintă cazuri particulare de funcții fundamentale, corespunzătoare grinzii simplu rezemate la cele două capete.

Unul dintre avantajele importante ale acestor funcții îl constituie proprietatea de *ortogonalitate*, adică subsistă relația

$$\int_0^a X_i X_j \mathrm{d}x = 0 \text{ (pentru } i \neq j). \tag{3.2}$$

Dacă se notează

$$\frac{\mathrm{d}X_m}{\mathrm{d}x} = \frac{\alpha_m}{a} X'_m, \quad \frac{\mathrm{d}^2 X_m}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\alpha_m^2}{a^2} X''_m, \ \ldots \tag{3.3}$$

rezultă relația importantă

$$X''''_m = X_m \tag{3.4}$$

adică, prin derivări de patru ori, se regăsește funcția inițială.

Funcțiile fundamentale au fost tabelate pentru diferite combinații de condiții omogene de rezemare (capăt simplu rezemat, încastrat perfect sau liber); vom semnala în special tabelele lui D. Young și R.P. Felgar jr. [13] în care forma particulară a expresiilor funcțiilor fudamentale este astfel încît să fie satisfăcută relația [1)]

$$\int_0^a X_i^2 \mathrm{d}x = a. \tag{3.5}$$

O sinteză a acestor rezultate este redată, după [1], în tabela 1.

În cele ce urmează vom presupune că o funcție oarecare $p(x)$ poate fi exprimată în intervalul $(0, a)$ sub forma unei serii de funcții fundamentale

$$p(x) = \sum_m p_m X_m(x) \quad (m = 1, 2, 3, \ldots), \tag{3.6a}$$

în care funcțiile $X_m(x)$ satisfac condițiile la limită impuse, iar

$$p_m = \frac{1}{a} \int_0^a p(x) \cdot X_m(x) \, \mathrm{d}x. \tag{3.6b}$$

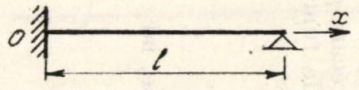
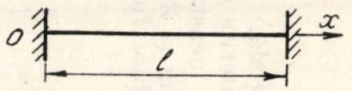
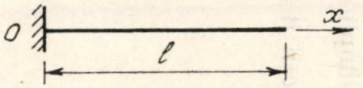
În particular, va fi util să dezvoltăm în serie de funcții fundamentale derivata secundă a unei asemenea funcții, fie X''_m:

$$X''_m = \sum_i k_{m,i} X_i \quad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.7a}$$

[1)] Face excepție cazul liniilor trigonometrice, pentru care în membrul secund rezultă $a/2$.

Tabela 1

Funcțiile fundamentale pentru trei cazuri curente de rezemare

Modul de rezemare	Grinda încastrată perfect-simplu rezemată	Grinda dublu încastrată	Grinda în consolă
			
Condiții marginale	$x = 0:\ X(0) = 0;\ X'(0) = 0,$ $x = l:\ X(l) = 0;\ X''(l) = 0.$	$x = 0:\ X(0) = 0;\ X'(0) = 0,$ $x = l:\ X(l) = 0;\ X'(l) = 0.$	$x = 0:\ X(0) = 0;\ X'(0) = 0,$ $x = l:\ X''(l) = 0;\ X'''(l) = 0.$
Ecuația caracteristică	$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{th}\alpha$	$\cos\alpha \cdot \mathrm{ch}\alpha = 1$	$\cos\alpha \cdot \mathrm{ch}\alpha = -1$
Rădăcinile α_m și coeficienții $\varkappa_m$	$\alpha_1 = 3{,}92660 \quad \varkappa_1 = 1{,}00078$ $\alpha_2 = 7{,}06858 \quad \varkappa_2 = 1{,}00000$ $\alpha_3 = 10{,}21018 \quad \varkappa_3 = 1$ $\alpha_4 = 13{,}35177 \quad \varkappa_4 = 1$ . . . . $\alpha_m \approx \left(m + \frac{1}{4}\right)\pi \quad \varkappa_m \approx 1$	$\alpha_1 = 4{,}73004 \quad \varkappa_1 = 0{,}98250$ $\alpha_2 = 7{,}85320 \quad \varkappa_2 = 1{,}00078$ $\alpha_3 = 10{,}99561 \quad \varkappa_3 = 0{,}99997$ $\alpha_4 = 14{,}13717 \quad \varkappa_4 = 1{,}00000$ . . . . $\alpha_m \approx \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \varkappa_m \approx 1$	$\alpha_1 = 1{,}87510 \quad \varkappa_1 = 0{,}73410$ $\alpha_2 = 4{,}69409 \quad \varkappa_2 = 1{,}01847$ $\alpha_3 = 7{,}85457 \quad \varkappa_3 = 0{,}99922$ $\alpha_4 = 10{,}99554 \quad \varkappa_4 = 1{,}00003$ . . . . $\alpha_m \approx \left(m - \frac{1}{2}\right)\pi \quad \varkappa_m \approx 1$
Funcțiile fundamentale și derivatele lor succesive	$X_m = \mathrm{ch}\alpha_m \frac{x}{l} - \cos\alpha_m \frac{x}{l} - \varkappa_m \left(\mathrm{sh}\,\alpha_m \frac{x}{l} - \sin\alpha_m \frac{x}{l}\right)$ $\frac{l}{\alpha_m} \cdot \frac{dX_m}{dx} = X'_m = \mathrm{sh}\alpha_m \frac{x}{l} + \sin\alpha_m \frac{x}{l} - \varkappa_m \left(\mathrm{ch}\alpha_m \frac{x}{l} - \cos\alpha_m \frac{x}{l}\right)$ $\frac{l^2}{\alpha_m^2} \cdot \frac{d^2X_m}{dx^2} = X''_m = \mathrm{ch}\alpha_m \frac{x}{l} + \cos\alpha_m \frac{x}{l} - \varkappa_m \left(\mathrm{sh}\alpha_m \frac{x}{l} + \sin\alpha_m \frac{x}{l}\right)$ $\frac{l^3}{\alpha_m^3} \cdot \frac{d^3X_m}{dx^3} = X'''_m = \mathrm{sh}\alpha_m \frac{x}{l} - \sin\alpha_m \frac{x}{l} - \varkappa_m \left(\mathrm{ch}\alpha_m \frac{x}{l} + \cos\alpha_m \frac{x}{l}\right)$		

Dezvoltarea în serie pentru o încărcare oarecare	$p(x) = \sum_m p_m X_m(x)$ unde $p_m = \frac{1}{l}\int_0^l p(x)X_m(x)\mathrm{d}x$		
Coeficienţii p_m pentru încărcarea uniformă (p = const.)	$p_m = \frac{1}{\alpha_m}[\mathrm{sh}\alpha_m - \sin\alpha_m - \varkappa_m(\mathrm{ch}\alpha_m + \cos\alpha_m) + 2\varkappa_m]\,p$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$	$p_m = \frac{4\varkappa_m}{\alpha_m}\,p$ $(m = 1, 3, 5, \ldots)$	$p_m = \frac{2\varkappa_m}{\alpha_m}\,p$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$
Dezvoltarea în serie a derivatei secunde	$X_m'' = \sum_i k_{m,i}X_i$ unde $k_{m,i} = \frac{1}{l}\int_0^l X_m''\,X_i\,\mathrm{d}x$		
Coeficienţii $k_{m,i}$ şi $k_{m,m}$	$k_{m,m} = \frac{\varkappa_m}{\alpha_m} - \varkappa_m^2$ $k_{m,i} = \frac{4\alpha_m^2}{\alpha_m^4 - \alpha_i^4}(\varkappa_m\alpha_m - \varkappa_i\alpha_i)$ $(m \neq i)$	$k_{m,m} = \frac{2\varkappa_m}{\alpha_m} - \varkappa_m^2$ $k_{m,i} = \frac{4\alpha_m^2}{\alpha_m^4 - \alpha_i^4}(\varkappa_m\alpha_m - \varkappa_i\alpha_i)\,[1 + (-1)^{i+m}]$ $(m \neq i)$	$k_{m,m} = \frac{2\varkappa_m}{\alpha_m} - \varkappa_m^2$ $k_{m,i} = 4\frac{\varkappa_m\alpha_m - \varkappa_i\alpha_i}{\alpha_m^4 - \alpha_i^4}[\alpha_m^2 + (-1)^{i+m}\alpha_i^2]$ $(m \neq i)$

sau dezvoltat

$$X_m'' = k_{m,1}X_1 + k_{m,2}X_2 + \ldots + k_{m,i}X_i + \ldots \tag{3.7b}$$

în care $k_{m,i}$ ($i = 1, 2, 3, \ldots$) sînt constante ce urmează a fi determinate. Aplicînd direct relaţia (3.6b) se obţine

$$k_{m,i} = \frac{1}{a}\int_0^a X_m'' X_i \, dx, \tag{3.7c}$$

integrală care poate fi efectuată complet, ţinînd seama de forma particulară a funcţiilor X_m, X_m''; se obţine astfel :

— pentru $i \neq m$

$$k_{m,i} = \frac{1}{\alpha_i^4 - \alpha_m^4}\Big| \alpha_m^2 (\alpha_i X_m X_i' - \alpha_m X_i X_m') + \alpha_i^2(\alpha_i X_m'' X_i''' - \alpha_m X_i'' X_m''')\Big|_0^a, \tag{3.8a}$$

— pentru $i = m$

$$k_{m,m} = \frac{1}{4\alpha_m}\Big| X_m X_m' + X_m'' X_m'''\Big|_0^a - \frac{1}{4}(X_m'^2 - 2X_m X_m'' + X_m'''^2)_{x=a}. \tag{3.8b}$$

În tabela 1 sînt date expresiile particulare ale coeficienţilor $k_{m,i}$ şi $k_{m,m}$ pentru condiţiile de rezemare considerate.

★

Pentru probleme bidimensionale, funcţiile fundamentale pot fi combinate corespunzător condiţiilor la limită prescrise ; de exemplu, o sarcină oarecare $Z(x, y)$ distribuită pe suprafaţă va putea fi exprimată în domeniul dreptunghiular $a \cdot b$ sub forma

$$Z(x, y) = \sum_m \sum_n p_{mn} X_m(x) Y_n(y), \tag{3.9}$$

în care

$$X_m(x) = C_{1m} \operatorname{ch} \alpha_m \frac{x}{a} + C_{2m} \cos \alpha_m \frac{x}{a} + C_{3m} \operatorname{sh} \alpha_m \frac{x}{a} + C_{4m} \sin \alpha_m \frac{x}{a}, \tag{3.10a}$$

$$Y_n(y) = D_{1n} \operatorname{ch} \beta_n \frac{y}{b} + D_{2n} \cos \beta_n \frac{y}{b} + D_{3n} \operatorname{sh} \beta_n \frac{y}{b} + D_{4n} \sin \beta_n \frac{y}{b},$$

(3.10b)

iar

$$p_{mn} = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) X_m(x) Y_n(y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y. \tag{3.10c}$$

Analog relațiilor (3.3), se va nota

$$\frac{\mathrm{d}Y_n}{\mathrm{d}y} = \frac{\beta_n}{b} Y_n^{\cdot}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 Y_n}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\beta_n^2}{b^2} Y_n^{\cdot\cdot}, \ \ldots \tag{3.11}$$

rezultînd că, prin derivări de patru ori, funcția Y_n și derivatele sale succesive se regăsesc.

Derivata secundă a lui Y_n va putea fi exprimată sub o formă similară cu (3.7a) sau (3.7b):

$$Y_n^{\cdot\cdot} = \sum_j \bar{k}_{n,j} Y_j \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3.12a}$$

sau dezvoltat

$$Y_n^{\cdot\cdot} = \bar{k}_{n,1} Y_1 + \bar{k}_{n,2} Y_2 + \ldots + \bar{k}_{n,j} Y_j + \ldots, \tag{3.12b}$$

în care coeficienții $\bar{k}_{n,j}$ și $\bar{k}_{n,n}$ se deduc din relațiile (3.8) prin substituțiile

$$m \to n, \ i \to j, \ a \to b, \ \alpha_m \to \beta_n, \ \alpha_i \to \beta_j, \ X_m \to Y_n, \ X_m' \to Y_n^{\cdot} \text{ etc.}$$

Trebuie subliniat că toți acești coeficienți $k_{m,i}$ și $\bar{k}_{n,j}$ pot fi determinați odată pentru totdeauna, în funcție de condițiile de rezemare, independent de parametrul plăcii ortotrope $\varkappa$.

4. UTILIZAREA SERIILOR DUBLE DE FUNCȚII FUNDAMENTALE

Pentru integrarea ecuației cu derivate parțiale (2.6), vom presupune că încărcarea exterioară poate fi pusă sub forma (3.9); vom avea în acest caz

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\varkappa \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + kw = \frac{1}{K} \sum_m \sum_n p_{mn} X_m Y_n. \tag{4.1}$$

Forma membrului secund ne sugerează să căutăm o soluție de aceeași formă

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} X_m Y_n, \tag{4.2}$$

în care coeficienții dimensionali w_{mn} urmează să fie determinați mai departe.

Introducînd expresia (4.2) în (4.1), se obține

$$\sum_m \sum_n \left(w_{mn} \frac{\alpha_m^4}{a^4} X_m'''' Y_n + w_{mn} \frac{\beta_n^4}{b^4} X_m Y_n'''' + k w_{mn} X_m Y_n - \frac{1}{K} p_{mn} X_m Y_n + \right.$$

$$\left. + 2\varkappa \frac{\alpha_m^2 \beta_n^2}{a^2 b^2} X_m'' Y_n'' \right) = 0$$

sau, ținînd seama că $X_m'' '' = X_m$ și $Y_n'''' = Y_n$ și grupînd convenabil termenii

$$\sum_m \sum_n \left[w_{mn} \left(\frac{\alpha_m^4}{a^4} + \frac{\beta_n^4}{b^4} + k - \frac{p_{mn}}{K} \right) X_m Y_n + 2\varkappa \frac{\alpha_m^2 \beta_n^2}{a^2 b^2} X_m'' Y_n'' \right] = 0. \quad (4.3)$$

Se observă că în (4.3) produsul $X_m Y_n$ nu poate fi dat factor comun, ceea ce împiedică determinarea directă a lui w_{mn} pentru fiecare rang m, n.

Vom exprima atunci, după P. Lardy [4], produsul $X_m'' Y_n''$ cu ajutorul dezvoltărilor în serie (3.7b) și (3.12b), coeficienții $k_{m,i}$, $k_{m,m}$, $\bar{k}_{n,j}$, $\bar{k}_{n,n}$ fiind presupuși cunoscuți. Avem așadar

$$X_m'' Y_n'' = \left(\sum_i k_{m,i} X_i \right) \left(\sum_j \bar{k}_{n,j} Y_j \right) = (k_{m,1} X_1 + k_{m,2} X_2 + \ldots + k_{m,i} X_i + \ldots) \cdot$$

$$\cdot (\bar{k}_{n,1} Y_1 + \bar{k}_{n,2} Y_2 + \ldots + \bar{k}_{n,j} Y_j + \ldots) \quad (4.4a)$$

sau dezvoltat

$$X_m'' Y_n'' = k_{m,1} \bar{k}_{n,1} X_1 Y_1 +$$

$$+ k_{m,1} \bar{k}_{n,2} X_1 Y_2 + k_{m,2} \bar{k}_{n,1} X_2 Y_1 +$$

$$+ k_{m,1} \bar{k}_{n,3} X_1 Y_3 + k_{m,2} \bar{k}_{n,2} X_2 Y_2 + k_{m,3} \bar{k}_{n,1} X_3 Y_1 +$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4.4b)$$

unde pe fiecare rînd intervin funcțiile X_i și Y_j astfel încît $i + j = \text{const.}$

Introducînd acum expresia (4.4a) în (4.3), se obține

$$\sum_m \sum_n w_{mn} \left[\left(\frac{\alpha_m^4}{a^4} + \frac{\beta_n^4}{b^4} + k \right) X_m Y_n + 2\varkappa \frac{\alpha_m^2 \beta_2^n}{a^2 b^2} \sum_i k_{m,i} X_i \cdot \sum_j \bar{k}_{n,j} Y_j \right] =$$

$$= \frac{1}{K} \sum_m \sum_n p_{mn} X_m Y_n. \quad (4.5)$$

Termenii pot fi grupați după produsele $X_i Y_j$. Egalînd cu zero coeficienții tuturor produselor rezultă un sistem infinit de ecuații care determină necunoscutele w_{mn} (m, $n = 1, 2, 3, \ldots$).

El are forma generală

$$(X_1Y_1)\quad \left(\frac{\alpha_1^4}{a^4}+\frac{\beta_1^4}{b^4}+k+2\varkappa\frac{\alpha_1^2\beta_1^2}{a^2b^2}k_{1,1}\bar{k}_{1,1}\right)w_{11}+2\varkappa\frac{\alpha_1^2\beta_2^2}{a^2b^2}k_{1,1}\bar{k}_{2,1}w_{12}+$$

$$+2\varkappa\frac{\alpha_1^2\beta_3^2}{a^2b^2}k_{1,1}\bar{k}_{3,1}w_{13}+\ldots=\frac{p_{11}}{K}$$

$$(X_1Y_2)\quad 2\varkappa\frac{\alpha_1^2\beta_1^2}{a^2b^2}k_{1,1}\bar{k}_{1,2}w_{11}+\left(\frac{\alpha_1^4}{a^4}+\frac{\beta_2^4}{b^4}+k+2\varkappa\frac{\alpha_1^2\beta_2^2}{a^2b^2}k_{1,1}\bar{k}_{2,2}\right)w_{12}+$$

$$+2\varkappa\frac{\alpha_1^2\beta_3^2}{a^2b^2}k_{1,1}\bar{k}_{3,2}w_{13}+\ldots=\frac{p_{12}}{K}, \tag{4.6}$$

$$(X_2Y_1)\quad 2\varkappa\frac{\alpha_1^2\beta_1^2}{a^2b^2}k_{1,1}\bar{k}_{1,1}w_{11}+2\varkappa\frac{\alpha_1^2\beta_2^2}{a^2b^2}k_{1,2}\bar{k}_{2,1}w_{12}+\ldots+$$

$$+\left(\frac{\alpha_2^4}{a^4}+\frac{\beta_1^4}{b^4}+k+2\varkappa\frac{\alpha_2^2\beta_1^2}{a^2b^2}k_{2,2}\bar{k}_{1,1}\right)w_{21}+\ldots=\frac{p_{21}}{K},$$

. . . . . .

Sistemul (4.6) poate fi încă scris sub formă condensată

$$\left(\frac{\alpha_i^4}{a^4}+\frac{\beta_j^4}{b^4}+k\right)w_{ij}+2\varkappa\sum_m\sum_n\frac{\alpha_m^2\beta_n^2}{a^2b^2}k_{m,i}\bar{k}_{n,j}w_{mn}=\frac{p_{ij}}{K}, \tag{4.7}$$

unde $m, n = 1, 2, 3, \ldots$ în fiecare ecuație,
$i, j = 1, 2, 3, \ldots$ caracterizează ecuațiile sistemului.

Ecuația generală (4.7) mai poate fi scrisă punînd în evidență termenul de pe diagonala principală a sistemului:

$$\left(\frac{\alpha_i^4}{a^4}+\frac{\beta_j^4}{b^4}+k+2\varkappa\frac{\alpha_i^2\beta_j^2}{a^2b^2}k_{i,i}\bar{k}_{j,j}\right)w_{ij}+2\varkappa\sum_m\sum_n\frac{\alpha_m^2\beta_n^2}{a^2b^2}k_{m,i}\bar{k}_{n,j}w_{mn}=$$

$$=\frac{p_{ij}}{K}\quad(\text{cu } m\neq i,\ n\neq j \text{ simultan}). \tag{4.8}$$

Sistemul de ecuații obținut are coeficienți care descresc rapid. Din punct de vedere practic sistemul poate fi rezolvat în etape, mergînd în lungul diagonalei principale așa cum se indică în figura 1.

etapa 1	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	...
etapa a 2-a	w_{21}	w_{22}	w_{23}	w_{24}	...
etapa a 3-a	w_{31}	w_{32}	w_{33}	w_{34}	...
etapa a 4-a	w_{41}	w_{42}	w_{43}	w_{44}	...
	. . . . .				

Fig. 1

Aproximaţia poate fi împinsă pînă ce se obţine gradul de exactitate dorit.

Deoarece obţinerea sistemului de ecuaţii este relativ greoaie, în paragraful următor va fi examinată şi abordarea variaţională a problemei.

5. ABORDAREA VARIAŢIONALĂ

Vom rescrie ecuaţia cu derivate parţiale (2.6) sub forma

$$\Phi(x,y,w) \equiv \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\varkappa \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + kw - \frac{Z}{K} = 0; \qquad (5.1)$$

în ipoteza unor condiţii omogene pe contur, vom căuta o soluţie aproximativă cu ajutorul funcţiilor fundamentale; în felul acesta vor fi satisfăcute, pentru fiecare pereche de funcţii $X_m Y_n$, toate condiţiile la limită.

Fie atunci soluţia căutată sub forma

$$w^* = \sum_m \sum_n w_{mn} X_m Y_n, \qquad (5.2)$$

care diferă de (4.2) prin ipoteza *iniţială* că suma dublă este finită. w_{mn} reprezintă, ca şi precedent, coeficienţi dimensionali ce urmează a fi determinaţi.

Pentru determinarea lor ne vom fixa la metoda ortogonalizării care este o metodă absolut generală.

Dacă w^* ar reprezenta soluţia exactă, operatorul Φ definit de (5.1) s-ar anula identic, iar această condiţie este echivalentă cu condiţia de ortogonalitate a expresiei Φ^* faţă de toate funcţiile $(X_i Y_j)$. Avînd însă la dispoziţie un număr limitat de parametri $(w_{11}, w_{12}, w_{21}, w_{13}, \ldots, w_{mn})$ putem în general să satisfacem doar un număr de mn condiţii de ortogonalitate. Scriind aceste condiţii se ajunge la sistemul de ecuaţii

$$\int_0^a \int_0^b \Phi^* X_i Y_j \, dx dy = \int_0^a \int_0^b \Phi\left(\sum_m \sum_n w_{mn} X_m Y_n\right) X_i Y_j \, dx dy = 0 \qquad (5.3)$$

$$(i, j = 1, 2, 3, \ldots),$$

care servește pentru determinarea coeficienților w_{mn}. Operatorul diferențial fiind liniar, sistemul de ecuații rezultă și el liniar.

Metoda ortogonalizării, aplicată la probleme de mecanica construcțiilor, poate fi privită ca o metodă de aplicare aproximativă a *principiului deplasărilor virtuale.*

Pentru aceasta se observă că operatorul Φ, ca parte stîngă a ecuației diferențiale de echilibru, reprezintă rezultanta tuturor forțelor exterioare și ale eforturilor interioare aplicate unui element de placă ; $X_i Y_j$ (mai puțin factorul constant w_{ij}) reprezintă deplasarea virtuală a acestui element.

Condiția (5.3) exprimă în mod aproximativ faptul că lucrul mecanic al întregii structuri care efectuează deplasările virtuale ($X_i Y_j$) este egal cu zero.

★

Înlocuind în (5.1), în care Z este luat sub forma (3.9), expresia propusă (5.2), se obține

$$\Phi^* = \sum_m \sum_n \left(w_{mn} \frac{\alpha_m^4}{a^4} X_m Y_n + w_{mn} \frac{\beta_n^4}{b^4} X_m Y_n + k w_{mn} X_m Y_n - \frac{p_{mn}}{K} X_m Y_n + \right.$$

$$\left. + 2\varkappa \frac{\alpha_m^2 \beta_n^2}{a^2 b^2} X_m'' Y_n'' \right). \tag{5.4}$$

Condițiile variaționale (5.3) se scriu :

$$\int_0^a \int_0^b \Phi^* X_i Y_j \, dx dy = \sum_m \sum_n \int_0^a \int_0^b \left\{ \left[w_{mn} \left(\frac{\alpha_m^4}{a^4} + \frac{\beta_n^4}{b^4} + k \right) - \frac{p_{mn}}{K} \right] X_m X_i Y_n Y_j + \right.$$

$$\left. + 2\varkappa w_{mn} \frac{\alpha_m^2 \beta_n^2}{a^2 b^2} X_m'' X_i Y_n'' Y_j \right\} dx dy = 0. \tag{5.5}$$

Ținînd seama de relațiile (3.2) și (3.5) rezultă

$$\int_0^a X_m X_i dx = 0 \text{ pentru } m \neq i \text{ și } \int_0^a X_i^2 dx = a,$$

$$\int_0^b Y_n Y_j dy = 0 \text{ pentru } n \neq j \text{ și } \int_0^b Y_j^2 dy = b,$$

astfel încît ecuația (5.5) se reduce la următoarea

$$w_{ij} \left(\frac{\alpha_i^4}{a^4} + \frac{\beta_j^4}{b^4} + k \right) - \frac{p_{ij}}{K} + 2\varkappa \sum_m \sum_n \frac{\alpha_m^2 \beta_n^2}{a^2 b^2} \frac{1}{a} \int_0^a X_m'' X_i \, dx \cdot \frac{1}{b} \int_0^b Y_n'' Y_j dy = 0. \tag{5.6}$$

Ţinînd seama de expresia (3.7c) care determină coeficientul $k_{m,i}$ şi o expresie similară care determină pe $\bar{k}_{n,j}$, rezultă că ecuaţia (5.6) se scrie sub forma generală :

$$\left(\frac{\alpha_i^4}{a^4}+\frac{\beta_j^4}{b^4}+k\right)w_{ij}+2\varkappa\sum_m\sum_n\frac{\alpha_m^2\beta_n^2}{a^2b^2}k_{m,i}\,\bar{k}_{n,j}\,w_{mn}=\frac{p_{ij}}{K},\qquad(5.7)$$

care concordă cu (4.7) obţinută prin metoda exactă.

Luînd $i, j = 1, 2. 3,\ldots$ se obţine sistemul de ecuaţii căutat.

Dacă numărul funcţiilor de aproximare (X_iY_j) creşte nedefinit, iar suma dublă se transformă într-o serie dublă de funcţii fundamentale, se recunoaşte uşor că soluţia variaţională este chiar soluţia exactă.

Se observă că modul de obţinere a soluţiei a fost mai direct şi mai simplu.

6. CAZURI PARTICULARE

Vom examina, în continuare, particularizările semnalate la §2.

Cazul $k = 0$ (nu există rezemare pe un mediu elastic) afectează doar coeficienţii de pe diagonala principală a sistemului.

Cazul $\varkappa = 0$ corespunde unei rigidităţi la torsiune nule sau mediului continuu echivalent unei structuri planare simple. Observăm că toţi coeficienţii secundari (nesituaţi pe diagonala principală a sistemului) au în factor pe $\varkappa$ şi, în acest caz, se anulează.

Fiecare necunoscută w_{mn} rezultă direct sub forma generală

$$w_{mn}=\frac{p_{mn}}{K}\,\frac{1}{\dfrac{\alpha_m^4}{a^4}+\dfrac{\beta_n^4}{b^4}+k}\qquad(6.1)$$

dedusă din (4.7) prin schimbarea de indici $i \to m$, $j \to n$.

În absenţa coeficientului de pat ($k = 0$), relaţia (6.1) se simplifică

$$w_{mn}=\frac{p_{mn}}{K}\,\frac{1}{\dfrac{\alpha_m^4}{a^4}+\dfrac{\beta_n^4}{b^4}},\qquad(6.2)$$

ea a fost semnalată de P. Lardy [4] în cazul reţelelor de grinzi şi de M. Soare [6] în cazul structurilor planare simple.

Cazul $\varkappa = 1$ corespunde plăcilor isotrope sau plăcilor ortotrope la care $H^2 - K_xK_y = 0$. El simplifică formal coeficienţii sistemului de ecuaţii. El a fost studiat în detaliu de P. Lardy [4] pentru cazul plăcii dreptunghiulare încastrate pe tot conturul, evidenţiind că problema este mult simplificată prin reducerea rezolvării a două sisteme liniare cu număr infinit de ecuaţii [11], la unul singur.

Cazul $\varkappa = 3$ corespunde mediului continuu echivalent unei structuri planare oblice [7]; el afectează doar numeric coeficienţii sistemului de ecuaţii.

7. OBSERVAŢII FINALE

Metoda de rezolvare propusă în acest studiu poate fi extinsă şi în cazul unui mediu elastic caracterizat prin doi coeficienţi de pat; primul este coeficientul de tasare k în modelul Winkler, iar al doilea reprezintă o caracteristică de frecare dintre placă şi mediul elastic k' (de dimensiuni FL^{-3} ca şi k).

Luînd în considerare şi aceste forţe de frecare, proporţionale cu panta tangentei în fiecare direcţie ($\partial w/\partial x$, respectiv $\partial w/\partial y$), se ajunge la următoarea ecuaţie cu derivate parţiale:

$$K_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - k'_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k'_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + kw = Z, \quad (7.1)$$

în care, datorită ortotropiei, apar caracteristici de frecare diferite în direcţiile x şi y (k'_x, respectiv k'_y).

Făcînd aceeaşi transformare afină a axei y, definită de relaţia $y = \gamma y'$, unde γ este definit de (2.2), notînd

$$k_1 = \frac{k}{K_x}, \quad k'_{1x} = \frac{k'_x}{K_x}, \quad k'_{1y} = \frac{k'_y}{\sqrt{K_x K_y}}, \quad \varkappa = \frac{H}{\sqrt{K_x K_y}},$$

şi apoi revenind la notaţiile

$$y' \to y, \quad K_x \to K, \quad k'_{1x} \to k'_x, \quad k'_{1y} \to k'_y, \quad k_1 \to k,$$

forma canonică a ecuaţiei (7.1) este:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\varkappa \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - k'_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k'_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + kw = \frac{Z}{K}. \quad (7.2)$$

Cu expresiile (3.9) şi (4.2) pentru încărcarea transversală, respectiv pentru săgeţi, ecuaţia (7.2) se scrie:

$$\sum_m \sum_n \left\{ w_{mn} \left[\left(\frac{\alpha_m^4}{a^4} + \frac{\beta_n^4}{b^4} + k \right) X_m Y_n + 2\varkappa \frac{\alpha_m^2 \beta_n^2}{a^2 b^2} X''_m Y''_n - k'_x \frac{\alpha_m^2}{a^2} X''_m Y_n - \right. \right.$$

$$\left. \left. - k'_y \frac{\beta_n^2}{b^2} X_m Y''_n \right] - \frac{p_{mn}}{K} X_m Y_n \right\} = 0. \quad (7.3)$$

Şi în relaţia astfel obţinută derivatele secunde X''_m şi Y''_n trebuie să fie exprimate cu ajutorul dezvoltărilor în serie (3.7) şi (3.12).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1913 KÖNYVTÁR

O a doua observație pe care o facem privește condițiile de rezemare. Se constată ușor că o latură simplu rezemată sau încastrată perfect implică două condiții la limită în raport cu o singură variabilă. De exemplu, pentru latura $x = 0$ simplu rezemată, condițiile $w = 0$ și $\partial^2 w/\partial x^2 = 0$ conduc la condițiile $X = 0$, $X'' = 0$; în mod asemănător, pentru latura $x = 0$ încastrată perfect, condițiile $w = 0$ și $\partial w/\partial x = 0$ conduc la condițiile $X = 0$ și $X' = 0$.

Combinațiile de rezemări pentru care utilizarea seriilor duble sau simple trigonometrice este posibilă și eficientă a fost reprezentată în figura 2*a*, iar combinațiile de rezemări pentru care precizarea funcțiilor fundamentale nu ridică probleme deosebite sînt reprezentate în figura 2*b*.

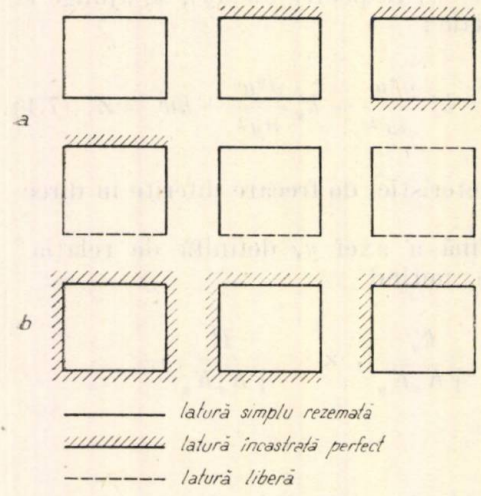


Fig. 2

Marginea liberă necesită condiții de moment încovoietor și forță tăietoare generalizată nule unde condițiile la limită implică ambele variabile x și y, deci o corelație între funcțiile X, Y și derivatele lor succesive. În consecință, problema rămîne deschisă sub acest aspect.

Limitîndu-ne la cazul plăcii ortotrope fără rezemare pe mediu elastic — ecuația (2.7) — vor fi posibile tabelări și grafice de tipul suprafețelor de influență publicate de S. Krug și P. Stein [3]. Pe lîngă parametrul plăcii ortotrope $\varkappa$ va interveni un al doilea parametru ε, reprezentînd raportul laturilor transformate

$$\varepsilon = \frac{b}{a} \sqrt[4]{\frac{K_x}{K_y}}.$$

În sfîrșit, utilizarea seriilor duble de funcții fundamentale se poate dovedi extrem de eficientă la studierea problemelor de voalare și de deformații mari ale plăcilor plane isotrope și ortotrope.

Primită la redacție la 19 septembrie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. A. A. Beleș, M. Soare, *Elliptic and Hyperbolic Paraboloidal Shells Used in Constructions*, Ed. Academiei, București, 1976.
2. R. P. Felgar Jr., *Formulas for Integrals Containing Characteristic Functions of a Vibrating Beam*, Bureau of Engineering Research, Circular No. 14, The University of Texas, 1950.
3. S. Krug, P. Stein, *Einflussfelder orthogonal anisotroper Platten*, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1961.
4. P. Lardy, *Sur une méthode nouvelle de résolution du problème des dalles rectangulaires encastrées*. Association Internationale des Ponts et Charpentes, Mémoires, XIII, Zürich, 1953, p. 197–220.

5. M. V. Soare, *O metodă generală de rezolvare a plăcilor dreptunghiulare*. St. cerc. mec. apl., **12**, *2*, 277–291 (1961).
6. — *Statica și dinamica rețelelor spațiale planar pătrate simple prin aplicarea metodei mediului continuu echivalent*, St. cerc. mec. apl., **31**, *3*, 673–702 (1972).
7. — *On the Statics and Dynamics of Double–Layer Oblique Square Mesh Grids*, Acta Techn. Acad. Sci. Hungaricae, **79**, *3–4*, 335–350 (1974).
8. — *Contribuții la calculul plăcilor ortotrope, cu nervuri de rigidizare pe o singură parte*, St. cerc. mec. apl., **33**, *4*, 695–710 (1974) ; **34**, *1*, 31–44 (1975).
9. — *Plăci plane* (Secțiunea VI din Manual pentru calculul construcțiilor), ed. II-a, vol. I, Ed. Tehnică, București, 1977
10. K. Szmodits, *Investigation of Rectangular Plates and Gridworks on the Basis of Different Boundary Conditions*, Acta Techn. Acad. Sci. Hungaricae, **48**, *1–2*, 23–28 (1964).
11. St. P. Timoshenko, S. Woinowsky–Krieger, *Teoria plăcilor plane și curbe*, Ed. a 2-a (trad. din l. engleză), București, Ed. tehnică, 1968.
12. W. S. Wlassow, *Allgemeine Schalentheorie and Ihre Anwendung in der Technik*, Akademie-Verlag, Berlin, 1958.
13. D. H. Young, R. P. Felgar, Jr., *Tables of Characteristic Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam*, Engineering Research Bulletin No. 4913, Bureau of Engineering Research, The University of Texas, July 1949.
14. O. Zanaboni, *Reticoli di travi a grande numero di maglie*, Giornale del Genio Civile, *5* (1947).

EXTINDEREA SOLUȚIEI PRIN SERII DUBLE TRIGONOMETRICE PENTRU PLACA RIGIDIZATĂ CU NERVURI DISPUSE PE O SINGURĂ PARTE*)

de GABRIEL D. POPA

Universitatea din Galați

Se extinde soluția prin serii duble trigonometrice pentru calculul platelajelor metalice alcătuite din tablă de grosime constantă și profile metalice neidentice, neechidistante, nesimetrice, dispuse pe o singură direcție. În acest scop conlucrarea dintre placă și nervuri este considerată prin egalarea săgeților elementelor componente ale structurii pe liniile în contact ale plăcii cu muchiile tălpilor superioare ale nervurilor, stabilindu-se relațiile generale de calcul.

În continuare, se trece la limită pentru situația structurilor cu nervuri înguste, și se ilustrează aplicarea practică a metodei propuse.

1. INTRODUCERE

Plăcile rigidizate cu nervuri dispuse pe o singură direcție fac parte din categoria plăcilor ortotrope cu ortrotropie structurală.

Datorită marilor avantaje pe care le prezintă, sub aspectul tehnic și tehnologic, plăcile ortotrope cu ortotropie structurală au o largă răspîndire în construcțiile din beton armat sau în construcțiile metalice ca: platelaje pentru poduri, stavile și porți pentru construcții hidrotehnice, capace și punți pentru construcțiile navale, planșee și platforme pentru construcții civile și industriale. Aceste sisteme constructive sînt alcătuite din placă și nervuri dispuse pe o singură direcție sau pe două direcții perpendiculare.

Bazele teoretice privind calculul plăcilor ortotrope cu ortotropie structurală au fost puse de M.T. Huber (1914), care, pentru obținerea unui mediu continuu ortotrop, a admis premisa „netezirii" nervurilor. Această premisă este încă și astăzi utilizată ca urmare a studiilor lui W. Cornelius, A. Pflüger, K. Trenks, Ch. Massonet ș.a. publicate după anul 1950.

Ideea că o placă ortotropă cu ortotropie structurală este un mediu discret, datorită însuși modului de dispunere a nervurilor, apare în literatura de specialitate începînd cu anul 1962 în lucrările lui N.M. Dehousse (1972), Wah Thein și R.L. Calcote (1970), M.V. Soare (1975).

---

* Lucrarea de față reprezintă o parte din teza de doctorat a autorului, intitulată „Contribuții la calculul plăcilor ortotrope ținînd seama de legătura elastică dintre placă și nervuri" (conducător științific Prof. dr. doc. Ing. Mircea V. Soare).

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 2, 1980, P. 221–235

Abordarea plăcilor rigidizate cu nervuri dispuse pe o singură direcţie şi alcătuind structuri simplu rezemate pe întreg conturul, ca medii discrete, aparţine însă lui I. Beliş [2] (1971) care a exprimat condiţiile de egalitate dintre săgeţile plăcii propriu-zise şi săgeţile nervurilor în secţiunile de contact şi a aplicat, ca metodă de soluţionare, metoda seriilor duble trigonometrice. Acest mod de abordare constituie, exceptînd metodele numerice (bazate pe discretizarea structurii în elemente finite), tendinţa cea mai corectă şi de perspectivă pentru îmbunătăţirea metodelor de calcul al plăcilor ortotrope cu ortotropie structurală.

Pentru elucidarea anumitor aspecte ale comportării plăcilor ortotrope cu ortotropie structurală în construcţiile navale a rezultat necesitatea elaborării unor metode de calcul mai real şi mai exact al plăcilor rigidizate cu nervuri dispuse pe o singură direcţie, metode care să satisfacă următoarele cerinţe :

a. conlucrarea elastică dintre placă şi nervuri să fie considerată prin egalarea săgeţilor elementelor structurii pe liniile în contact ale plăcii cu muchiile tălpilor superioare ale nervurilor obişnuite, respectiv prin egalarea săgeţilor şi rotirilor elementelor structurii pe secţiunile în contact ale plăcii cu nervurile înguste ;

b. luarea în considerare a torsiunii nervurilor obişnuite sau înguste ;

c. extinderea aplicării metodei seriilor duble trigonometrice pentru obţinerea soluţiei în cazul cînd toate cele patru laturi ale structurii sînt simplu rezemate ;

d. aplicarea metodei seriilor simple trigonometrice pentru obţinerea soluţiei în cazul cînd structura este simplu rezemată doar pe două laturi opuse (perpendiculare pe direcţia nervurilor) şi permite condiţii de rezemare arbitrare pe celelalte două laturi ; în plus, asigurarea unei convergenţe sporite, implicînd sumarea după unul dintre indicii seriilor duble ;

e. programarea metodelor de calcul propuse pe calculatorul electronic care să permită, pentru proiectarea curentă, obţinerea rezultatelor în baza a cîtorva date de intrare.

Cerinţele de la punctele a), b), c) şi e) au fost satisfăcute de extinderea soluţiei prin serii duble trigonometrice pentru placa rigidizată cu nervuri dispuse pe o singură direcţie.

Cerinţele de la punctele a), b), d) şi e) au fost satisfăcute de soluţie prin serii simple trigonometrice pentru placa rigidizată cu nervuri dispuse pe o singură direcţie [9].

În cele ce urmează va fi tratată extinderea soluţiei prin serii duble trigonometrice pentru placa cu nervuri dispuse pe o singură direcţie.

2. CONSIDERAŢII GENERALE

Pentru deducerea metodei de calcul se consideră structura metalică, simplu rezemată pe întreg conturul, alcătuită din placa de grosime constantă h şi un număr de k nervuri diferite, neechidistante (fig. 1).

Îmbinarea dintre placă (tablă) şi nervuri (profile la care, în general, centrul de greutate şi centrul de rotire nu se confundă), este presupusă perfectă şi realizată în mod obişnuit prin cordoane de sudură continue pe toate muchiile profilelor în contact cu tabla.

Pentru structura considerată se pune problema determinării stării de eforturi atît din placă, cît și din fiecare nervură, ținînd seama de conlucrarea elastică dintre aceste elemente. Rezolvarea problemei revine deci la deducerea expresiilor corespunzătoare ale săgeților plăcii și nervurilor, provenite din încovoiere, precum și a rotirilor nervurilor, provenite din torsiune.

După cum se cunoaște, din teoria clasică a plăcilor plane, expresia $W(x,y)$ a săgeților plăcii trebuie să satisfacă ecuația diferențială cu derivate parțiale de ordinul al patrulea

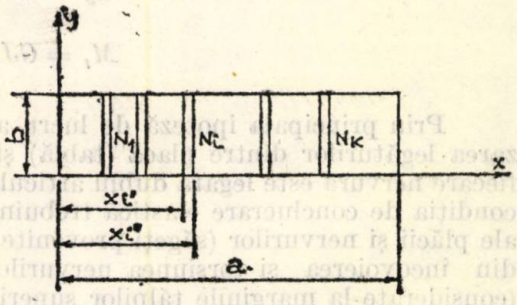


Fig. 1

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q(x,y)}{K}. \tag{a}$$

Analog, din statica grinzii drepte, expresia $W(y)$ a săgeților nervurilor, provenite din încovoiere, trebuie să satisfacă ecuația diferențială ordinară, tot de ordinul al patrulea

$$\frac{\mathrm{d}^4 W}{\mathrm{d}y^4} - = \frac{p(y)}{EI}, \tag{b}$$

iar expresia $\theta(y)$ a rotirilor nervurilor, provenite din torsiune, trebuie să satisfacă ecuația diferențială ordinară de ordinul al doilea

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}y^2} = -\frac{m(y)}{GJ}. \tag{c}$$

Dacă se cunosc expresiile $W(x, y)$, $W(y)$, $\theta(y)$, eforturile aferente unității de lungime de placă se determină din relațiile

$$M_x = -K\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right); \quad M_y = -K\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right),$$

$$M_{yx} = M_{xy} = -K(1-\mu)\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \tag{a'}$$

$$T_x = -K\frac{\partial}{\partial x}(\Delta W); \quad T_y = -K\frac{\partial}{\partial y}(\Delta W),$$

$$T_x^* = T_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \quad T_y^* = T_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x},$$

iar eforturile secţionale din nervuri se determină din relaţiile :

$$M = -EI\frac{d^2W}{dy^2}\ ;\ T = -EI\frac{d^3W}{dy^3}, \qquad (b')$$

$$M_t = GJ\frac{d\theta}{dy}. \qquad (c')$$

Prin principala ipoteză de lucru adoptată, constituind în schematizarea legăturilor dintre placă (tablă) şi nervuri (profile), vom admite că fiecare nervură este legată dublu articulat de placă (fig. 2), în felul acesta condiţia de conclucrare elastică trebuind să exprime egalitatea de săgeţi ale plăcii şi nervurilor (săgeţi provenite din încovoierea plăcii şi respectiv din încovoierea şi torsiunea nervurilor) pe liniile teoretice de contact (considerate la marginile tălpilor superioare ale nervurilor) sub acţiunea încărcărilor exterioare.

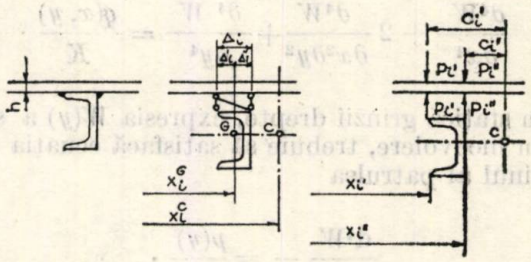


Fig. 2

Considerăm că, dacă se ţine seama de solidarizarea prin sudură a tablei cu profilele palatelajului precum şi de faptul că pentru solicitările de încovoiere şi de torsiune ale grinzilor se admite indeformabilitatea secţiunilor transversale în planul lor, schematizarea din figura 2 este nu numai admisibilă dar şi mai reală faţă de cea corespunzătoare situaţiei în care nervurile ar fi reprezentate prin axele lor trecînd prin centrele de greutate ale secţiunilor transversale.

Pentru efectuarea studiului se alege sistemul cartezian de coordonate astfel încît planul xOy coincide cu planul median al plăcii, iar axa Oz este îndreptată în jos.

Caracteristicile geometrice şi mecanice ale structurii studiate se definesc după cum urmează :

$a, b, \alpha = \frac{a}{b}$ — deschiderile de calcul ale platelajului şi raportul acestora ;

k — numărul nervurilor platelajului ;

$E,\ \mu,\ G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ — constantele elastice ale materialului ;

h — grosimea plăcii ;

$K = \dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea la încovoiere a plăcii;

$c_{i'}$, $c_{i''}$ — distanțele de la marginile tălpii superioare ale nervurii N_i la axa ce trece prin centrul de rotire al secțiunii sale transversale;

I_i, J_i — momentul de inerție și, respectiv, caracteristica de torsiune ale nervurii N_i;

x_i — abscisele axelor nervurilor;

$x_{i'}$, $x_{i''}$ — abscisele muchiilor nervurilor.

Mai trebuie precizat că:

— indicii „' și " "indică faptul că mărimea geometrică respectivă este aferenta muchiei tălpii superioare a nervurii aflate la stînga și, respectiv, la dreapta axei ce trece prin centrul de greutate G al secțiunii transversale a nervurii;

— mărimile $c_{i'}$ și $c_{i''}$ se măsoară între suporturile încărcărilor liniare $p_{i'}$ și $p_{i''}$ și axa ce trece prin centrul de rotire C al secțiunii transversale a nervurii, fiind pozitive dacă măsurarea s-a făcut în sensul pozitiv al axei Ox.

3. EXTINDEREA APLICĂRII METODEI SERIILOR DUBLE TRIGONOMETRICE

După suprimarea legăturilor pendulare dintre elementele componente și introducerea reacțiunilor liniare $p_{i'}$ și $p_{i''}$, structura ortotropă se separă într-o placă izotropă simplu rezemată pe contur și un număr de k nervuri simplu rezemate la capete.

Ținînd seama de modul de rezemare al elementelor componente ale structurii și de faptul că încărcarea exterioară de suprafață poate varia pe placă în ambele direcții (Ox și Oy), rezolvarea problemei se va face utilizînd seriile duble trigonometrice.

Referindu-ne mai întîi la placa izotropă simplu rezemată pe contur, observăm că asupra acesteia acționează încărcarea exterioară de suprafață $p_0(x,y)$, cunoscută, care poate fi reprezentată sub forma seriei duble trigonometrice:

$$p_0(x,y) = \sum_m \sum_n p_{0;mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad (1.a)$$

$$(m,n = 1,\ 2,\ 3,\ldots.)$$

precum și încărcările liniare $p_{i'}(y)$, $p_{i''}(y)$, necunoscute, care la rîndul lor pot fi reprezentate sub forma seriilor simple trigonometrice:

$$p_{i'}(y) = \sum_n p_{i',n} \sin \frac{n\pi y}{b}\ ;\ p_{i''}(y) = \sum_n p_{i'',n} \sin \frac{n\pi y}{b}. \qquad (1.b)$$

$$(i = \overline{1,k};\ \ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

sau a seriilor duble trigonometrice :

$$p_{i'}(y) = \frac{2}{a} \sum_m \sum_n p_{i',n} \sin \frac{m\pi x_{i'}}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$p_{i''}(y) = \frac{2}{a} \sum_m \sum_n p_{i'',n} \sin \frac{m\pi x_{i''}}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$(i = \overline{1, k};\ m,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

astfel că încărcarea totală $q(x, y)$ ce acţionează asupra plăcii este :

$$q(x,\ y) = p_0(x,\ y) + \sum_i [(p_{i'}(y) + p_{i''}(y)] =$$

$$= \sum_m \sum_n \left[p_{0,mn} + \frac{2}{a} \sum_i \left(p_{i',n} \sin \frac{m\pi x_{i'}}{a} + p_{i'',n} \sin \frac{m\pi x_{i''}}{a} \right) \right] \times$$

$$\times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad (1.c)$$

$$(i = \overline{1, k};\ m, n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Exprimînd acum că ecuaţia cu derivate parţiale (a), în care încărcarea de suprafaţă este dată de (1.c), este satisfăcută de soluţia pentru săgeţi de forma

$$W(x,\ y) = \sum_m \sum_n W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad (2.a)$$

$$(m, n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

ce îndeplineşte condiţiile pe contur ale plăcii, rezultă :

$$W_{mn} = \frac{p_{0,mn} + \frac{2}{a} \sum_i \left(p_{i',n} \sin \frac{m\pi x_{i'}}{a} + p_{i'',n} \sin \frac{m\pi x_{i''}}{a} \right)}{K \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2} \qquad (2.b)$$

$$(i = \overline{1,k};\ m,\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

În particular, săgeţile plăcii pe liniile în contact cu muchiile nervurilor se deduc din (2.a) făcînd succesiv $x = x_{i'}$ şi $x = x_{i''}$:

$$W(x_{i'}, y) = \sum_m \sum_n W_{mn} \sin \frac{m\pi x_{i'}}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$W(x_{i''}, y) = \sum_m \sum_n W_{mn} \sin \frac{m\pi x_{i''}}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{d}$$

$$(i = \overline{1,k};\ m, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Referindu-ne apoi la nervuri, simplu rezemate la capete, observăm că asupra acestora acţionează încărcările liniare :

$$p_i(y) = -[p_{i'}(y) + p_{i''}(y)] \tag{3.a}$$

$$(i = \overline{1,k})$$

precum şi momentele de torsiune distribuite :

$$m_i(y) = c_{i'} p_{i'}(y) + c_{i''} p_{i''}(y) \tag{4.a}$$

$$(i = \overline{1,k}).$$

Exprimînd acum că ecuaţia diferenţială ordinară (b), în care încărcarea liniară este dată de (3.a) şi (1.b), este satisfăcută de soluţiile pentru săgeţi de forma :

$$W_i(y) = \sum_n W_{i,n} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{3.b}$$

$$(i = \overline{1,k};\ n = 1, 2, 3, \ldots)$$

care îndeplinesc condiţiile la capetele nervurilor, rezultă :

$$W_{i,n} = -\frac{b^4 (p_{i',n} + p_{i'',n})}{\pi^4 E I_i n^4} \tag{3.c}$$

$$(i = \overline{1,k};\ n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Exprimînd de asemenea că ecuaţia diferenţială ordinară (c), în care momentul de torsiune distribuit este dat de (4.a) şi (1.b), este satisfăcută de soluţiile pentru rotiri de forma :

$$\theta_i(y) = \sum_n \theta_{i,n} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{4.b}$$

$$(i = \overline{1,k};\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

care îndeplinesc condiţiile la capetele nervurilor, rezultă :

$$\theta_{i,n} = \frac{b^2 (c_{i'}\, p_{i',n} + c_{i''}\, p_{i'',n})}{\pi^2 G J_i\, n^2} \tag{4.c}$$

$$(i = \overline{1,k};\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

În particular, săgeţile nervurilor pe liniile muchiilor în contact cu placa se deduc din (3.b) şi (4.b) :

$$W(x_{i'}, y) = W_i(y) - c_{i'}\ \theta_i(y) = \sum_n (W_{i,n} - c_{i'}\ \theta_{i,n}) \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{e}$$

$$W(x_{i''}, y) = W_i(y) - c_{i''}\ \theta(y) = \sum_n (W_{i,n} - c_{i''}\ \theta_{i,n}) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$(i = \overline{1,k};\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Compatibilitatea poziţiilor deformate ale plăcii izotrope simplu rezemată pe contur şi ale nervurilor simplu rezemate la capete se exprimă prin egalarea membrilor secunzi ai egalităţilor (d) şi (e) :

$$\sum_m \sum_n W_{mn} \sin \frac{m\pi x_{i'}}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \sum_n (W_{i,n} - c_{i'}\ \theta_{i,n}) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$\sum_m \sum_n W_{mn} \sin \frac{m\pi x_{i''}}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \sum_n (W_{i,n} - c_{i''}\ \theta_{i,n}) \sin \frac{n\pi y}{b}$$

$$(i = \overline{1,k};\ m, n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

după care scriind dezvoltat suma în raport cu m şi grupînd toţi termenii în raport cu n :

$$\sum_n \left[W_{1,n} \sin \frac{\pi x_{i'}}{a} + \ldots + W_{mn} \sin \frac{m\pi x_{i'}}{a} + \ldots - (W_{i,n} - c_{i'}\ \theta_{i,n}) \right] \sin \frac{n\pi y}{b} = 0$$

$$\sum_n \left[W_{1,n} \sin \frac{\pi x_{i''}}{a} + \ldots + W_{mn} \sin \frac{m\pi x_{i''}}{a} + \ldots - (W_{i,n} - c_{i''}\theta_{i,n}) \right] \sin \frac{n\pi y}{b} = 0$$

$$(i = \overline{1,k};\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

se obţin condiţiile :

$$\sum_m W_{mn} \sin \frac{m\pi x_{i'}}{a} = W_{i,n} - c_{i'}\ \theta_{i,n};\quad \sum_m W_{mn} \sin \frac{m\pi x_{i''}}{a} = W_{i,n} - c_{i''}\theta_{i,n} \quad \text{(f)}$$

$$(i = \overline{1,k};\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Dacă în condiţiile (f) se ţine seama de (2.b), (3.c) şi (4.c), se grupează termenii în raport cu $p_{i'}$ şi $p_{i'',n}$ şi se multiplică fiecare condiţie cu factorul $\pi\ a^4/2a^4$, rezultă sistemul de ecuaţii canonice :

$$\delta_{i'1'',n}\, p_{i',n} + \delta_{i'1'',n}\, p_{i'',n} + \ldots + \delta_{i'k',n}\, p_{k',n} + \delta_{i'k'',n}\, p_{k'',n} + \Delta_{i',n} = 0, \text{ (5.a)}$$

$$\delta_{i''1',n}\, p_{i',n} + \delta_{i''1'',n}\, p_{1'',n} + \ldots + \delta_{i''k',n}\, p_{k',n} + \delta_{i''k'',n}\, p_{k'',n} + \Delta_{i''} = 0$$

$$(i = \overline{1,k})$$

în care coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi au expresiile :

$$\delta_{i'i',n} = \sum_m \frac{\sin \frac{2m\pi x_{i'}}{a}}{N_{mn}} + \gamma_{i'i',n},$$

$$\delta_{i'i'',n} = \delta_{i''i',n} = \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi x_{i'}}{a} \sin \frac{m\pi x_{i''}}{a}}{N_{mn}} + \gamma_{i'i'',n},$$

$$\delta_{i'j',n} = \delta_{j'i',n} = \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi x_{i'}}{a} \sin \frac{m\pi x_{j'}}{a}}{N_{mn}}$$

$$\delta_{i'j'',n} = \delta_{j''i',n} = \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi x_{i'}}{a} \sin \frac{m\pi x_{j''}}{a}}{N_{mn}}$$

$$\Delta_{i',n} = \frac{a}{2} \sum_m \frac{p_{0,mn} \sin \frac{m\pi x_{i'}}{a}}{N_{mn}}$$

$$\delta_{i''i'',n} = \sum_m \frac{\sin^2 \frac{m\pi x_{i''}}{a}}{N_{mn}} + \gamma_{i''i'',n} \tag{5.b}$$

$$\delta_{i''j',n} = \delta_{j'i'',n} = \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi x_{i''}}{a} \sin \frac{m\pi x_{j'}}{a}}{N_{mn}}$$

$$\delta_{i''j'',n} = \delta_{j''i'',n} = \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi x_{i''}}{a} \sin \frac{m\pi x_{j''}}{a}}{N_{mn}}$$

$$\Delta_{i'',n} = \frac{a}{2} \sum_m - \frac{p_{o,mn} \sin \frac{m\pi x_{i''}}{a}}{N_{mn}}$$

$$(i = \overline{1,k};\ j = \overline{i+1,k};\ m,n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

şi unde am notat:

$$\gamma_{i'i',n} = \frac{aK}{2EI_i\ \alpha^4 n^4} + \frac{K\pi^2 c_{i'}^2}{2a\,GJ_i\ \alpha^2 n^2},$$

$$\gamma_{i''i'',n} = \frac{aK}{2\,EI_i\ \alpha^4\ n^4} + \frac{K\pi^2 c_{i''}^2}{2\,a\,GJ_i\ \alpha^2 n^2}, \tag{5.c}$$

$$\gamma_{i'i'',n} = \frac{aK}{2\,EI_i \alpha^4\ n^4} + \frac{K\pi^2 c_{i'}\ c_{i''}}{2\,a\,GJ_i\ \alpha^2 n^2},$$

$$N_{mn} = (m^2 + \alpha^2 n^2)^2$$

$$(i = \overline{1,k};\ j = \overline{i+1,k};\ m,n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Sistemul de ecuaţii canonice (5.a) corespunde termenului de rang n din seriile duble trigonometrice astfel că vor trebui scrise atîtea sisteme de ecuaţii de acest tip cîţi termeni $n = 1, 2, 3, \ldots$ este necesar să se ia în considerare.

În calculele numerice, verificarea rezultatelor se va face controlînd dacă săgeţile plăcii date de relaţiile (d) sînt identice cu săgeţile corespunzătoare ale muchiilor nervurilor date de (e).

Dacă structura prezintă simetrie geometrică şi mecanică, expresiile coeficienţilor de influenţă şi ai termenilor liberi (5.b) se simplifică, iar numărul ecuaţiilor şi al necunoscutelor sistemului de ecuaţii canonice (5.a) se reduce.

Prin rezolvarea succesivă a sistemului de ecuații canonice se determină coeficienții de serie $p_{i',n}$, $p_{i'',n}$ ai încărcărilor liniare ale plăcii după care devin cunoscute expresiile săgeților $W(x, y)$, $W_i(y)$ și ale rotirilor $\theta_i(y)$; aceasta permite calcularea eforturilor din placă și nervuri cu ajutorul relațiilor (a'), (b'), (c').

După cum se cunoaște, dimensionarea plăcii se face în mod obișnuit la eforturile pe unitate de lungime de placă M_x și M_y, iar dimensionarea nervurilor se face la eforturile secționale M și T.

4. TRECEREA LA LIMITĂ PENTRU STRUCTURI CU NERVURI ÎNGUSTE

Dacă structura are nervuri înguste cu secțiuni transversale simetrice atunci, pentru fiecare nervură în parte, este justificată adoptarea următoarelor două condiții de bază :

$$c_{i'} = -c_{i''} = c_i ; \frac{c_i}{l} \to 0, \tag{6.a}$$

care exprimă faptul că centrele de torsiune și centrele de greutate coincid în secțiunile transversale, iar lățimile nervurilor sînt mici în raport cu deschiderile plăcii.

Ținînd seama de prima condiție (6.a) devine posibilă gruparea necunoscutelor problemei sub forma :

$$p_{i',n} + p_{i'',n} = p_{i,n} = 2r_{i',n},$$

$$p_{i',n} - p_{i'',n} = \frac{m_{i,n}}{c_i} = 2\frac{r_{i'',n}}{c_i}, \tag{6.b}$$

din care rezultă

$$p_{i',n} = r_{i',n} + \frac{r_{i'',n}}{c_i} \tag{6.c}$$

$$p_{i'',n} = r_{i',n} - \frac{r_{i'',n}}{c_i},$$

unde noile necunoscute sînt :

$r_{i',n}$ — jumătatea coeficientului de serie al încărcării liniare pe nervura N_i ;

$r_{i'',n}$ — jumătatea coeficientului de serie al momentului de torsiune distribuit pe nervura N_i.

Gruparea necunoscutelor este necesară pentru aplicarea celei de-a doua condiție (5.a) astfel că prin trecerea la limită să se obțină noua expresie a coeficienților de serie ai săgeților plăcii precum și noua formă a sistemului de ecuații canonice.

Este de menţionat că indicii „' şi " ", ce intervin la notarea celor două necunoscute aferente aceleaşi nervuri, au numai rolul de a deosebi necunoscutele între ele şi nu mai au legătură cu una sau alta din cele două muchii ale unei nervuri.

Din relaţia (2.b) şi cea de-a doua condiţie (6.a) se obţine, prin trecerea la limită, expresia coeficienţilor de serie ai săgeţilor plăcii:

$$W_{mn} = \frac{p_{0,mn} + \frac{4}{a}\sum_{i'} r_{i',n} \sin\frac{m\pi x_i}{a} - \frac{4m\pi}{a^2}\sum_{i''} r_{i'',n} \cos\frac{m\pi x_i}{a}}{\frac{\pi^4 K}{a^4} N_{mn}} \qquad (7.a)$$

$$(i = \overline{1, k};\ m, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ţinînd cont de cea de-a doua condiţie (6.a), după trecerea la limită, sistemul de ecuaţii canonice devine:

$$\delta_{i'1',n}\ r_{1',n} + \delta_{i'1'',n}\, r_{1'',n} + \ldots + \delta_{i'\,k',n}\ r_{k',n} + \delta_{i'\,k'',n}\ r_{k'',n} + \Delta_{i',n} = 0, \qquad (7.b)$$

$$\delta_{i''1',n}\, r_{1',n} + \delta_{i''1'',n}\ r_{1'',n} + \ldots + \delta_{i''k',n}\ r_{k',n} + \delta_{i''k'',n}\, r_{k'',n} + \Delta_{i'',n} = 0$$

$$(i = \overline{1, k})$$

în care coeficienţii necunoscutelor şi termenii liberi au expresiile:

$$\delta_{i'i',n} = 4\sum_m \frac{\sin^2\frac{m\pi x_i}{a}}{N_{mn}} + \gamma_{i'i',n},$$

$$\delta_{i'i'',n} = \delta_{i''i',n} = -\frac{4\pi}{a}\sum_m \frac{m \sin\frac{m\pi x_i}{a}\cos\frac{m\pi x_j}{a}}{N_{mn}}$$

$$\delta_{i'j'',n} = \delta_{j''i',n} = -\frac{4\pi}{a}\sum_m \frac{m \sin\frac{m\pi x_i}{a}\cos\frac{m\pi x_i}{a}}{N_{mn}}$$

$$\delta_{i'j',n} = \delta_{j'i',n} = 4\sum_m \frac{\sin\frac{m\pi x_i}{a}\sin\frac{m\pi x_j}{a}}{N_{mn}},$$

$$\Delta_{i',n} = a\sum_m \frac{p_{0,mn}\sin\frac{m\pi x_i}{a}}{N_{mn}}, \qquad (7.c)$$

$$\delta_{i''i'',n} = \frac{4\pi^2}{a^2} \sum_m \frac{m^2 \cos^2 \frac{m\pi x_i}{a}}{N_{mn}} + \gamma_{i''i'',n},$$

$$\delta_{i''j',n} = \delta_{j'i'',n} = -\frac{4\pi}{a} \sum_m \frac{m \cos \frac{m\pi x_i}{a} \sin \frac{m\pi x_j}{a}}{N_{mn}},$$

$$\delta_{i''j'',n} = \delta_{j''i'',n} = \frac{4\pi^2}{a^2} \sum_m \frac{m^2 \cos \frac{m\pi x_i}{a} \cos \frac{m\pi x_j}{a}}{N_{mn}}$$

$$\Delta_{i'',n} = -\pi \sum_m \frac{m\, p_{0,mn} \cos \frac{m\pi x_i}{a}}{N_{mn}}$$

$$(i = \overline{1,k};\ j = \overline{i+1,k};\ m,n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

unde

$$\gamma_{i'i',n} = \frac{2aK}{EI_i\, \alpha^4 n^4};\quad \gamma_{i''i'',n} = \frac{2\,K\pi^2}{a\,GJ_i\,\alpha^2 n^2}, \tag{7.d}$$

$$N_{mn} = (m^2 + \alpha^2 n^2)^2$$

$$(i = \overline{1,k};\ m,n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

5. APLICAREA PRACTICĂ A METODEI PROPUSE

Pentru aprecierea modului de lucru şi a rezultatelor metodei de calcul propuse, prezentate în cadrul acestei lucrări, aceasta a fost aplicată practic pe exemple numerice de calcul.

Efectuarea calculelor, aferente exemplelor numerice de calcul, s-a realizat în principal la calculatorul HP 2000 şi ca verificare pe calculatorul FELIX 256, utilizînd programele întocmite în acest scop pentru situaţiile celor două tipuri de nervuri (late şi înguste).

Din analiza rezultatelor obţinute se constată că:

1. Valorile $W(x, y)$, M şi T rezultă suficient de exacte dacă se iau în considerare $M' = N' = 9$ termeni ai dezvoltărilor în serii duble trigonometrice;

2. Valorile M_x şi M_y satisfac cerinţele practicii de proiectare dacă se iau în considerare $M' = N' = 32$ termeni ai dezvoltărilor în serii duble trigonometrice;

3. Soluţia prin serii duble trigonometrice prezintă avantajul generalităţii situaţiilor de încărcări exterioare aplicate structurilor simplu rezemate pe toate cele patru laturi;

4. Pentru structura cu nervuri din profile U neglijarea influenței combinate a nesimetriei secțiunilor transversale, și a lățimilor tălpilor superioare conduce la diferențe de (3,2—4,8)% pentru săgețile și eforturile din nervuri și la diferențe mai mari pentru săgețile și eforturile din placă. Neglijarea în plus și a rigidităților la torsiune nu conduce la diferențe sensibile față de cele menționate; aceasta este explicabil în cazul profilelor laminate U care au o rigiditate mică la torsiune în comparație cu rigiditatea lor la încovoiere;

5. În cazul secțiunilor deschise simetrice, simple sau întărite, și cu atît mai mult în cazul secțiunilor tubulare rectangulare, apare evident că neglijarea în calcule a rigidităților la torsiune ale nervurilor poate conduce la diferențe importante pentru mărimile fizice ce intervin în proiectarea structurilor.

În anexa la prezenta lucrare se prezintă situația comparativă între rezultatele obținute la calculul unor structuri ce diferă numai prin tipul profilelor care alcătuiesc nervurile de rigidizare a tablei. Din analiza rezultatelor se desprinde concluzia că diferențele ce apar între mărimile fizice sînt datorate faptului că panourile de placă se descarcă pe întreg conturul chiar și pentru rapoarte mari ale laturilor panourilor.

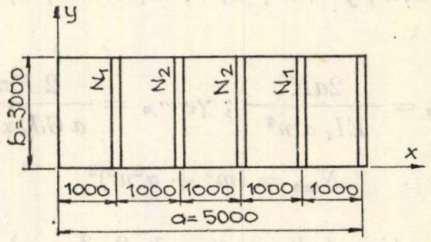


Fig. 3a

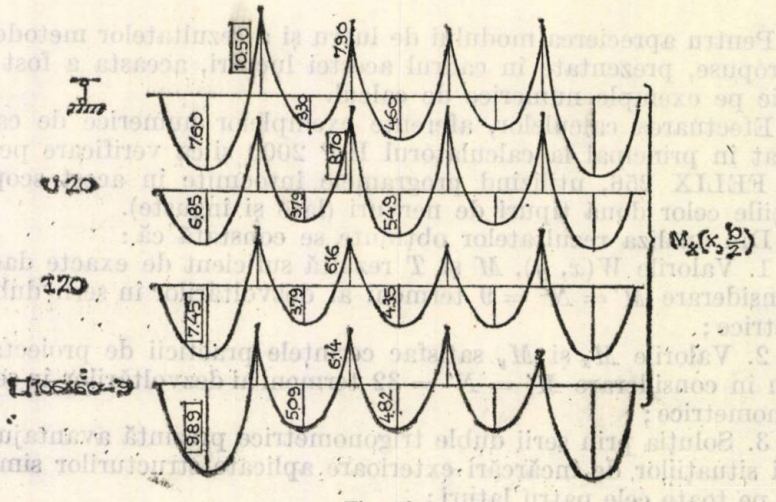


Fig. 3b

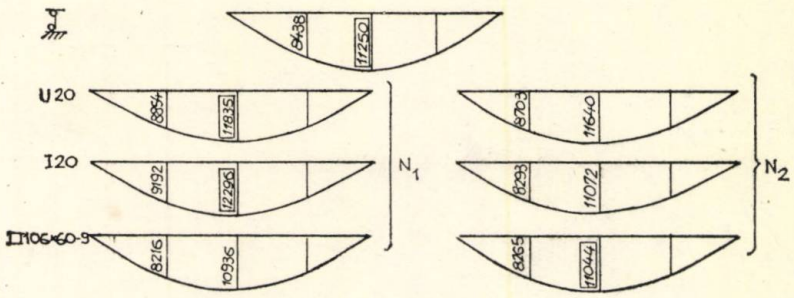


Fig. 3c

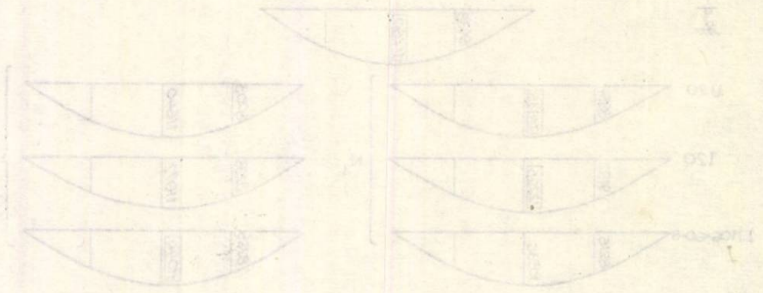
ANEXA

$I = 1910$ cm^4; $J = 11{,}9$ cm^4; $g = 25{,}3$ daN/m
$I = 2140$ cm^4; $J = 13{,}5$ cm^4; $g = 26{,}3$ daN/m
$I = 356$ cm^4; $J = 297{,}6$ cm^4; $g = 21{,}3$ daN/m
$h = 10$ mm; $p = 0{,}01$ daN/cm^2
a) caracteristici pentru placă
b) caracteristici pentru nervuri
Momente încovoietoare M_x în placă
Momente încovoietoare M în nervuri

Primită la redacție la 19 septembrie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. R. Bareš, Gh. Massonnet, *Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes selon la méthode Guyon — Massonnet — Bareš*, Dunod, Paris, 1966.
2. I. Beleș, *Contribuții la calculul construcțiilor metalice hidrotehnice, cu elemente de rezistență din tablă și grinzi, ținînd seama de efectul de conlucrare spațială* (Teză de doctorat), Institutul de construcții București, 1971.
3. I. Beleș, *Placă ortotropă cu diafragme*. St. cerc. mec. apl., **35**, *3*, (1976).
4. I. Gh. Bucă, *Contribuții la deținirea stării limită de deformație a platajelor ortotrope ale podurilor metalice* (Teză de doctorat), Institutul de construcții București, 1970.
5. W. Cornelius, *Die Berechnung der ebenen Flächentragwerke mit Hilfe der Theorie der orthogonal — antisotropen Platte.*, Der Stahlbau, 1952, p. 21, 43, 46.
6. N. H. Dehousse, *Les bordages raidis en construction hydraulique*, Association Internationale des Ponts et Charperotes Mémoires, **22**, Zürich, 1962, p. 37—71.
7. Ch. Massonnet, *Plaques et coques cylindriques orthotropes à nervures dissymmétriques*, Association Internationale des Ponts et Charpentes. Mémoires, vol. 19, Zurich, 1959, p. 201—230.
8. A. Pflüger, *Zum Beulproblem der ans tropen Rechteckplatte*, Ingenieur — Archiv, **16**, 1947, p. 111—120.
9. D. G. Popa, *Aplicarea metodei seriilor simple trigonometrice la calculul plăcilor rigidizate cu nervuri dispuse pe o singură parte*, Buletinul științific al Institutului de Construcții București, **XX**, *3—4*, 125—141 (1977).
10. M. V. Soare, *Contribuții la calculul plăcilor ortotrope, cu nervuri de rigidizare pe o singură parte*, St. cerc. mec. apl., **33**, *4* (1974), **34**, *1*, (1975).
11. K. Trenks, *Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotropen Rechteckplatten*, Der Bauingenieur, **29**, *10*, 372—377 (1954).
12. Wah Thein, L. R. Calcote, *Structural Analysis by Finite Difference Calculs*, Van Nostrand Reihnold Campany, New York, 1970.



CALCULUL STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE REALIZATE DIN MATERIALE CU COMPORTARE VISCOELASTICĂ

II. METODA DEPLASĂRILOR *)

de ŞTEFAN JERCA
Institutul politehnic Iaşi

Comportarea reală sub sarcini a unor materiale de construcţii (plastice armate, beton, beton armat, metale la temperaturi înalte etc.) este aproximată prin modele reologice compuse viscoelastice [1, 4].
Utilizîndu-se calculul operaţional se generalizează metodele de calcul static al structurilor (metoda forţelor şi metoda deplasărilor), înlocuindu-se modelul elastic liniar (Hooke) prin modele viscoelastice liniare.

1. INTRODUCERE

Pentru generalizarea metodei forţelor s-a stabilit că relaţia fizică de flexibilitate din domeniul simbolic a unei bare este [2]:

$$\begin{Bmatrix} \Delta l^* \\ \theta_i^* \\ \theta_j^* \end{Bmatrix} = \frac{P(s)l}{6Q(s)I} \begin{bmatrix} 6I/A & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N^* \\ M_i^* \\ M_j^* \end{Bmatrix} + \alpha_t\, l \begin{Bmatrix} t_m^{\circ *} \\ \Delta t^{\circ *}/2h \\ -\Delta t^{\circ *}/2h \end{Bmatrix}, \qquad (1)$$

unde prin „*" s-a notat transformarea Laplace directă a mărimilor respective (fig. 1), iar $P(s)$ şi $Q(s)$ sînt polinoame algebrice în s (parametrul transformatei).

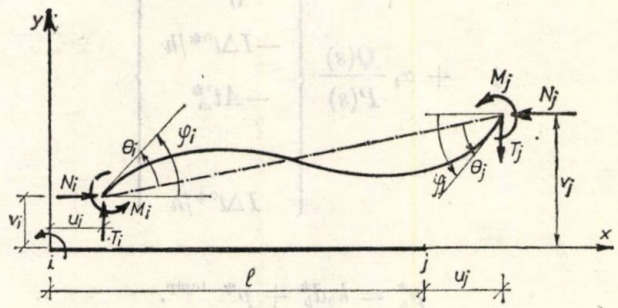


Fig. 1

* Partea I a fost publicată în St. cerc. mec. apl., **38**, *2*, (1979)

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 2, 1980, P. 237–246

Gradele şi coeficienţii acestor polinoame depind de modelul reologic acceptat pentru aproximarea comportării materialului din bară [1, 3, 4].

2. RELAŢIA DE RIGIDITATE

Prin inversarea relaţiei (1) se obţine relaţia fizică de rigiditate din domeniul simbolic al unei bare, exprimată cu eforturile de la extremităţi şi deplasările corespunzătoare :

$$\begin{Bmatrix} N^* \\ M_i^* \\ M_j^* \end{Bmatrix} = \frac{Q(s)I}{P(s)l} \begin{bmatrix} A/I & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta l^* \\ \theta_i^* \\ \theta_j^* \end{Bmatrix} - \alpha_t \frac{Q(s)}{P(s)} \begin{Bmatrix} At_m^{\circ *} \\ I\Delta t^{\circ *}/h \\ -I\Delta t^{\circ *}/h \end{Bmatrix}. \tag{2}$$

Ţinînd seama de ecuaţiile de echilibru static ale barei şi de relaţiile geometrice dintre deplasările de la extremităţile acesteia (fig. 1), relaţia fizică (2) extinsă pentru eforturi dependente şi deplasări corespunzătoare este :

$$\begin{Bmatrix} N_i^* \\ T_i^* \\ M^* \\ N_j^* \\ T_j^* \\ M_j^* \end{Bmatrix} = \frac{Q(s)}{P(s)} \begin{bmatrix} A/l & 0 & 0 & -A/l & 0 & 0 \\ 0 & 12I/l^3 & 6I/l^2 & 0 & -12I/l^3 & 6I/l^2 \\ 0 & 6I/l^2 & 4I/l & 0 & -6I/l^2 & 2I/l \\ -A/l & 0 & 0 & A/l & 0 & 0 \\ 0 & -12I/l^3 & -6I/l^2 & 0 & 12I/l^3 & -6I/l^2 \\ 0 & 6I/l^2 & 2I/l & 0 & -6I/l^2 & 4I/l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i^* \\ V_i^* \\ \varphi_i^* \\ U_j^* \\ V_j^* \\ \varphi_j^* \end{Bmatrix} +$$

$$+ \alpha_t \frac{Q(s)}{P(s)} \begin{Bmatrix} At_m^{\circ *} \\ 0 \\ -I\Delta t^{\circ *}/h \\ -At_m^{\circ *} \\ \\ I\Delta t^{\circ *}/h \end{Bmatrix} \tag{3.a}$$

sau

$$p_b^* = k_b d_b^* + p^{* \text{ temp}}. \tag{3.b}$$

Pentru o structură, relaţia fizică este :

$$p^* = k\, d^* + p^{* \text{ temp}}, \tag{4}$$

unde p și d sînt vectorii eforturilor și deplasărilor de la extremitățile barelor, iar k este matricea asamblată de rigiditate.

De asemenea, din (2) și relațiile geometrice dintre deplasări rezultă, pentru momentele din extremitățile unei bare dublu încastrate (fig. 2*a*), expresiile :

$$M_{ij}^{*} = \frac{4IQ(s)}{lP(s)}\varphi_{ij}^{*} + \frac{2IQ(s)}{lP(s)}\varphi_{ji}^{*} - \frac{6IQ(s)}{lP(s)}\psi_{ij}^{*} + m_{ij}^{*},$$

$$M_{ji}^{*} = \frac{2IQ(s)}{lP(s)}\varphi_{ij}^{*} + \frac{4IQ(s)}{lP(s)}\varphi_{ji}^{*} - \frac{6IQ(s)}{lP(s)}\psi_{ij}^{*} + m_{ji}^{*}, \tag{5.a}$$

unde m_{ij}^{*} și m_{ji}^{*} sînt transformările Laplace ale momentelor de încastrare perfectă provenite din sarcini sau temperatură determinate prin metoda forțelor.

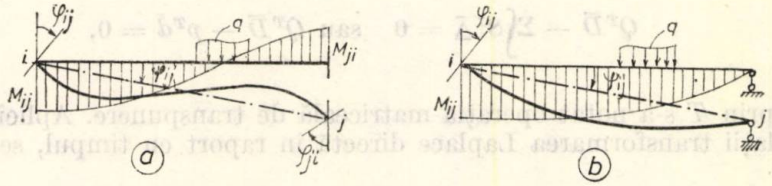


Fig. 2

Pentru bara încastrat-articulată (fig. 2.b), din condiția $M_{ji}^{*} = 0$ și relațiile (5), rezultă

$$M_{ij}^{*} = \frac{3IQ(s)}{lP(s)}\varphi_{ij}^{*} - \frac{3IQ(s)}{lP(s)}\psi_{ij}^{*} + m_{ij}^{*}. \tag{5.b}$$

Relațiile fizice (1)—(5) reprezintă generalizări ale relațiilor corespunzătoare utilizate în calculul elastic liniar al structurilor, acestea obținîndu-se prin înlocuirea raportului $Q(s)/P(s)$ cu E (modulul de elasticitate longitudinal).

3. PRINCIPIUL DEPLASĂRILOR VIRTUALE

Pentru stabilirea sistemului ecuațiilor de condiție din metoda deplasărilor este necesară exprimarea principiului deplasărilor virtuale cu mărimi din domeniul simbolic. În acest scop se consideră o structură din material vîscoelastic în stare reală de încărcare și deformare (fig. 3*a*); mărimile ce caracterizează această stare pot depinde de timp.

Se atașează aceeași structură în starea virtuală de încărcare și deformare

(fig. 3*b*) astfel realizată încît mărimile din această stare nu depind de timp.

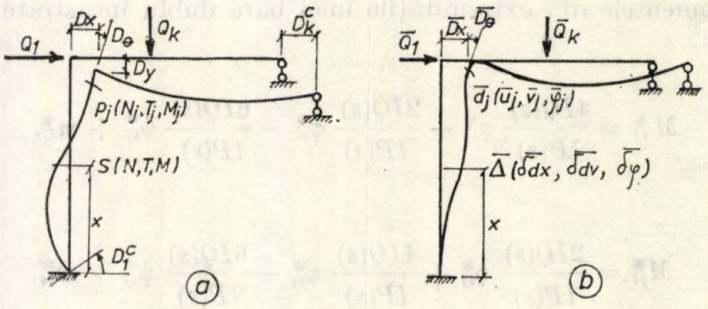


Fig. 3

Principiul deplasărilor virtuale, exprimat cu ajutorul celor două stări ale structurii este :

$$Q^T \bar{D} - \Sigma \int S^T \bar{\Delta} = 0 \quad \text{sau} \quad Q^T \bar{D} - p^T \bar{d} = 0, \tag{6.a}$$

unde prin T s-a notat operaţia matriceală de transpunere. Aplicînd acestor relaţii transformarea Laplace directă în raport cu timpul, se obţine :

$$Q^{*T} \bar{D} - \Sigma \int S^{*T} \bar{\Delta} = 0 \quad \text{sau} \quad Q^{*T} \bar{D} - p^{*T} \bar{d} = 0, \tag{6.b}$$

care asigură condiţia de echilibru static dintre încărcări şi eforturi pentru orice deplasări virtuale compatibile geometric.

4. SISTEMUL ECUAŢIILOR DE CONDIŢIE

Fie o structură static nedeterminată realizată din material vîscoelastic liniar şi acţionată de sarcini, variaţii de temperatură şi cedări de reazeme (fig. 4).

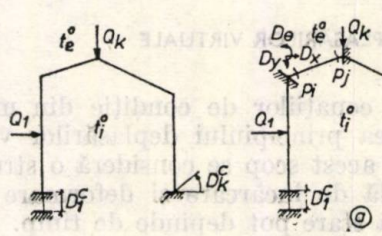


Fig. 4 Fig 5

Pe sistemul de bază cu noduri blocate la deplasări, utilizat în calculul automat (fig. 5*a*), condiția de compatibilitate geometrică a deplasărilor este

$$d = R\,L\,D, \tag{7.a}$$

unde R și L sînt matricele de rotație respectiv incidență ale structurii. De asemenea, pentru un nod curent i și un grad de libertate elastică a ale sistemului de bază utilizat în calculul manual (fig. 5*b*), condiția de compatibilitate este

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} &= D_i, \\ \psi^a_{ij} &= \beta^a_{ij}\,D_a, \end{aligned} \tag{7.b}$$

unde φ_{ij} sînt rotirile extremităților barelor care concură în i, iar ψ^a_{ij} sînt rotirile barelor în gradul de libertate a. Aplicînd transformata Laplace în relațiile (7) și apoi introducîndu-le în (4) și (5) se obține:

$$p^* = k\,R\,L\,D^* + p^{*\,\mathrm{temp}}, \tag{8.a}$$

respectiv

$$M^*_{ij} = \frac{4Q(s)I}{P(s)l}\,D^*_i + \frac{2Q(s)I}{P(s)l}\,D^*_j - \frac{6Q(s)I}{P(s)l}\,\beta^a_{ij}\,D^*_a + m^*_{ij}, \tag{8.b}$$

$$M^*_{ji} = \frac{2Q(s)I}{P(s)l}\,D^*_i + \frac{4Q(s)I}{P(s)l}\,D^*_j - \frac{6Q(s)I}{P(s)l}\,\beta^a_{ij}\,D^*_a + m^*_{ji}$$

și

$$M^*_{ij} = \frac{3Q(s)I}{P(s)l}\,D^*_i - \frac{3Q(s)I}{P(s)l}\,\beta^a_{ij}\,D^*_a + m^*_{ij}, \tag{8.c}$$

care sînt adevărate pentru orice valori ale deplasărilor de nod D; valorile reale se obțin impunînd condiția de echilibru static. Pentru aceasta se consideră sistemul de bază în starea virtuală încărcat cu toate deplasările arbitrare $\bar{D}$ (fig. 6*a*) sau pe rînd cu cîte o rotire de nod $\bar{D}_i$ (fig. 6*b*) respectiv deplasare de grad de libertate $\bar{D}_b$ (fig. 6 *c*).

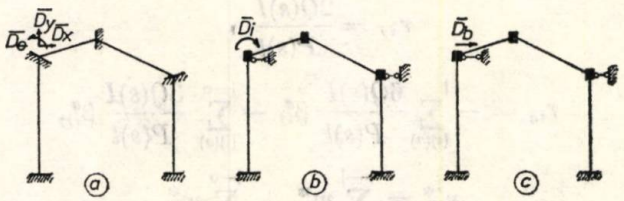


Fig. 6

Pe fiecare din aceste sisteme condiția de compatibilitate geometrică este :

$$\bar{d} = R\,L\,\bar{D}, \tag{9.a}$$

$$\bar{\varphi}_{ij} = \bar{D}_i, \tag{9.b}$$

$$\bar{\psi}^b_{ij} = \beta^b_{ij}\bar{D}_b. \tag{9.c}$$

Lucrul mecanic virtual exterior exprimat cu transformările Laplace ale acțiunilor (fig. 5) pe deplasările virtuale corespunzătoare (fig. 6) este :

$$L_{ext} = \bar{D}^T P^*, \tag{10.a}$$

unde P este vectorul solicitărilor exterioare de nod ce corespunde vectorului $\bar{D}$;

$$L_{ext} = M^*_i\,\bar{D}_i \tag{10.b}$$

pentru nodul curent i ;

$$L_{ext} = \Sigma\, Q^*_k\,\delta^b_k\,\bar{D}_b \tag{10.c}$$

pentru gradul de libertate elastică b.

Lucrul mecanic virtual interior exprimat cu transformările Laplace ale eforturilor (fig. 5) pe deplasările virtuale corespunzătoare (fig. 6) este

$$L_{int} = \bar{D}^T\,(K\,D^* + P^{*\,temp}), \tag{11.a}$$

unde

$$K = L^T\,R^T\,k\,R\,L,$$

$$P^{*\,temp} = L^T\,R^T p^{*\,temp}, \tag{12.a}$$

$$L_{int} = \sum_{(i)} M^*_{ij}\,\bar{\varphi}_{ij} = \bar{D}_i\,(r_{ii}\,D^*_i + \sum_{j\neq i} r_{ij}\,D^*_j + \sum_{(a)} r_{ia}\,D^*_a + m'^*_i), \tag{11.b}$$

unde

$$r_{ii} = \sum_{(i)}^{|\!-\!|} \frac{4Q(s)I}{P(s)l} + \sum_{(i)}^{|\!-\!\circ} \frac{3Q(s)I}{P(s)l},$$

$$r_{ij} = \frac{2Q(s)I}{P(s)l},$$

$$r_{ia} = -\sum_{(i)(a)}^{|\!-\!|} \frac{6Q(s)I}{P(s)l}\,\beta^a_{ij} - \sum_{(i)(a)}^{|\!-\!\circ} \frac{3Q(s)I}{P(s)l}\,\beta^a_{ij}, \tag{12.b}$$

$$m'^*_i = \sum_{(i)}^{|\!-\!|} m^*_{ij} + \sum_{(i)}^{|\!-\!\circ} m^*_{ij}$$

și

$$L_{int} = \sum_{(b)} (M_{ij}^* + M_{ji}^*) \bar{\psi}_{ij}^b = \bar{D}^b \left(\sum_{(j)} r_{bj} D_j^* + \sum_{(a)} r_{ba} D_a^* + R_b'^* \right), \quad (11.c)$$

unde

$$r_{bj} = \sum_{(b)(i)}^{|-|} \left(\frac{4Q(s)I}{P(s)l} + \frac{2Q(s)I}{P(s)l} \right) \beta_{ij}^b + \sum_{(b)(i)}^{|-\circ} \frac{3Q(s)I}{P(s)l} \beta_{ij}^b,$$

$$r_{ba} = - \sum_{(a)(b)}^{|-|} \frac{6Q(s)I}{P(s)l} \beta_{ij}^a \beta_{ij}^b - \sum_{(a)(b)}^{|-\circ} \frac{3Q(s)I}{P(s)l} \beta_{ij}^a \beta_{ij}^b \quad (12.c)$$

$$R_b'^* = \sum_{(b)}^{|-|} (m_{ij}^* + m_{ji}^*) \beta_{ij}^b + \sum_{(b)}^{|-\circ} m_{ij}^* \beta_{ij}^b.$$

Prin anularea lucrului mecanic virtual total se obține sistemul ecuațiilor de condiție:

$$K_{11} D_1^* + K_{12} D_c^* + P_1^{*\,temp} = P_1^*,$$

$$K_{21} D_1^* + K_{22} D_c^* + P_2^{*\,temp} = P_2^*, \quad (13.a)$$

unde s-a împărțit vectorul D în subvectorii D_1 al deplasărilor de nod necunoscute și D_c al deplasărilor de reazeme, și

$$\begin{cases} r_{ii} D_i^* + \sum_{(j \neq i)} r_{ij} D_j^* + \sum_{(a)} r_{ia} D_a^* + R_i^* = 0 & i = 1, \ldots \text{ nr. noduri}; \; b = a, \\ \sum_{(j)} r_{bj} D_j^* + \sum_{(a)} r_{ba} D_a^* + R_b^* = 0, & b, \ldots \text{ nr. gradelor de libertate elastică.} \end{cases} \quad (13.b)$$

unde

$$R_i^* = m'^*_i + M_i^*,$$

$$R_b^* = R_b'^* + \sum P_k^* \delta_k^b. \quad (14)$$

Prin rezolvarea sistemului (13) se obțin valorile transformatelor Laplace ale deplasărilor de nod, iar prin introducerea acestora în (8) rezultă transformatele Laplace ale eforturilor; valorile mărimilor fizice respective rezultă prin aplicarea transformatei inverse Laplace ($\mathcal{L}^{-1}$).

Din analiza sistemului (13) și a relației (8) rezultă:

— dacă structura este acționată numai de sarcini exterioare și este realizată dintr-un singur material vîscoelastic, atunci deplasările de nod și eforturile variază în timp după funcțiile:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{P(s)}{Q(s)} q(s) \right],$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1} [q(s)], \quad (15)$$

unde $q(s)$ reprezintă transformata Laplace a funcţiei de variaţie în timp a sarcinii; în cazul sarcinilor constante $f(t)$ este chiar funcţia de curgere lentă a modelului vîscoelastic, iar eforturile sînt constante (nu depind de material);

— dacă structura este acţionată numai de sarcini şi este realizată din două sau mai multe materiale vîscoelastice, deplasările de nod şi eforturile variază în timp;

— dacă structura este acţionată numai de cedări de reazeme şi/sau variaţii de temperatură, deplasările de nod şi eforturile variază în timp;

— generalizează relaţiile corespunzătoare din calculul elastic liniar bazat pe modelul Hooke.

5. EXEMPLUL DE CALCUL

În continuare se prezintă calculul unui cadru portal dublu încastrat, care ar putea fi realizat dintr-un singur material sau din două materiale vîscoelastice (fig. 7).

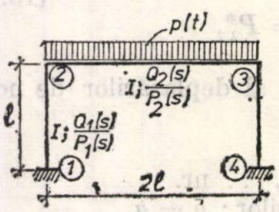


Fig. 7

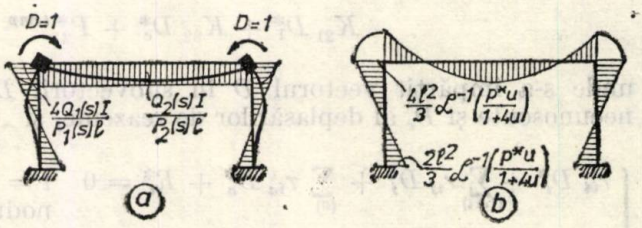


Fig. 8

Ţinînd seama de simetria structurii şi încărcării pe sistemul de bază din figura 8*a* rezultă ecuaţia de condiţie:

$$\frac{Q_2(s)I}{P_2(s)l}(1+4u)\,D^* - \frac{1}{3}p^*l^2 = 0, \tag{16}$$

unde

$$u = \frac{Q_1(s)}{P_1(s)}\,\frac{P_2(s)}{Q_2(s)}, \tag{17}$$

astfel că rotirea de nod şi momentul încovoietor au expresiile generale (fig. 8*b*):

$$D = \frac{l^3}{3I}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p^*P_2(s)}{Q_2(s)\,(1+4u)}\right], \tag{18}$$

$$M_{21} = \frac{4l^2}{3}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p^*u}{1+4u}\right].$$

Dacă structura este realizată în întregime din același material vîscoelastic, iar sarcina este constantă, atunci $u = 1$ și din (18) rezultă

$$D = \frac{pl^3}{15I} f(t) \; ; \; M_{21} = \frac{4pl^2}{15}, \tag{19}$$

unde $f(t)$ este funcția de curgere lentă: pentru modelele elastic liniar (Hooke) și Maxwell [2] rezultă

$$D^{(H)} = \frac{pl^3}{15\,EI} \; ; \; D^{(M)} = \frac{pl^3}{15\,EI}\left(1 + \frac{t}{\tau}\right). \tag{20}$$

Dacă încărcarea este constantă, iar rigla și stîlpii sînt realizați din material Maxwell, respectiv Hooke, cu $E_H = E_M = E$ și $\tau = \eta/E$, atunci

$$\frac{Q_1(s)}{P_1(s)} = E \; ; \; \frac{P_2(s)}{Q_2(s)} = \frac{1 + \tau s}{\eta s} \; ; \; u = \frac{1 + \tau s}{\tau s} \tag{21}$$

și din (18) rezultă

$$D^{(1)} = \frac{pl^3}{12\,EI}(1 - 0{,}2\,e^{-0{,}8\,t/\tau}),$$

$$M_{21}^{(1)} = \frac{pl^2}{3}(1 - 0{,}2\,e^{-0{,}8\,t/\tau}). \tag{22}$$

În cazul în care stîlpii sînt realizați din material Maxwell și rigla din material Hooke, atunci

$$\frac{Q_1(s)}{P_1(s)} = \frac{\eta s}{1 + \tau s} \; ; \; \frac{P_2(s)}{Q_2(s)} = \frac{1}{E} \; ; \; u = \frac{\tau s}{1 + \tau s} \tag{23}$$

și din (18) rezultă

$$D^{(2)} = \frac{pl^3}{3EI}(1 - 0{,}8\,e^{-0{,}2\,t/\tau}),$$

$$M_{21}^{(2)} = \frac{4\,pl^2}{15}\,e^{-0{,}2\,t/\tau}. \tag{24}$$

În figurile 9 și 10 sînt reprezentate variația în timp a rotirii D și momentului încovoietor M_{21}, cînd $\tau = 50$ zile, pentru cele patru cazuri studiate.

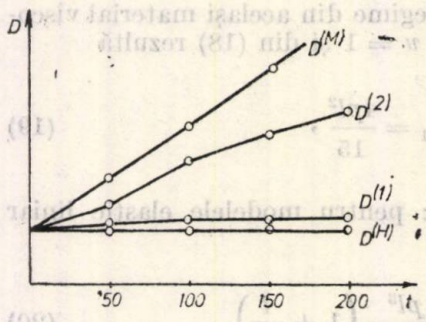


Fig. 9

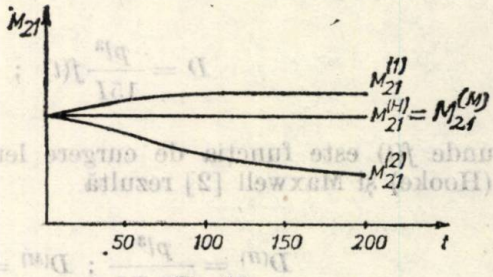


Fig. 10

5. CONCLUZII

Prin folosirea calculului operaţional este adaptată metoda deplasărilor pentru calculul structurilor static nedeterminate realizate din materiale vîscoelastice.

Sistemul ecuaţiilor de condiţie este stabilit atît sub forma preferată pentru un calcul manual, cît şi sub formă matriceală adecvată calculului automatizat.

Exemplul prezentat scoate în evidenţă importanţa şi generalitatea procedeelor de calcul propuse.

Primită la redacţie la 19 iulie 1979.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Avram ş.a., *Rezistenţele şi deformaţiile betonului*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1971.
2. St. Jerca, *Calculul structurilor static nedeterminate realizate din materiale cu comportare viscoelastică I. Metoda forţelor*, St. cerc. mec. apl., **38**, 2, 287—297 (1979).
3. St. Jerca, *Calculul structurilor realizate din materiale cu comportare elastic neliniară sau viscoelastică*, Teză de doctorat, Institutul de construcţii Bucureşti, 1976.
4. V. Jinescu, *Corpuri viscoelastice*, Materiale plastice, *12* (1971).

STABILITATEA STRUCTURILOR SPAȚIALE

de VALERIU BĂNUȚ, LUCIA MIHĂILESCU

Institutul de construcții București

Lucrarea tratează problema stabilității structurilor spațiale formate din bare, considerînd comportarea liniar elastică a materialului (cazul Euler).
În prima parte se stabilesc matricele de rigiditate ale barelor cu diferite tipuri de legături la capete.
În partea a doua se prezintă cîteva exemple practice și concluziile ce se desprind din acest studiu.

1. INTRODUCERE

Prescripțiile oficiale pentru calculul de rezistență al structurilor prevăd considerarea flexibilității în determinarea eforturilor unitare maxime din secțiunile cele mai solicitate. Pentru aceasta este necesară cunoașterea lungimii de flambaj a elementelor puternic comprimate.

În mod obișnuit, chiar și pentru cazul structurilor calculate ca structuri plane, lungimea de flambaj se determină în mod empiric, orientarea generală fiind spre aproximarea cazului real cu unul din cazurile teoretice de bară simplă cu anumite tipuri de legături la capete (cazurile Euler). Acest mod de evaluare poate conduce la lungimi de flambaj mai mari sau mai mici decît în realitate, cu repercusiuni defavorabile asupra rezistenței sau economicității structurilor.

Sînt anumite tipuri de structuri de rezistență care se calculează ca structuri spațiale și în consecință se impune analiza comportării spațiale și printr-un calcul de stabilitate. Un asemenea calcul este însă mai dificil de realizat, comparativ cu calculul structurilor plane.

Chiar și în literatura de specialitate studiile referitoare la această problemă sînt foarte puține [5, 7]. Cel mai adesea se tratează calculul de ordinul II al structurilor spațiale [2, 6], respectiv pierderea de stabilitate prin deformarea continuă (divergența echilibrului).

În această lucrare se prezintă modul de determinare a matricei de rigiditate tangentă utilizată în calculul de stabilitate pentru barele dublu articulate, dublu încastrate și încastrate-articulate. De asemenea, se prezintă rezultatele obținute cu programul STASPE (STAbilitatea structurilor SPațiale în domeniul Elastic) pentru cîteva cazuri precum și comparația acestora cu rezultatele obținute de alți autori.

2. IPOTEZE SIMPLIFICATOARE

În calculul de stabilitate prin bifurcarea tipului de echilibru se consideră următoarele ipoteze simplificatoare :

— se admite valabilă legea lui Hooke, $\sigma = E\varepsilon$ și $\tau = G\gamma$,

— forțele cresc continuu funcție de un singur parametru,

— relația dintre variația forțelor și variația deplasărilor este neliniară, $\Delta P = K_T \Delta U$. Neliniaritatea este introdusă prin corectarea matricei de rigiditate inițiale, funcție de deplasările nodurilor structurii în cursul deformării, $K_T = K_T(U)$,

— relația deformație specifică longitudinală-deplasare este o relație neliniară. Forma acestei relații pentru bara solicitată axial este (1), iar pentru bara solicitată axial și încovoiată este (2) :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)^2, \tag{1}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} - y\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - z\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)^2 \tag{2}$$

unde u_x este deplasarea centrului de greutate al secțiunii transversale, v_x și w_x sînt deplasările pe direcțiile axelor oy și oz ale unui punct curent al secțiunii transversale, situat în zona întinsă la distanța y și z de cele două axe (fig. 1*b*).

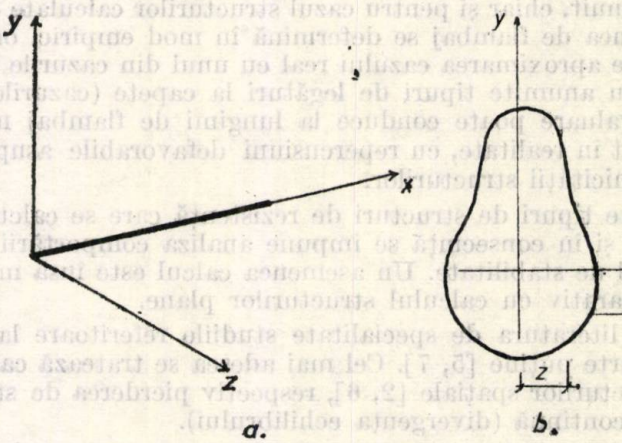


Fig. 1

3. FORMA MATRICEALĂ A ECUAȚIEI DE STABILITATE

Condiția de echilibru stabil la limită sau echilibru indiferent, se exprimă prin relația :

$$\delta^2 V = 0, \tag{3}$$

unde V este energia potențială totală a structurii.

Știind că

$$V = -L_{ext} + W, \tag{4}$$

condiția (3) devine :

$$\delta^2 V = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 V}{\partial U_i \partial U_j} \partial U_i \partial U_j = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 W}{\partial U_i \partial U_j} \partial U_i \partial U_j = 0 \tag{5}$$

deoarece $L_{ext} = P_i U_i$ este funcție liniară de deplasări. Simbolic, condiția (5) se scrie

$$\delta^2 V = \delta U^T H \delta U = 0. \tag{6}$$

Conform primei teoreme a lui Castigliano există relația

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial U_i \partial U_j}\right] = K_T, \tag{7}$$

care, corelată cu condiția $\delta^2 V = 0$, conduce la ecuația de stabilitate :

$$|K_T| = |K_E - \lambda K_{GT}| = 0. \tag{8}$$

Matricea de rigiditate tangentă a structurii K_T se obține prin asamblarea matricelor de rigiditate tangentă a barelor sau a elementelor de bară, care simbolic se scriu :

$$k_T = k_E - \lambda k_{GT}.$$

4. MATRICEA DE RIGIDITATE TANGENTĂ A BAREI

În continuare se prezintă modul de determinare a matricei de rigiditate tangentă a barei dublu articulate și a barei dublu încastrate. Pentru bara cu un singur capăt articulat forma matricei se va prezenta direct.

4.1. BARA DUBLU ARTICULATĂ

Fie bara din figura 2, având lungimea l, modulul de elasticitate E și aria secțiunii transversale A.

Deplasarea centrului de greutate al secțiunii aflate la distanța x se exprimă, funcție de deplasările nodurilor 1 și 2 astfel :

$$\begin{aligned} u_x &= (1 - \xi)u_1 + \xi u_2, \\ v_x &= (1 - \xi)v_1 + \xi v_2, \\ w_x &= (1 - \xi)w_1 + \xi w_2, \end{aligned} \tag{9}$$

unde $\xi = \frac{x}{l}$.

Ținînd seama de expresia (1) a deformației specifice longitudinale, energia de deformație are forma :

$$W = \frac{1}{2}\int_v \sigma_x \varepsilon_x \, dV = \frac{E}{2}\int_v \varepsilon_x^2 \, dV =$$

$$= \frac{E}{2}\int_v \left[\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)^2\right]^2 dV. \tag{10}$$

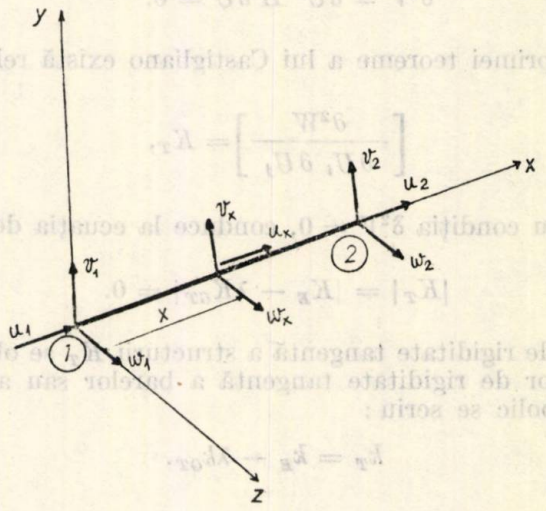


Fig. 2

Dezvoltînd relația (10) și neglijînd termenii de ordinul IV, $\frac{1}{4}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^4$ și $\frac{1}{4}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)^2$, se obține

$$W = \frac{EA}{2}\int_0^l \left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u_x}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 + \frac{u_x}{\partial x}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)^2\right] dx, \tag{11}$$

iar în final energia de deformație este exprimată funcție de deplasările nodurilor :

$$W = \frac{EA}{2l}(u_2 - u_1) + \frac{EA}{2l^2}(u_2 - u_1)\left[(v_2 - v_1)^2 + (w_2 - w_1)^2\right]. \tag{12}$$

Notînd $N = \frac{EA}{l}(u_2 - u_1)$ și aplicînd de două ori prima teoremă a lui Castigliano se obține matricea de rigiditate tangentă în care k_{GT} are forma :

$$k_{GT} = \frac{N}{l}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

4.2. BARA DUBLU ÎNCASTRATĂ

Pentru bara din figura 3*a*, cîmpul de deplasări se alege astfel :

$$u_x = (1 - \xi)u_1 + \xi u_2,$$

$$v_x = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)\, v_1 - (1 - \xi)\, l\varphi\theta_{x_1} + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) l\theta_{z_1} + (3\xi^2 - 2\xi^3)\, v_2 - l\xi\varphi\theta_{x_2} - (\xi^2 - \xi^3) l\theta_{z_2},$$

$$w_x = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)\, w_1 - (1 - \xi)\, l\eta\theta_{x_1} - (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)\, l\theta_{y_1} + (3\xi^2 - 2\xi^3)\, w_2 - l\xi\eta\theta_{x_2} - (\xi^2 - \xi^3) l\theta_{y_2},$$

$$\theta_x = (1 - \xi)\, \theta_{x_1} + \xi\theta_{x_1}, \tag{14}$$

unde $\eta = y/l$ și $\varphi = z/l$. Termenii în θ_{x_1} și θ_{x_2} din expresia deplasărilor v_x și w_x reprezintă efectul torsiunii (fig. 3*b*).

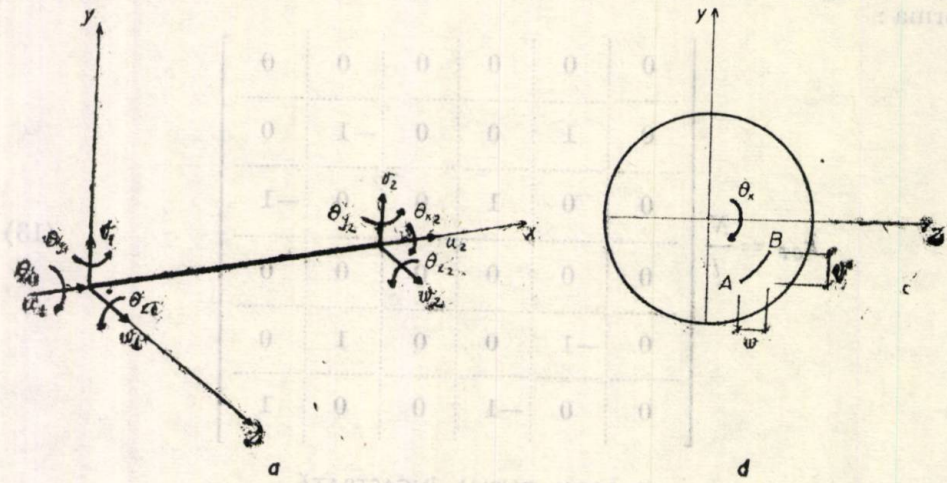
$$\gamma_x = r\frac{\partial\theta_x}{\partial x}. \tag{15}$$

Ținînd seama de expresia (2) a deformației specifice longitudinale și de expresia (15) a deformației specifice unghiulare, după neglijarea termenilor de ordinul IV, energia de deformație devine :

$$W = \frac{EA}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{EA}{2}\int_0^l \frac{\partial u_x}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{EA}{2}\int_0^l \frac{\partial u_x}{\partial x}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{EI_z}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{EI_y}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}\right)^2 dx + \frac{GI_x}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)^2 dx. \tag{16}$$

Operînd asupra energiei de deformație ca și în cazul precedent se obține pentru k_E forma cunoscută din calculul de ordinul I (fără efectul

forței axiale), iar pentru k_{GT} forma (17), în care termenii $\frac{N}{l}\frac{I_x}{A}$ reprezintă efectul torsiunii.



a b

Fig. 3a b

$$k_{GT}=\frac{N}{l}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{10}\\
0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & -\frac{l}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & -\frac{l}{10} & 0\\
0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{I_x}{A} & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{l}{10} & 0 & \frac{2l^2}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{10} & 0 & -\frac{l^2}{30} & 0\\
0 & \frac{l}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2l^2}{15} & 0 & -\frac{l}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{30}\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{10}\\
0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & \frac{l}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{l}{10} & 0\\
0 & 0 & 0 & -\frac{I_x}{A} & 0 & \frac{l}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{I_x}{A} & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{l}{10} & 0 & -\frac{l^2}{30} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{10} & 0 & \frac{2l^2}{15} & 0\\
0 & \frac{l}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l^2}{30} & 0 & -\frac{l}{10} & 0 & 0 & 0 & \frac{2l^2}{15}
\end{bmatrix} \quad (17)$$

4.3. BARA ÎNCASTRATĂ-ARTICULATĂ

Se consideră bara încastrată-articulată din figura 4*a*. Articulația din capătul 2 se consideră articulație sferică, și în consecință efectul torsiunii nu se manifestă.

Cîmpul de deplasări are expresia :

$$u_x = (1 - \xi)\, u_1 + \xi u_2,$$

$$v_x = \frac{1}{2}(2 - 3\xi^2 + \xi^3)\, v_1 + \frac{1}{2}(2\xi - 3\xi^2 + \xi^3)\, l\theta_{z_1} + \frac{1}{2}(3\xi^2 - \xi^3) v_2, \tag{18}$$

$$w_x = \frac{1}{2}(2 - 3\xi^2 + \xi^3)\, w_1 - \frac{1}{2}(2\xi - 3\xi^2 + \xi^3)\, l\theta_{y_1} + \frac{1}{2}(3\xi^2 - \xi^3)\, w_2.$$

Deformația specifică longitudinală avînd expresia (2) se obține pentru energia de deformație după neglijarea termenilor de ordinul IV

$$\mathcal{W} = \frac{EA}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{EA}{2}\int_0^l \frac{\partial u_x}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 dx + \frac{EA}{2}\int_0^l \frac{\partial u_x}{\partial x}\left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right)^2 dx + \\ + \frac{EI_z}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial w_x}{\partial x}\right) dx + \frac{EI_y}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2}\right) dx. \tag{19}$$

Exprimînd energia de deformație funcție de deplasările nodurilor și aplicînd de două ori teorema lui Castigliano, se obține forma matricei de rigiditate tangentă ($k_E + k_{GT}$).

$$k_E = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline u_1 & v_1 & w_1 & \theta_{x_1} & \theta_{y_1} & \theta_{z_1} & u_2 & v_2 & w_2 & \theta_{x_2} & \theta_{y_2} & \theta_{z_2} \\ \hline \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{3EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{3EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{3EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{3EI_y}{l^2} & 0 & \frac{3EI_y}{l} & & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{3EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{l} & 0 & -\frac{3EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{3EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\frac{3EI_y}{l^3} & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \tag{20}$$

$$k_{GT} = \frac{N}{l}\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{5} & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & -\frac{l}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{l}{5} & 0 & \frac{l^2}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{5} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{l}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{5} & 0 & -\frac{l}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{5} & 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & -\frac{l}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} \tag{21}$$

4.4. BARA ARTICULATĂ-ÎNCASTRATĂ

Se consideră bara articulată-încastrată din figura 4*b*. Cîmpul de deplasări are expresia :

$$u_x = (1 - \xi)\, u_1 + \xi u_2,$$

$$v_x = \frac{1}{2}(2 - 3\xi + \xi^3)\, v_1 + \frac{1}{2}(3\xi - \xi^3)\, v_2 - \frac{1}{2}(\xi - \xi^3)\, l\theta_{z_1}, \tag{22}$$

$$w_x = \frac{1}{2}(2 - 3\xi + \xi^3)\, w_1 + \frac{1}{2}(3\xi - \xi^3)\, w_2 + \frac{1}{2}(\xi - \xi^3)\, l\theta_{y_2}.$$

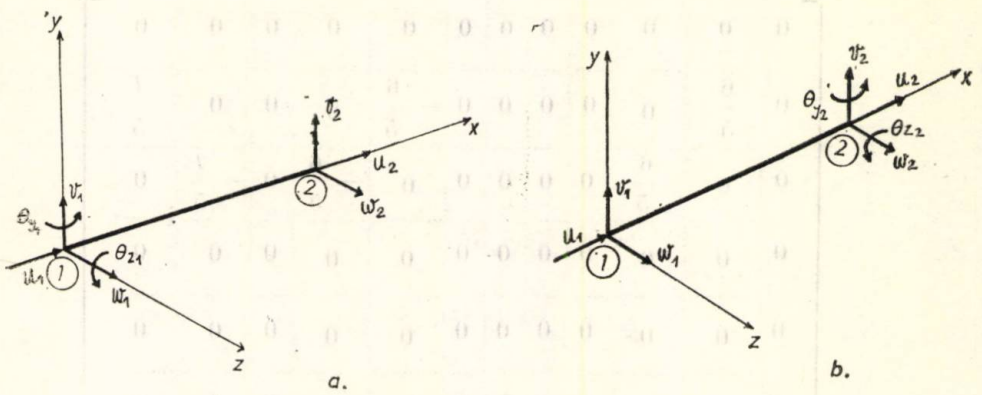


Fig. 4

Energia de deformație are forma (19). Exprimînd (19) în funcție de deplasările nodurilor, conform cu (22) și aplicînd teorema lui Castigliano se obține matricea de rigiditate tangentă

$$k_E = \begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{3EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{l^2} \\
0 & 0 & \frac{3EI_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{3EI_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{3EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{l^2} \\
0 & 0 & -\frac{3EI_y}{l^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{l^3} & 0 & \frac{3EI_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{3EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_y}{l^2} & 0 & \frac{3EI_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{3EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{3EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{3EI_z}{l}
\end{bmatrix} \tag{23}$$

$$k_{GT} = \frac{N}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{5} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & -\frac{l}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{5} \\ 0 & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 0 & \frac{l}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{l}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l}{5} & 0 & \frac{l^2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{l}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{l}{5} & 0 & 0 & 0 & \frac{l^2}{5} \end{bmatrix} \tag{24}$$

5. REZOLVAREA PRACTICĂ A ECUAȚIEI DE STABILITATE

Forma (8) a ecuației de stabilitate nu poate fi rezolvată deoarece matricea K_T este singulară ca urmare a faptului că ea conține modurile rigide de deplasare. Eliminînd aceste moduri de deplasare rezultă matricea K_E nesingulară ($|K_E \neq 0|$), dar matricea K_{GT} rămîne în continuare singulară ca urmare a faptului că matricele k_{GT} ale elementelor au o serie de linii și coloane zero.

Prin intervertirea liniilor și coloanelor, matricea K_{GT} se poate scrie sub formă redusă

$$K_{GT} = \left[\begin{array}{c|c} K_{GR} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{25}$$

De asemenea, matricea K_E se scrie sub forma redusă K_{ER} [1, 3] astfel încît ecuația de stabilitate (8) devine:

$$|K_{ER} - \lambda K_{GR}| = 0. \tag{26}$$

Notînd $\omega = \frac{1}{\lambda}$ și descompunînd matricea K_{GR} într-un produs de două matrice triunghiulare $K_{GR} = L \cdot L^T$ se ajunge la forma practică a ecuației de stabilitate

$$|\omega - S| = 0 \tag{27}$$

unde $S = L^T K_{ER}^{-1} L$ reprezintă matricea de stabilitate simetrică. Valorile și vectorii proprii se determină prin metode cunoscute [1, 3], însă în practică interesează numai prima valoare proprie ω, respectiv valoarea minimă pentru λ_{cr}.

6. EXEMPLE DE CALCUL

Pentru ilustrarea modului de aplicare concretă a aspectelor teoretice a fost întocmit un program de calcul, denumit STESPA, program care furnizează numărul dorit de valori proprii și vectorii proprii asociați, precum și lungimea de flambaj a barelor comprimate pentru valoarea minimă a multiplicatorului forțelor axiale, $\lambda_{cr,min}$.

Cu ajutorul acestui program au fost rezolvate o serie de cazuri de elemente și structuri, dintre care în continuare sînt prezentate două, ca exemple.

1. Primul caz este bara încastrată la un capăt și liberă la celălalt (fig. 5), avînd lungimea de 5m, $A = 118$ cm^2, $I_x = 100$ cm^4, $I_y = 1160$ cm^4, $I_z = 29\,200$ cm^4. Bara a fost împărțită în două elemente egale, de 2,5 m. Pierderea de stabilitate, așa cum era și normal, are loc prin încovoiere după axa $y - y$, de minimă rigiditate la încovoiere, iar lungimea de flambaj rezultă egală cu $2l$. Forța critică este de 24,054 t.

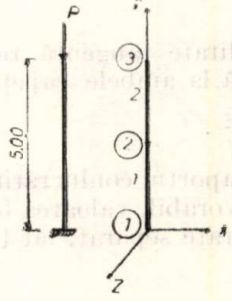


Fig. 5

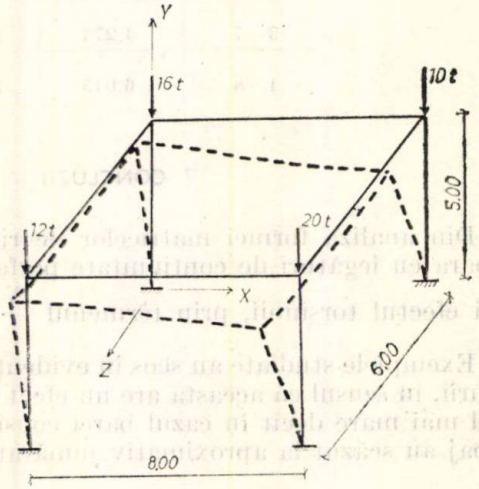


Fig. 6

2. Al doilea caz este un cadru spațial cu un singur nivel (fig. 6) care are toate barele cu aceleași caracteristici ca și bara din exemplul 1. Pierderea de stabilitate are loc prin deformata reprezentată punctat în figura 6, la o valoare a multiplicatorului critic minim de $\lambda_{cr,min} = 6{,}58$. Vectorul propriu corespunzător acestei valori proprii este prezentat în tabela 1. Nodurile 1, 2, 3 și 4 au toate deplasările egale cu zero.

Tabela 1

Nodul	U_x	U_y	U_z	θ_x	θ_y	θ_z
5	$0{,}266 \cdot 10^{-2}$	$0{,}263 \cdot 10^{-3}$	0,782	$0{,}578 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}121 \cdot 10^{-1}$	$-0{,}409 \cdot 10^{-3}$
6	$-0{,}269 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}263 \cdot 10^{-3}$	0,782	$0{,}668 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}121 \cdot 10^{-1}$	$0{,}313 \cdot 10^{-3}$
7	$-0{,}269 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}310 \cdot 10^{-3}$	1,000	$0{,}642 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}121 \cdot 10^{-1}$	$0{,}414 \cdot 10^{-3}$
8	$0{,}266 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}310 \cdot 10^{-3}$	1,000	$0{,}929 \cdot 10^{-2}$	$-0{,}121 \cdot 10^{-1}$	$-0{,}409 \cdot 10^{-3}$

Lungimile de flambaj pe cele două direcții ale stîlpilor sînt date în tabela 2.

Tabela 2

Stîlpul	l_{fy} m	l_{fz} m
1—5	4,779	23,976
2—6	5,518	27.685
3—7	4,274	21,445
4—8	6,045	30,328

7. CONCLUZII

— Din analiza formei matricelor de rigiditate tangentă rezultă că pentru bara cu legături de continuitate perfectă la ambele capete se manifestă și efectul torsiunii, prin termenul $\frac{N}{l}\frac{I_x}{A}$.

— Exemplele studiate au scos în evidență aportul conlucrării spațiale a structurii, în sensul că aceasta are un efect favorabil, valoarea forței critice fiind mai mare decît în cazul barei considerate separat, iar lungimile de flambaj au scăzut la aproximativ jumătate.

Primită la redacție la 26 octombrie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. V. BĂNUȚ, H. POPESCU, *Stabilitatea structurilor elastice*, Editura Academiei, București, 1975.
2. V. BĂNUȚ, *Calculul geometric neliniar al structurilor spațiale formate din bare*, St. cerc. mec., apl., **38**, 2 (1979).
3. V. BĂNUȚ, N. FOURNEAUX, *Application de la méthode des éléments finis à l'étude de la stabilité des structures planes*, Rev. Roum. Sci. Tech. — Méc. Appl., **17**, 6 (1972).
4. S.J. PRZEMIENICKI, *Theory of matrix structural analysis*, McGraw-Hill, New York, 1968.
5. E.A. AKKOUSH, H.K. HUANG, *Bifurcation, pre-and post buckling analysis of frame structures*, Computers & Structures, **8** (1978).
6. K.A. NOOR, *Nonlinear analysis of space trusses*, J. St. Div., ASCE, March, 1974.
7. CHU-KUANG-HAN, R.H. RAMPETSREITER, *Large deflection buckling of space frames*, J. St. Div., ASCE, December, 1972.

INTRODUCERE ÎN ANALIZA DINAMICĂ A STRUCTURILOR CU DALE. II

de RADU NEGRUȚIU
Institutul de construcții București

Pornind de la faptul că în literatura de specialitate nu se cunosc studii privind analiza dinamică a structurilor cu dale, în prima parte a lucrării au fost prezentate acele elemente specifice de calcul care sînt esențiale în abordarea, — prin metoda matricei de flexibilitate, — a studiului vibrațiilor libere și al vibrațiilor forțate la sistemele structurale elastice alcătuite din bare și plăci (cap. 1 și 2).
O sinteză a rezultatelor obținute de autor în studiul plăcilor plane sub acțiunea unui cuplu de suprafață, respectiv sub acțiunea unor grupări de cupluri [7] — [17], face obiectul părții a doua a lucrării (cap. 3). Tratate ca forțe de legătură generalizate, — la nivelul nodurilor bară-placă, — grupările de cupluri de suprafață permit modelarea efectului legăturilor rigide, caracteristice structurilor cu dale din beton armat.
Exemple numerice comparative pun în evidență importanta influență a factorului de rigiditate relativă stîlp-dală asupra valorii deplasărilor elastice și a eforturilor secționale în dale și în ansamblul structurii (cap. 4). Este demonstrată, de asemenea, posibilitatea efectuării calculului de structură la încărcarea printr-un sistem de forțe acționînd în planul dalelor.

3. CUPLUL DE SUPRAFAȚĂ CA FORȚĂ DE LEGĂTURĂ GENERALIZATĂ ÎN ANALIZA ELASTICĂ A STRUCTURILOR CU DALE

3.1. PLĂCI PLANE SUB ACȚIUNEA UNUI CUPLU DE SUPRAFAȚĂ

3.1.1. Modele matematice ale suprafeței mediane a plăcilor plane deformate sub acțiunea unui cuplu de suprafață *M*

Analiza elastică, statică și dinamică, a structurilor cu dale, avînd drept obiectiv reprezentarea riguroasă a distribuției deplasărilor elastice și a eforturilor secționale în dale și în ansamblul structurii, nu poate fi abordată fără introducerea în calcule a unui nou tip de forță de legătură generalizată : *cuplul de suprafață* (fig. 1.2 și 3.1).

Modelarea efectului legăturilor rigide la nivelul nodurilor stîlp-dală face posibilă o analiză statică completă, prin luarea în considerarea a unor *restricții suplimentare*, specifice acestor legături : pe lîngă condiția de deplasare transversală nulă

$$w_{s,d} = 0,$$

în sistemul ecuațiilor de continuitate se introduc condițiile de rotire relativă nulă

$$\varphi^x_{s,d} = 0\,;\ \varphi^y_{s,d} = 0,$$

scrise în toate nodurile stîlp-dală. Aceste restricții suplimentare apropie schema statică de *sistemul structural real* și conduc la importante reduceri ale mărimii deplasărilor elastice liniare și unghiulare cît și, implicit, la *reducerea valorilor de dimensionare ale eforturilor secționale* (cap. 4 — fig. 4.3 — 4.6).

Ecuațiile suprafeței mediane deformate $w(x, y)$ a plăcilor plane cu contur finit, sub acțiunea unui cuplu de suprafață M (fig. 3.1.*A*), au fost stabilite de autor [7] pornind de la soluții cunoscute ale ecuației fundamentale Lagrange-Sophie Germain

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p(x, y)}{D}, \tag{3.1}$$

prin extinderea procedeului propus de Girkmann [5] pentru modelarea efectului unui *cuplu punctual* și acționînd placa plană de lungime infinită. Același procedeu fusese utilizat de Stiglat [21], pentru stabilirea ecuației suprafeței mediane a plăcii de lungime infinită încărcată cu un cuplu de suprafață M (fig. 3.1.*B*).

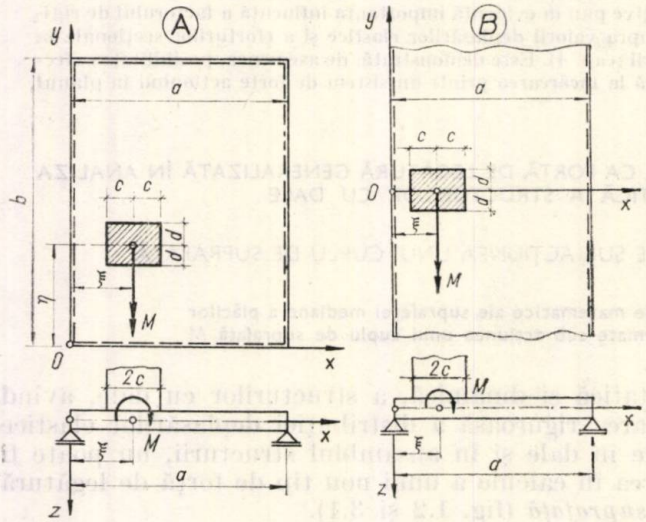


Fig. 3.1. — Plăci plane sub acțiunea unui cuplu de suprafață. Vectorul moment M paralel cu axa Oy: *A*) Placa plană dreptunghiulară; *B*) Placa de lungime infinită.

Soluțiile la care s-a ajuns [7]—[17] sînt de forma (fig. 3.1)

$$w = w(M, a, b, c, d, \xi, \eta, \mu, D, x, y), \tag{3.2}$$

unde

M — valoarea scalară a vectorului moment M (Nm) care reprezintă cuplul de suprafață, vector care poate fi paralel cu oricare din axele Ox sau Oy definind planul median al plăcii;

a, b — deschiderile de calcul ale plăcii plane;

$2c$, $2d$ — dimensiunile suprafeței de aplicare a cuplului M;

ξ, η — coordonatele centrului de greutate ale acestei suprafețe în planul median al plăcii ;

μ — coeficientul lui Poisson ;

D — rigiditatea cilindrică a plăcii plane (2.6), definită la § 2.1.

Ecuațiile w (3.2), reprezentînd soluții riguroase, în limitele definite de ipotezele fundamentale ale teoriei plăcilor plane, permit determinarea, în orice punct (x, y) al planului median, a stării de deformație și a stării de tensiune ca efecte ale acțiunii cuplului de suprafață M asupra plăcii plane. Într-adevăr, funcțiile w (3.2) și derivatele lor parțiale de ordinul 1, 2 și 3 exprimă mărimi fizice care definesc complet aceste stări :

w — deplasarea elastică transversală a punctului (x, y) din planul median (m) ;

φ_x, φ_y — deplasările elastice unghiulare (rotirile) în cele două sensuri ale planului (rad) ;

M_x, M_y, M_{xy} — valorile momentelor secționale încovoietoare, respectiv a momentului secțional de torsiune în (x, y) (Nm/m) ;

R_x, R_y — valorile reacțiunilor pe contur în $(0, y)$, respectiv în $(x, 0)$ (N/m).

În vederea elaborării programelor de calcul și pentru a ușura utilizarea lor în aplicațiile practice, s-a dat expresiilor tuturor acestor mărimi fizice o formă de maximă simplitate (tabelul 2). Urmărind același obiectiv, inclusiv la programarea calculelor de structură, — unde intervin, pe lîngă forțele de legătură—cupluri M, și forțe de legătură—forțe P, — formulele practice de calcul au fost completate cu expresiile corespunzătoare încărcării plăcilor plane cu forța $P\,(N)$, acționînd transversal, în sensul axei Oz, și local distribuită pe suprafața $(2c \cdot 2d)$ din planul median. În sfîrșit, în același scop, sistematizările propuse includ și cazul încărcării q (N/m^2), uniform distribuită pe întreaga suprafață a plăcii plane.

Prin introducerea acestor sistematizări, distribuția în planul plăcii a deplasărilor elastice și a eforturilor secționale, inclusiv a reacțiunilor pe contur este perfect definită, pentru cele trei tipuri de încărcări, M, P, q, cu ajutorul a opt *coeficienți adimensionali*

$$k_w,\quad k_\varphi^x,\quad k_\varphi^y,\quad k_M^x,\quad k_M^y,\quad k_M^{xy},\quad k_R^x,\quad k_R^y, \tag{3.11}$$

al căror calcul la ordinator nu pune probleme.

Pentru determinarea, spre exemplu, a rotirii φ_x în cazul plăcii plane simplu rezemată pe întregul contur, sub acțiunea unui cuplu de suprafață $M \parallel Oy$ (fig. 3.1.*A*), se va utiliza formula

$$\varphi_x = \frac{M}{D}\, k_\varphi^x \ \text{(rad)}. \tag{3.4}$$

Tabelul 2

Formule practice de calcul

Simbol	ÎNCĂRCARE A PLĂCII PLANE			Unitate	
	M (Nm)	**P** (N)	**q** (N/m²)		
	DEPLASARE TRANSVERSALĂ				
w	$\frac{M \cdot a}{D} k_w$	$\frac{P \cdot a^2}{D} k_w$	$\frac{q \cdot a^4}{D} k_w$	(m)	(3.3)
	ROTIRI				
φ_x	$\frac{M}{D} k_\varphi^x$	$\frac{P \cdot a}{D} k_\varphi^x$	$\frac{q \cdot a^3}{D} k_\varphi^x$	(rad)	(3.4)
φ_y	$\frac{M}{D} k_\varphi^y$	$\frac{P \cdot a}{D} k_\varphi^y$	$\frac{q \cdot a^3}{D} k_\varphi^y$	(rad)	(3.5)
	MOMENTE SECȚIONALE				
M_x	$\frac{M}{a} k_M^x$	$P \cdot k_M^x$	$q \cdot a^2 k_M^x$	(Nm/m)	(3.6)
M_y	$\frac{M}{a} k_M^y$	$P \cdot k_M^y$	$q \cdot a^2 k_M^y$	(Nm/m)	(3.7)
M_{xy}	$\frac{M}{a} k_M^{xy}$	$P \cdot k_M^{xy}$	$q \cdot a^2 k_M^{xy}$	(Nm/m)	(3.8)
	REACȚIUNI PE CONTUR				
R_x	$\frac{M}{a^2} k_R^x$	$\frac{P}{a} k_R^x$	$q \cdot a k_R^x$	(N/m)	(3.9)
R_y	$\frac{M}{a^2} k_R^y$	$\frac{P}{a} k_R^y$	$q \cdot a k_R^y$	(N/m)	(3.10)

unde

$$k_{\varphi}^{x} = \frac{4a^2}{\pi^4 cd} \sum_m \sum_n \frac{1}{m^3 n \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\frac{n^2}{m^2}\right)^2} \sin \alpha c \cos \alpha \xi \sin \beta d \sin \beta \eta \cos \alpha x \sin \beta y,$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots ; n = 1, 2, 3, \ldots).$$

în care s-a notat cu

$$\alpha = \frac{m\pi}{a} ; \beta = \frac{n\pi}{b}$$

Pentru calculul valorii momentului secțional de torsiune M_{xy} în cazul plăcii de lungime infinită simplu rezumată pe laturile $x = 0$ și $x = a$, sub acțiunea unui cuplu de suprafață $M \parallel Oy$ (fig. 3.1 *B*), se va utiliza formula

$$M_{xy} = \frac{M}{a} k_M^{xy} \quad (\text{Nm/m}), \tag{3.8}$$

unde, pentru $y \geqq d$,

$$k_M^{xy} = \frac{(\mu - 1)a^2}{2\pi^2 cd} \sum_m \frac{1}{m^2} \sin \alpha c \cos \alpha \xi \cos \alpha x \, [\alpha d \operatorname{ch} \alpha d - (1 + \alpha y) \operatorname{sh} \alpha d] \, e^{-\alpha y},$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

în care s-a notat cu

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}$$

După cum se poate observa din expresiile coeficienților adimensionali, soluțiile w (3.2) ale ecuației fundamentale a plăcilor plane (3.1), la încărcarea lor cu un cuplu de suprafață M, au rezultat sub forma unor *serii duble de funcții trigonometrice*, în cazul plăcii plane cu contur finit (fig. 3.1.*A*), respectiv sub forma unor *serii simple de funcții hiperbolice*, în cazul plăcii de lungime infinită (fig. 3.1.*B*). Expresiile celor opt coeficienți adimensionali $k_w, \ldots k_R^y$ (3.11) au fost stabilite pentru ambele categorii de plăci plane studiate și pentru toate tipurile de încărcări M, P, q care pot interveni în practica proiectării structurilor cu dale [14], [17].

Pe baza numeroaselor studii comparative efectuate [9]—[17], s-a putut stabili *perfecta analogie de comportare* a acestor două categorii de plăci plane, indiferent de tipul încărcării M, P, q sau S (la structuri cu dale sub acțiunea unui sistem de forțe orizontale), valorile deplasărilor elastice și ale eforturilor secționale rezultînd, evident, mai mici în cazul plăcilor plane cu contur finit decît în cazul plăcii de lungime infinită (fig. 3.2 ; 3.3 ; 3.6 ; 3.7 ; 4.3 ; 4.5 și 4.6). Această analogie de comportare odată demonstrată, ea conduce la două importante concluzii :

1. Modelarea matematică a efectului unui cuplu de suprafață M asupra plăcii plane cu contur finit și asupra plăcii de lungime infinită este corectă *).

*) Unele valori comparative, care confirmă această concluzie, au fost date de Stiglat [21], [22], Scholz [20] și Allen-Darvall [2].

2. Ori de cîte ori geometria structurii cu dale permite asimilarea dalelor cu plăci de lungime infinită, este recomandabilă efectuarea calculelor numerice în această ipoteză, în scopul reducerii substanțiale a timpului de lucru la ordinator (seriile simple de funcții hiperbolice fiind mult mai convergente decît seriile duble de funcții trigonometrice).

3.1.2. Mărimea și distribuția deplasărilor elastice și a eforturilor secționale la încărcarea printr-un cuplu de suprafață M

Fiind urmărită efectuarea unor studii comparative riguroase, condiția de precizie impusă prin programele de calcul a fost severă (suma ultimilor 10 termeni ai seriilor mai mică decît 10^{-6}). Rezultatele acestor studii comparative sînt sintetizate în cele ce urmează, punîndu-se accentul pe acele aspecte care intervin, în general, în analiza dinamică a structurilor cu dale și, în special, în calculul acestor structuri la încărcarea seismică S (§2.1 — formula 2.18).

Suprafața mediană a plăcilor plane încărcate antisimetric ($\xi = 0{,}50\ a$) printr-un cuplu de suprafață (fig. 3.2) prezintă, în tot lungul axei de simetrie ca suport al vectorului moment M, valori nule pentru deplasarea elastică liniară w ($x = 0{,}50\ a \rightarrow w = 0$). În planele transversale $y = \eta$, mărimea și distribuția deplasărilor maxime w este practic identică, pentru întreg intervalul $a \leqslant b \leqslant \infty$ (a se vedea și figura 3.3, pentru $\xi = 0{,}50\ a$). Valorile w descresc rapid cu distanța y la suprafața încărcată ($2c \cdot 2d$).

Analogia de comportare a plăcii plane de lungime infinită ($b = \infty$) cu placa plană cu contur finit ($a \leqslant b \leqslant 3a$) este pusă în evidență și în cazul

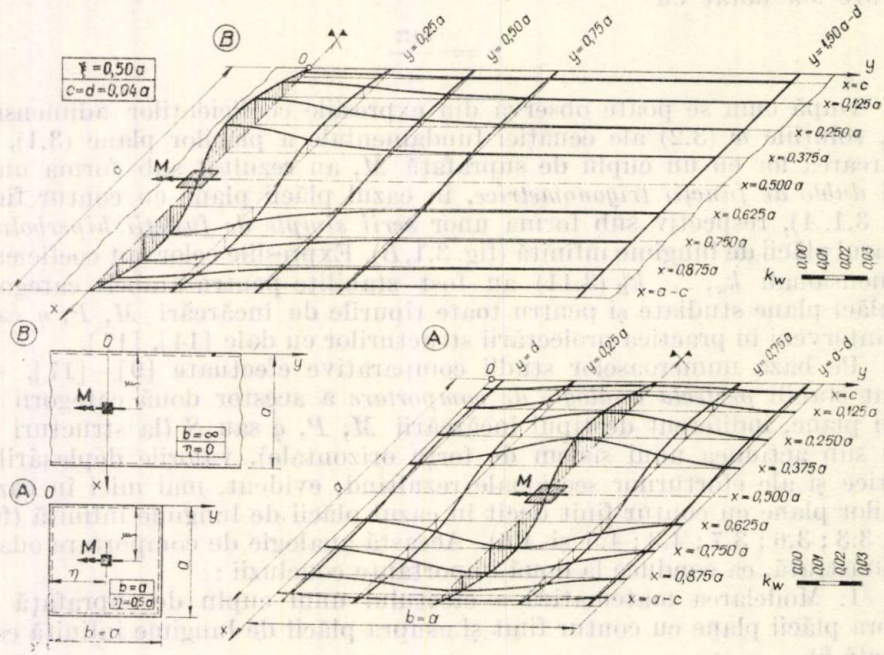


Fig. 3.2. — Reprezentarea spațială a suprafeței mediane w a plăcilor plane deformate sub acțiunea unui cuplu de suprafață M în axa de simetrie a plăcii ($\xi = 0{,}50\ a$): *A*) Placa plană pătrată; *B*). Placa de lungime infinită.

încărcării acestora printr-un cuplu de suprafață acționînd în trei poziții caracteristice (fig. 3.3): pe conturul plăcii ($\xi = c$), la sfertul deschiderii ($\xi = 0{,}25a$) și la jumătatea deschiderii ($\xi = 0{,}50a$). În cazul plăcilor foarte lungi ($3a \leqslant b \leqslant \infty$), suprafețele mediane deformate se confundă, în planele $y = \eta$, oricare ar fi poziția cuplului de suprafață M.

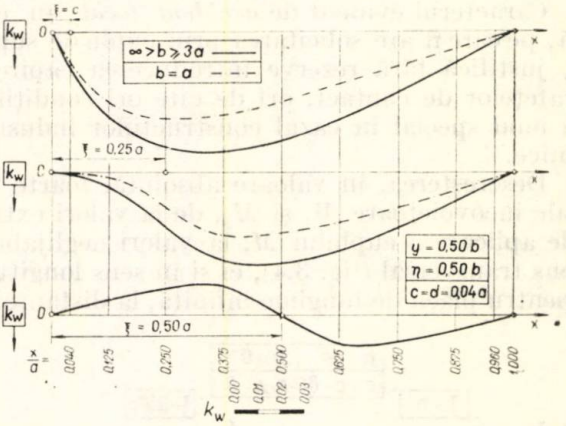


Fig. 3.3. — Plăci plane cu contur finit ($a \leqslant b \leqslant 3a$) și placa de lungime infinită sub acțiunea M. Suprafața mediană deformată w trasată în planul de simetrie $y = \eta_1 = 0{,}50\,b$ ($y = \eta_1 = 0$ la $b = \infty$), pentru trei poziții caracteristice ale cuplului de suprafață ($\xi = 0$; $\xi = 0{,}25a$; $\xi = 0{,}50\,a$).

Mărimea și distribuția momentelor secționale încovoietoare M_x depind atît de poziția (ξ, η) a cuplului de suprafață M cît și, mai ales, de *mărimea suprafeței de contact* ($2c \cdot 2d$) între stîlp și dală (fig. 3.4). Astfel, pentru o

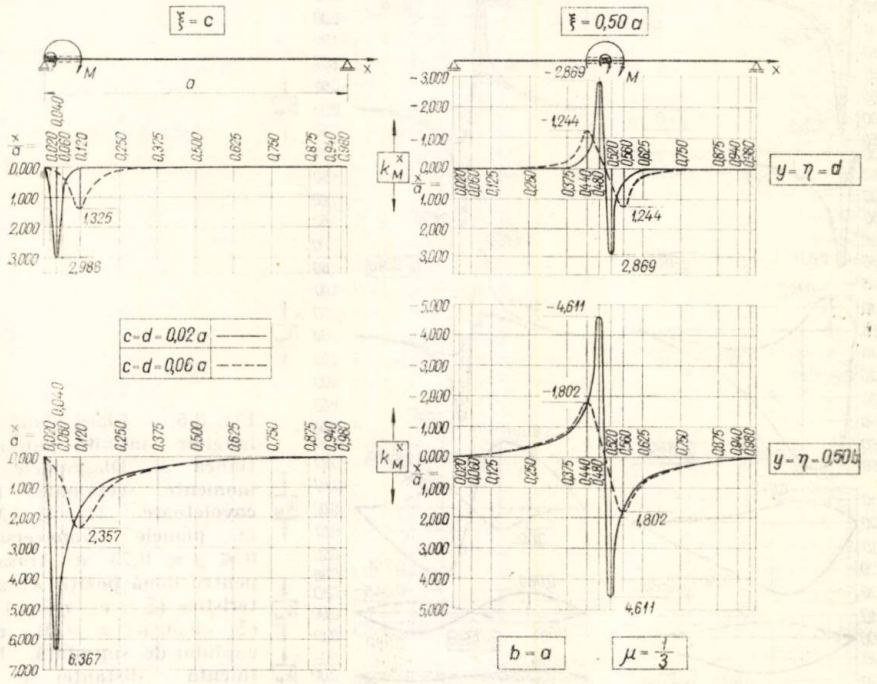


Fig. 3.4. — Placa plană pătrată sub acțiunea M. Diagramele de momente secționale încovoietoare M_x în planele transversale $y = \eta$, trasate pentru patru poziții caracteristice (ξ, η) ale cuplului de suprafață. Influența parametrilor (c, d) care definesc suprafața de contact stîlp-dală ($0{,}02\,a \leqslant c, d \leqslant 0{,}06\,a$).

triplare a valorii parametrilor care definesc suprafața de aplicare a cuplului M, se obțin reduceri substanțiale, cuprinse între 56 %—63 %, ale valorilor extreme ale momentelor secționale încovoietoare M_x. Apare clar ordinul de mărime al aproximațiilor care decurg din introducerea în calcule a cuplului punctual în locul cuplului de suprafață.

Caracterul evident de *accident local*, în cazul stîlpilor de secțiune mică, pe care îl are solicitarea prin cuplu de suprafață a plăcilor plane (fig. 3.4), justifică fără rezerve introducerea capitelurilor, în scopul măririi suprafețelor de contact, ori de cîte ori condițiile de exploatare o permit și în mod special în cazul construcțiilor industriale amplasate în regiuni seismice.

Descreșterea, în valoare absolută, foarte rapidă a momentelor secționale încovoietoare M_x și M_y, de la valori extreme, pe conturul suprafeței de aplicare a cuplului M, la valori neglijabile, se manifestă nu numai în sens transversal (fig. 3.4), ci și în sens longitudinal plăcii (fig. 3.5). Astfel, pentru placa de lungime infinită, la distanțe $y \geqslant 0{,}75\ a$ de la suprafața

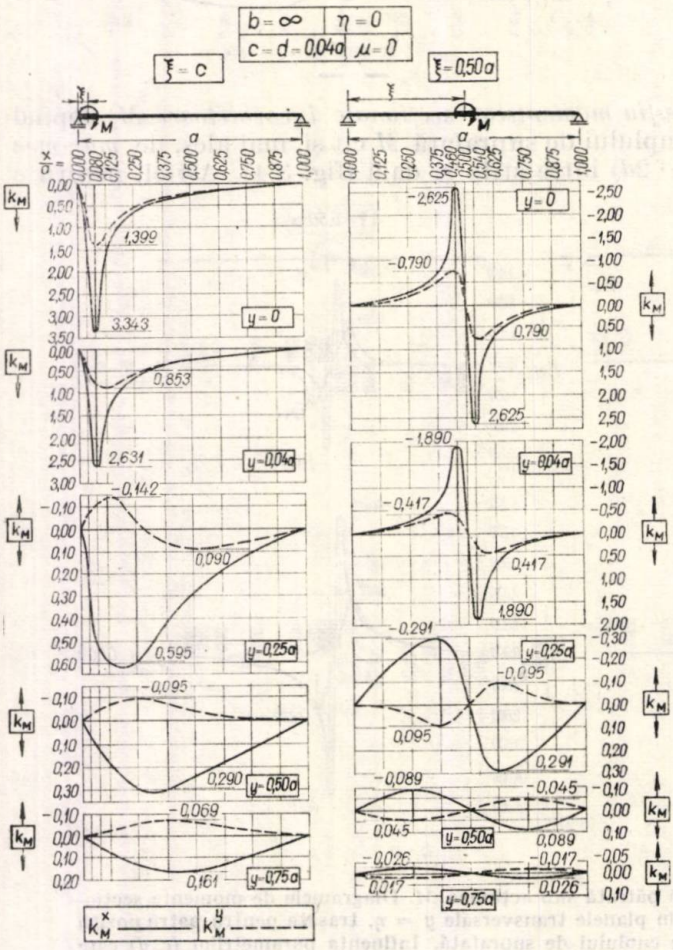


Fig. 3.5. — Placa plană de lungime infinită sub acțiunea M. Diagramele de momente secționale încovoietoare M_x și M_y în planele transversale $0 \leqslant y \leqslant 0{,}75\ a$, trasate pentru două poziții caracteristice ($\xi = c$; $\eta = 0$) și ($\xi = 0{,}50\ a$; $\eta = 0$) ale cuplului de suprafață. Influența distanței y la suprafața încărcată asupra valorilor extreme ale eforturilor secționale.

încărcată (situată în planul de simetrie $y = 0$), valorile coeficienţilor adimensionali k_M^x şi k_M^y pot fi considerate, în aplicaţiile curente, practic nule (scara diagramelor de eforturi în planele $0{,}25\ a \leqslant y \leqslant 0{,}75\ a$ a fost mărită de 5 ori).

Este de menţionat că atît în studiul efectului grupărilor de cupluri de suprafaţă (§3.2), cît şi în calculele de structură efectuate în cadrul lucrării (cap. 4 şi 5) au fost neglijate numai valorile coeficienţilor adimensionali corespunzătoare unor distanţe $y > 2a$.

3.2. PLĂCI PLANE SUB ACŢIUNEA UNOR GRUPĂRI DE CUPLURI DE SUPRAFAŢĂ. EXTINDEREA DOMENIULUI DE APLICABILITATE A METODEI DE CALCUL PROPUSE

În completarea elementelor de calcul necesare analizei elastice a structurilor cu dale au fost studiate comparativ şi efectele, asupra celor două categorii de plăci plane considerate, ale grupărilor de cupluri de suprafaţă M, cît şi, în paralel, ale grupărilor de forţe P local distribuite [12]—[17]. Ca şi în cazul acţionării plăcilor plane printr-un singur cuplu de suprafaţă M, respectiv printr-o singură forţă P local distribuită, grupările M sau P pot fi privite nu numai ca încărcări efectiv aplicate ci şi ca forţe de legătură generalizate, permiţînd, în acest mod, *determinarea deplasărilor unitare grupate* care intervin atît în analiza statică, cît şi în analiza dinamică a structurilor cu dale (cap. 2, 4 şi 5).

Pentru calculul deplasărilor elastice, liniare sau unghiulare, cît şi pentru determinarea eforturilor secţionale în plăcile plane acţionate prin grupări de cupluri de suprafaţă M (fig. 3.6 şi 3.7) sau prin grupări de forţe P local distribuite, coeficienţii adimensionali $k_w, \ldots, k_R^y$ (3.11) se înlocuiesc, în formulele practice de calcul (3.3)—(3.10), prin cei opt coeficienţi adimensionali

$$K_w\,;\ K_\varphi^x\,;\ K_\varphi^y\,;\ K_M^x\,;\ K_M^y\,;\ K_M^{xy}\,;\ K_R^x\,;\ K_R^y, \tag{3.12}$$

corespunzători grupărilor respective M sau P.

Determinarea acestor coeficienţi K^M sau K^P se face prin suprapunerea efectelor, respectiv prin însumarea unor coeficienţi de tipul k^M sau k^P scoşi direct din tabele [17] sau calculaţi pentru cazul particular dat. În ce priveşte deplasările unitare grupate de tipul z_{ji} şi z_{jk} (tabelul 1), ele rezultă direct, prin introducerea în formulele (3.3), (3.4) şi (3.5) (tabelul 2) astfel modificate a încărcărilor-unitare grupate $M = 1$, respectiv $P = 1$.

Compararea suprafeţelor mediane deformate w şi a diagramelor de momente secţionale încovoietoare M_x la plăcile plane încărcate cu *grupări antisimetrice de cupluri de suprafaţă* M — comparare efectuată pentru două cazuri limită, placa plană pătrată (fig. 3.6) placa de lungime infinită (fig. 3.7), — conduce la aceleaşi concluzii privind *caracterul de accident local* al încărcării prin cupluri de suprafaţă cît şi *perfecta analogie de comportare* a celor două categorii de plăci plane studiate. Această ana-

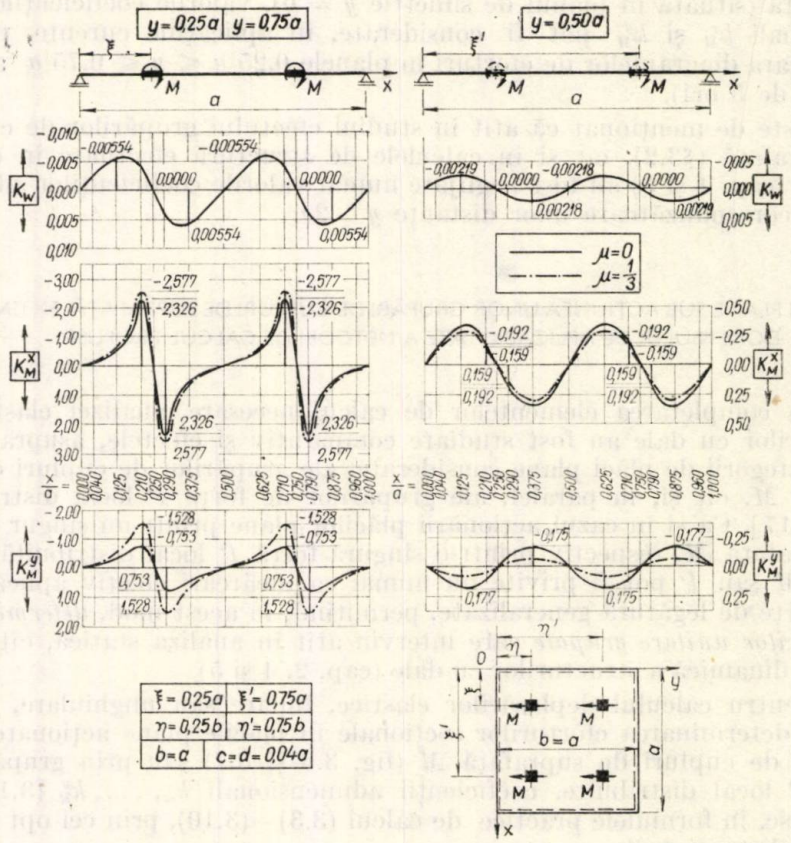


Fig. 3.6. — Placa plană pătrată. Grupare de patru cupluri M antisimetrice la sfertul deschiderii ($\xi = 0{,}25\ a$); $\xi' = 0{,}75\ a$; $\eta = 0{,}25\ b$; $\eta' = 0{,}75\ b$). Suprafața mediană deformată w și diagramele de momente secționale încovoietoare M_x și M_y, trasate pentru două valori limită ale coeficientului lui Poisson $\left(0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3}\right)$.

logie este pusă aici în evidență prin gruparea în șir dublu de cupluri M antisimetrice la sfertul deschiderii ($\xi = 0{,}25\ a$; $\xi' = 0{,}75\ a$).

Aplicabilitatea metodei propuse pentru analiza elastică a structurilor cu dale, inclusiv în ce privește gruparea parametrilor de calcul, se extinde și la sistemele structurale care prezintă o singură axă de simetrie topologică, geometrică și mecanică (fig. 3.8). În analiza dinamică a acestei categorii de structuri cu dale, inclusiv sub acțiunea seismică, distribuția rigidității stîlpilor, transversal asimetrică, impune însă luarea în considerare a efectelor decurgînd din *dezaxarea centrului de rigiditate* în raport cu centrul maselor, respectiv studiul răspunsului structurii la *efectul de torsiune generală* [6], [28].

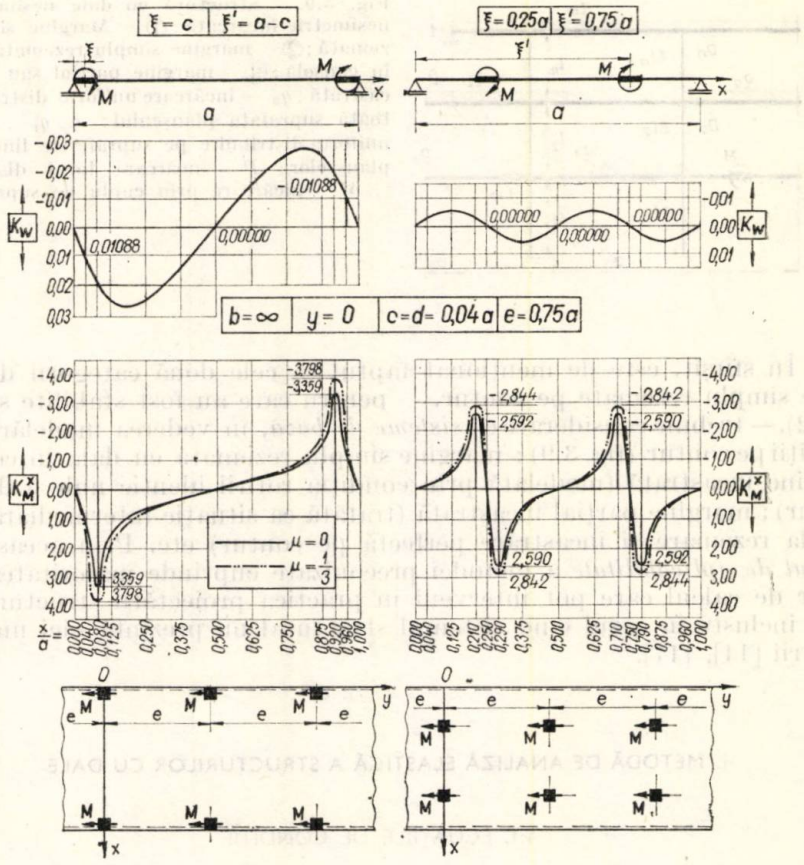


Fig. 3.7. — Placa plană de lungime infinită. Grupare în şir dublu de cupluri M antisimetrice, pe conturul plăcii ($\xi = c$; $\xi' = a - c$) şi la sfertul deschiderii ($\xi = 0{,}25\ a$; $\xi' = 0{,}75\ a$). Suprafaţa mediană deformată w şi diagramele M_x, trasate pentru două valori limită ale coeficientului lui Poisson $\left(0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{3}\right)$

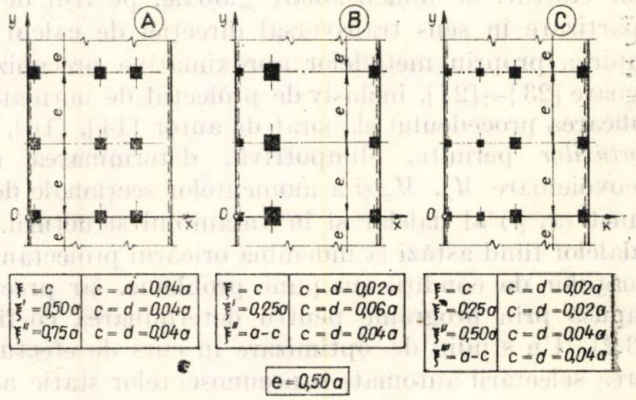


Fig. 3.8. — Scheme simple de structuri cu dale transversal asimetrice.

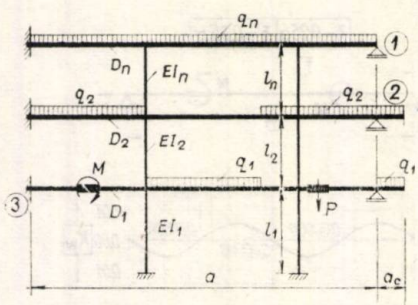


Fig. 3.9. — Structură cu dale nesimetrică și nesimetric încărcată : ① — Margine simplu rezemată ; ② — margine simplu rezemată cu dala în consolă ; ③ — margine parțial sau total încastrată ; q_n — încărcare uniform distribuită pe toată suprafața planșeului ; q_2, q_1 — încărcări uniform distribuite pe suprafețele limitate ale planșeelor ; P — încărcare local distribuită ; M — încărcare prin cuplu de suprafață.

În sfîrșit, este de menționat faptul că cele două categorii de plăci plane simplu rezemate pe contur, — pentru care au fost stabilite soluțiile w (3.2), — trebuie considerate ca *sisteme de bază*, în vederea modelării altor condiții pe contur (fig. 3.9) : margine simplu rezemată cu dala în consolă ; margine încastrată (modelată prin condiția rotirii identic nule a dalei pe contur) ; margine parțial încastrată (tratată ca situație intermediară, între simpla rezemare și încastrare perfectă pe contur) etc. Prin aceasta, *domeniul de aplicabilitate* a metodei preconizate cuprinde majoritatea schemelor de calcul care pot interveni în practica proiectării structurilor cu dale, inclusiv în cazul cînd sistemul structural nu prezintă nici un fel de simetrii [14], [17].

4. METODĂ DE ANALIZĂ ELASTICĂ A STRUCTURILOR CU DALE

4.1. ECUAȚIILE DE CONDIȚIE

Structurile cu dale ca *sisteme multiplu static nedeterminate* pot fi tratate, în principiu, prin oricare din metodele generale, de utilizare curentă în analiza statică a structurilor reticulare. *Metoda generală a deplasărilor* conduce însă, cel puțin în stadiul actual al cercetării [17], la evaluarea unor eforturi de dimensionare globale, pe fîșii de dală, eforturi a căror repartizare în sens transversal direcției de calcul își menține caracterul empiric, propriu metodelor aproximative preconizate de prescripțiile în vigoare [23]—[27], inclusiv de proiectul de normativ românesc [29]. Prin aplicarea procedeului elaborat de autor [14], [16], [17], *metoda generală a eforturilor* permite, dimpotrivă, determinarea momentelor secționale încovoietoare M_x, M_y și a momentelor secționale de torsiune M_{xy} în orice punct (x, y) al dalelor și în ansamblul structurii. Prelucrarea automată a dalelor fiind astăzi la îndemîna oricărui proiectant, rezolvarea sistemului ecuațiilor de condiție nu pune probleme, iar precizia calculelor este cea impusă prin programe pentru determinarea coeficienților adimensionali (§3.2). Un studiu de optimizare în curs de efectuare urmărește introducerea selectării automate a necunoscutelor static nedeterminate, respectiv

automatizarea integrală a metodei generale a eforturilor în analiza elastică a structurilor cu dale [30].

Metoda de calcul propusă pentru analiza statică a structurilor cu dale este riguroasă în limitele determinate de *ipotezele fundamentale ale teoriei plăcilor plane și ale staticii construcțiilor*. Drept *condiții pe contur* s-au admis, la cele două categorii de plăci plane studiate, placa plană dreptunghiulară ($a \leqslant b \leqslant 3a$) și placa de lungime infinită ($b = \infty$), condițiile ce modelează *simpla rezemare*. Fiind considerate ca sisteme de bază, aceste două categorii de plăci plane permit modelarea altor condiții de contur și, prin aceasta, extinderea domeniului de aplicabilitate a metodei (§3.2) (vezi și [31]).

Legătura dintre dalele și stîlpii structurii se consideră rigidă (variantele V_1 și V_2). Pentru antedimensionări se poate admite o simplificare a calculelor, renunțîndu-se la scrierea condițiilor de rotire relativă nulă în nodurile stîlp-dală, sistemul ecuațiilor de continuitate reducîndu-se la ecuații de forma (§3.1.1)

$$w_{s,a} = 0,$$

sistem la care se recurge în toate studiile cunoscute cu excepția lucrării lui Pfaffinger [18]. Acestei metode simplificate de calcul, numită în cele ce urmează *varianta aproximativă* (V_0), îi poate corespunde, dealtfel, o schemă statică reală însă rareori întîlnită în practica proiectării: dala planșeelor rezemată pe *stîlpi de rigiditate neglijabilă* sau avînd *nodul stîlp-dală echivalent cu o articulație*.

Încărcările gravitaționale (transversale) sînt de tipul q (N/m²), P (N) sau M (Nm) acționînd direct asupra dalelor structurii (§3.1). Încărcarea q, uniform distribuite, poate fi introdusă în calcule pe fîșii alternative sau în șah. Este posibilă, de asemenea, luarea în considerare a unor încărcări liniar distribuite de tip $\bar{q}$ (N/m) sau $\bar{P}$ (N/m). *Încărcările orizontale* de tip S (N) se aplică, ca și în cazul structurilor reticulare, la nivelul fiecărui planșeu (fig. 4.1).

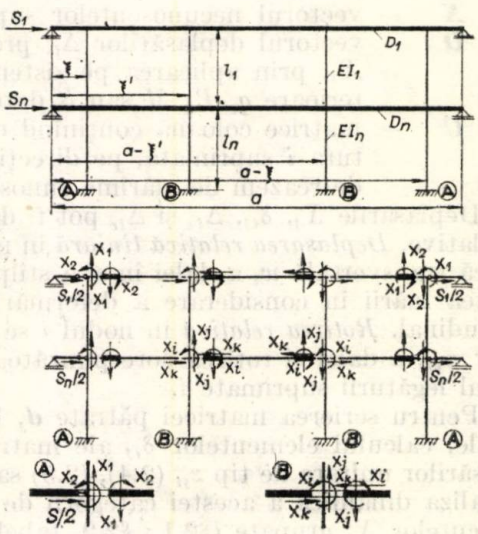


Fig. 4.1. — Structură cu dale simetrică, încărcată antisimetric. Sistemul de bază în metoda generală a eforturilor.

Forțele de legătură generalizate, inclusiv forțele de legătură grupate, sînt fie cupluri de suprafață M, fie forțe P local distribuite pe suprafața de contact $(2c \cdot 2d)$ dintre stîlpi și dale (§3.1), respectiv grupări de cupluri M sau grupări de forțe P (§3.2).

Alegerea sistemului de bază, la aplicarea metodei de calcul preconizate, este determinată de necesitatea suprimării tuturor legăturilor dintre dale și stîlpii structurii. Prin aceasta, toate dalele planșeelor se reduc la una din schemele de plăci plane rezemate pe contur, studiate anterior (cap. 3). Forțele de legătură, forțe de tip X_k, cuprinse în planul median al dalelor, reacțiuni specifice structurilor cu dale sub acțiunea unui sistem de forțe orizontale S (fig. 4.1), nu intervin direct în calculul deplasărilor transversale w și al rotirilor φ_x și φ_y. Rezultă că, după suprimarea legăturilor, pentru evaluarea deplasărilor unitare, dalele structurii apar ca fiind acționate exclusiv de cele trei tipuri de încărcări q, P și M, ale căror efecte sînt exprimate sub forma unor algoritmi pentru care există programe de calcul [14], [16], [17], [31].

★

Sistemul de bază, sub acțiunea încărcărilor exterioare efectiv aplicate q, P, M sau S și a forțelor de legătură de tip X_i, X_k sau X_j, corespunzătoare legăturilor suprimate, trebuind să aibă o comportare identică cu aceea a structurii inițiale (fig. 4.1), ecuațiile de continuitate exprimă n condiții de deplasare relativă nulă pe direcția fiecăreia din cele n necunoscute suplimentare X_i

$$\boldsymbol{dX} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{C} = 0, \tag{4.1}$$

unde

- $\boldsymbol{d}$ reprezintă matricea pătrată a deplasărilor unitare δ_{ij} pe direcția necunoscutei X_i, sub acțiunea încărcării-unitate $X_j = 1$ (forță local distribuită sau cuplu de suprafață) aplicată succesiv pe sistemul de bază ($i = 1, 2, \ldots n$; $j = 1, 2, \ldots \ldots n$);
- $\boldsymbol{X}$ — vectorul necunoscutelor suplimentare X_j;
- $\boldsymbol{D}$ — vectorul deplasărilor Δ_{is} produse pe direcția necunoscutei X_i, prin aplicarea pe sistemul de bază a încărcărilor exterioare q, P, M sau S date;
- $\boldsymbol{C}$ — matrice coloană conținînd deplasările Δ_{ic} produse în legătura i suprimată, pe direcția necunoscutei X_i, prin cedări de reazem de mărime cunoscută.

Deplasările X_j, δ_{ij}, Δ_{is} și Δ_{ic} pot fi deplasări relative liniare sau rotiri relative. *Deplasarea relativă liniară* în nodul i este egală cu deplasarea elastică transversală w_i a dalei în axa stîlpului i. Există, evident, și posibilitatea luării în considerare a deformării elastice a stîlpului i în sens longitudinal. *Rotirea relativă* în nodul i se obține sumînd rotirea φ_{xi}, respectiv φ_{yi}, a dalei și rotirea corespunzătoare φ_{sti} a capătului stîlpului în dreptul legăturii suprimate i.

Pentru scrierea matricei pătrate $\boldsymbol{d}$, la analiza statică a structurilor cu dale, calculul elementelor δ_{ij} ale matricei se face similar cu calculul deplasărilor unitare de tip z_{ji} (2.4), (2.5) sau z_{jk} (2.4′), (2.5′) care intervin în analiza dinamică a acestei categorii de structuri, inclusiv în cazul necunoscutelor X_i grupate (§2.1 ; §2.2, tabelul 1 ; §3.1, tabelul 2).

Pentru scrierea vectorului $\boldsymbol{D}$ al deplasărilor Δ_{is} se vor utiliza aceleași formule practice de calcul în care intervin coeficienții adimensionali $k_w, \ldots, k_R^y$ (3.11), respectiv $K_w, \ldots, K_R^y$ (3.12), în cazul grupării necunoscutelor X_i (cap. 3). De exemplu, la încărcarea q uniform distribuită pe întreaga suprafață a dalelor, Δ_{is} reprezintă rotirea

$$\Delta_{is} = \frac{qa^3}{D} k_\varphi^{xq}, \quad \text{dacă } X_i \text{ este o forță de legătură-cuplu de suprafață.}$$

În cazul unei grupări de încărcări P local distribuite, Δ_{is} rezultă o deplasare liniară grupată

$$\Delta_{is} = \frac{Pa^2}{D} K_w^P, \quad \text{dacă } X_i \text{ este o necunoscută-forță.}$$

În mod similar, M reprezentînd o grupare de cupluri efectiv aplicate, Δ_{is} rezultă o rotire grupată dată de

$$\Delta_{is} = \frac{M}{D} K_\varphi^{xM}, \quad \text{dacă } X_i \text{ este o grupare de reacțiuni-cupluri de suprafață.}$$

Deplasările Δ_{ic}, care constituie elementele matricei coloană $\boldsymbol{C}$, sînt deplasări relative între dale și stîlpi provocate de cedări de reazem de mărime cunoscută. La sisteme de bază care permit gruparea forțelor de legătură, deplasarea Δ_{ic} este fie o deplasare liniară grupată fie o rotire grupată.

★

Forțele de legătură X_i odată determinate pentru schema de încărcare dată, valorile deplasărilor elastice liniare w și unghiulare φ_x, φ_y, cît și valorile momentelor secționale M_x, M_y și M_{xy}, pe sistemul inițial, static nedeterminat, se calculează, în orice punct (x, y) al dalelor structurii, prin suprapunerea efectelor. Dacă, de exemplu, X_i este o necunoscută-cuplu grupată, X_j o grupare de reacțiuni-forță, M un cuplu de suprafață efectiv aplicat și P o grupare de încărcări-forțe local distribuite,

$$w(x, y) = \frac{X_i a}{D} K_w^M + \frac{X_j a^2}{D} K_w^P + \frac{Ma}{D} k_w^M + \frac{Pa^2}{D} K_w^P, \tag{4.2}$$

$$M_x(x, y) = \frac{X_i}{a} K_M^{xM} + X_j K_M^{xP} + \frac{M}{a} k_M^{xM} + P K_M^{xP} \text{ etc.} \tag{4.3}$$

Expresii de forma (4.2) intervin și la calculul deplasărilor unitare z_{ji} sau z_{jk}, în analiza dinamică a structurilor cu dale ca sisteme structurale static nedeterminate, valorile M sau P fiind înlocuite, inclusiv la calculul deplasărilor elastice Δ_{is}, prin încărcările-unitate $M = 1$, respectiv $P = 1$ (cap. 2).

4.2. INFLUENȚA RIGIDITĂȚII RELATIVE STÎLP-DALĂ ASUPRA VALORII DEPLASĂRILOR ELASTICE ȘI A EFORTURILOR SECȚIONALE ÎN PLANȘEELE ȘI ÎN STÎLPII STRUCTURILOR CU DALE

Prin studiile comparative efectuate [9], [11], [12], [13], [14], [16], [17], s-a putut demonstra :

— simplitatea și eficiența metodei de calcul preconizate ;

— modelarea corectă a fenomenului fizic real ;

— posibilitatea reprezentării riguroase a distribuției deplasărilor elastice și a eforturilor secționale în dale și în ansamblul structurii ;

— influența, asupra valorii acestora, a diverșilor parametri care intervin în ecuația suprafeței mediane deformate a plăcilor plane $w(x, y)$ (3.2) ;

— efectele favorabile ce se obțin, în sensul reducerii valorii deplasărilor liniare și unghiulare și, implicit, a valorii momentelor secționale, prin introducerea în calcule a rigidității stîlpilor, respectiv a restricțiilor suplimentare în rotiri.

Simplitatea schemei de calcul adoptată pentru efectuarea ansamblului de studii comparative, atît în analiza statică, cît și în analiza dinamică a structurilor cu dale (fig. 4.2), permite o prezentare completă și sugestivă a tuturor acestor aspecte calitative și cantitative. Totodată, întrucît tipul de structură ales *nu se încadrează în limitele de aplicabilitate ale metodelor aproximative de calcul* [23]—[27] și [29], rezultă implicit că valabilitatea metodei riguroase elaborate se extinde și în afara acestor limite. Dimensiunea b a dalei în sensul axei Oy acoperă întregul interval $a \leqslant b \leqslant \infty$.

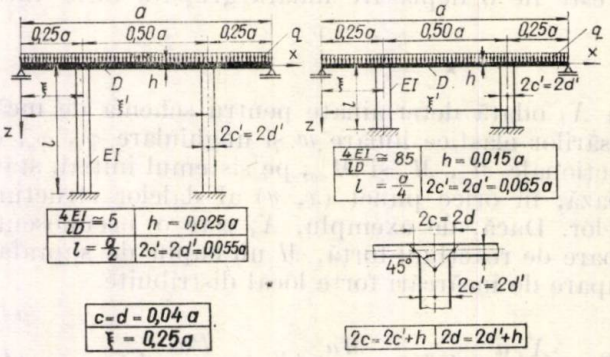


Fig. 4.2. — Schema structurilor cu dale studiate comparativ. Valorile limită ale rigidității relative stîlp-dală : $5 \leqslant (4EI/lD) \leqslant 85$.

Pentru a pune clar în evidență *efectul legăturii rigide dintre dală și stîlpii structurii*, toate calculele numerice au fost efectuate pentru valori ale rigidității relative stîlp-dală cuprinse într-un interval

$$10 \leqslant \frac{4\,EI}{lD} \leqslant 80, \tag{4.4}$$

atît de larg încît cuprinde întreaga gamă a cazurilor care pot fi întîlnite în practica proiectării (fig. 4.3—4.6 și cap. 5). În plus, la calculul structurilor cu dale acționate prin încărcări transversale de tip q, P sau M,

studiile comparative au fost completate cu varianta aproximativă (V_0) (fig. 4.3—4.4 și cap. 5)

$$\frac{4\,EI}{lD} = 0. \tag{4.5}$$

4.2.1. Încărcări acționînd în sens transversal dalelor

La calculul static, prin metoda generală a eforturilor, al unei structuri cu dale simetrică și simetric (sau antisimetric) încărcată, avînd un singur nivel și două șiruri de stîlpi interiori echidistanți în sensul axei Oy (fig. 4.2), sistemul de ecuații (4.1) se reduce la numai *trei ecuații de continuitate* : o ecuație în deplasări liniare w grupate, pe direcția axei Oz, și două ecuații în rotiri φ_x și φ_y grupate, scrise pe cele două direcții ale planului median xOy al dalei.

Pentru *încărcarea de tip q*, spre exemplu, utilizînd notațiile introduse prin formulele (3.3), (3.4) și (3.5), ecuațiile de condiție (4.1) devin (fig. 4.4 — varianta V_2) :

$$X_1 \frac{a^2}{D} K_w^P + X_2 \frac{a}{D} K_w^M + X_3 \frac{a}{D} K_w^M + \frac{qa^4}{D} k_w^q = 0, \tag{4.6}$$

$$X_1 \frac{a}{D} K_\varphi^{xP} + X_2 \left(\frac{1}{D} K_\varphi^{xM} + \frac{l}{4\,EI_x} \right) + X_3 \frac{1}{D} K_\varphi^{xyM} + \frac{qa^3}{D} k_\varphi^{xq} = 0, \tag{4.7}$$

$$X_1 \frac{a}{D} K_\varphi^{yP} + X_2 \frac{1}{D} K_\varphi^{yxM} + X_3 \left(\frac{1}{D} K_\varphi^{yM} + \frac{l}{4\,EI_y} \right) + \frac{qa^3}{D} k_\varphi^{yq} = 0. \tag{4.8}$$

Expresiile rotirilor grupate ale capetelor stîlpilor de lungime l, produse de gruparea forțelor de legătură-cupluri X_2 (pe direcția Ox) și respectiv X_3 (pe direcția Oy),

$$\varphi_{st}^x = \frac{X_2 l}{4\,EI_x} \text{ (rad)}; \qquad \varphi_{st}^y = \frac{X_3 l}{4\,EI_y} \text{ (rad)}, \tag{4.9}$$

sînt valabile pentru *nodurile nedeplasabile*, cînd capătul opus al stîlpului este încastrat (structuri simetrice, simetric încărcate).

În scopul simplificării calculelor numerice, și fără ca efectul legăturilor rigide stîlp-dală să fie neglijat, condiția de *rotire relativă nulă* în nodul stîlp-dală a fost scrisă, în varianta V_1, exclusiv pe direcția reacțiunii-cuplu X_2 grupată (4.7). Admițînd deci forța de legătură-cuplu $X_3 = 0$, sistemul de trei ecuații (4.6)—(4.8) se reduce la un sistem de două ecuații de condiție

$$X_1 aK_w^P + X_2 K_w^M + qa^3 k_w^q = 0, \tag{4.6'}$$

$$X_1 aK_\varphi^{xP} + X_2 (K_\varphi^{xM} + K_\varphi^{st}) + qa^3 k_\varphi^{xq} = 0, \tag{4.7'}$$

unde

$$K_{\varphi}^{st} = \frac{lD}{4\,EI}$$

exprimă o flexibilitate relativă la nivelul nodului dală-stîlp, iar

$$\frac{1}{K_{\varphi}^{st}} \varkappa \frac{4\,EI}{lD} \tag{4.10}$$

reprezintă factorul adimensional definind *rigiditatea relativă stîlp-dală*.

Calculele numerice comparative, efectuate aici considerînd trei scheme-limită pentru dala planșeului:

A — placa plană pătrată ($b = a$);

B — placa de lungime infinită ($b = \infty$; $e = 0{,}50\ a$);

C — placa de lungime infinită ($b = \infty$; $e = 0{,}75\ a$),

pun în evidență *influența determinantă a factorului de rigiditate relativă* stîlp-dală asupra valorii necunoscutei-cuplu X_2 grupată: în intervalul considerat pentru creșterea rigidității relative (4.4), valorile X_2 cresc cu 56% — 61%. În ce privește reacțiunea-forță X_1 grupată, apare clar reducerea valorică ce se obține în variantele A_1, B_1 și C_1, în care s-a ținut seama de restricția în rotiri (4.7′) (varianta V_1), în raport cu variantele aproximative A_0, B_0 și C_0, calculate prin scrierea exclusiv a condiției de *deplasare transversală nulă* în axa stîlpilor (varianta V_0):

$$X_0 \frac{a^2}{D} K_w^P + \frac{qa^4}{D} k_w^q = 0, \tag{4.11}$$

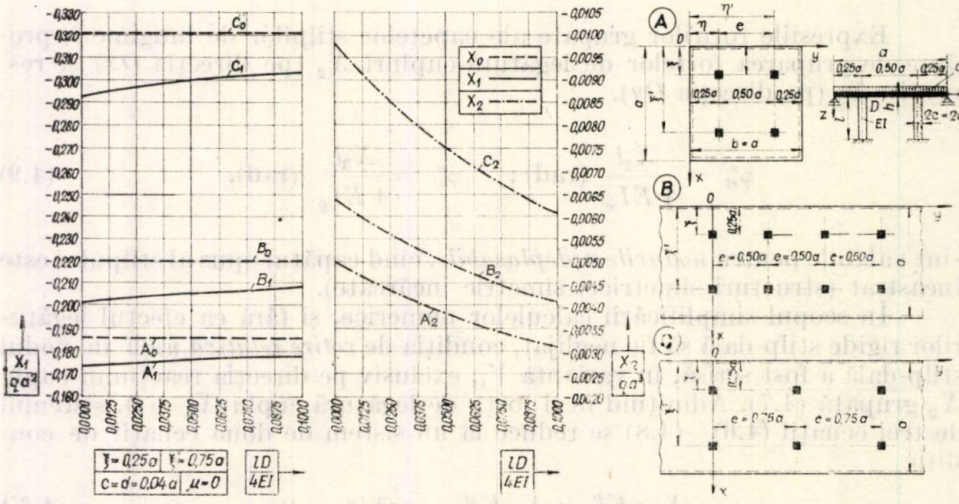


Fig. 4.3. — Structuri cu dale sub acțiunea încărcării gravitaționale q uniform distribuită. Influența rigidității relative dală-stîlp și a parametrului b/a asupra valorii necunoscutelor grupate X_1 (reacțiunea-forță) și X_2 (reacțiunea-cuplu) în nodurile stîlp-dală (variantele V_1 și V_0).

unde

X_0 — gruparea de forțe de legătură-forțe în varianta aproximativă V_0. Cele două scheme B și C ale plăcii de lungime infinită studiate ilustrează și importanta influență a parametrului e definind *echidistanța dintre stîlpi* în sensul axei Oy, asupra valorii necunoscutelor grupate $X_1 (X_0)$ și X_2, care cresc cu 45%—52% în intervalul $0{,}50\ a \leqslant e \leqslant 0{,}75a$ (fig. 4.3).

În varianta V_2 (fig. 4.4), în care se scrie și cea de-a doua restricție în rotiri (4.8), reducerea valorii reacțiunii-forță X_1 grupată, în raport cu

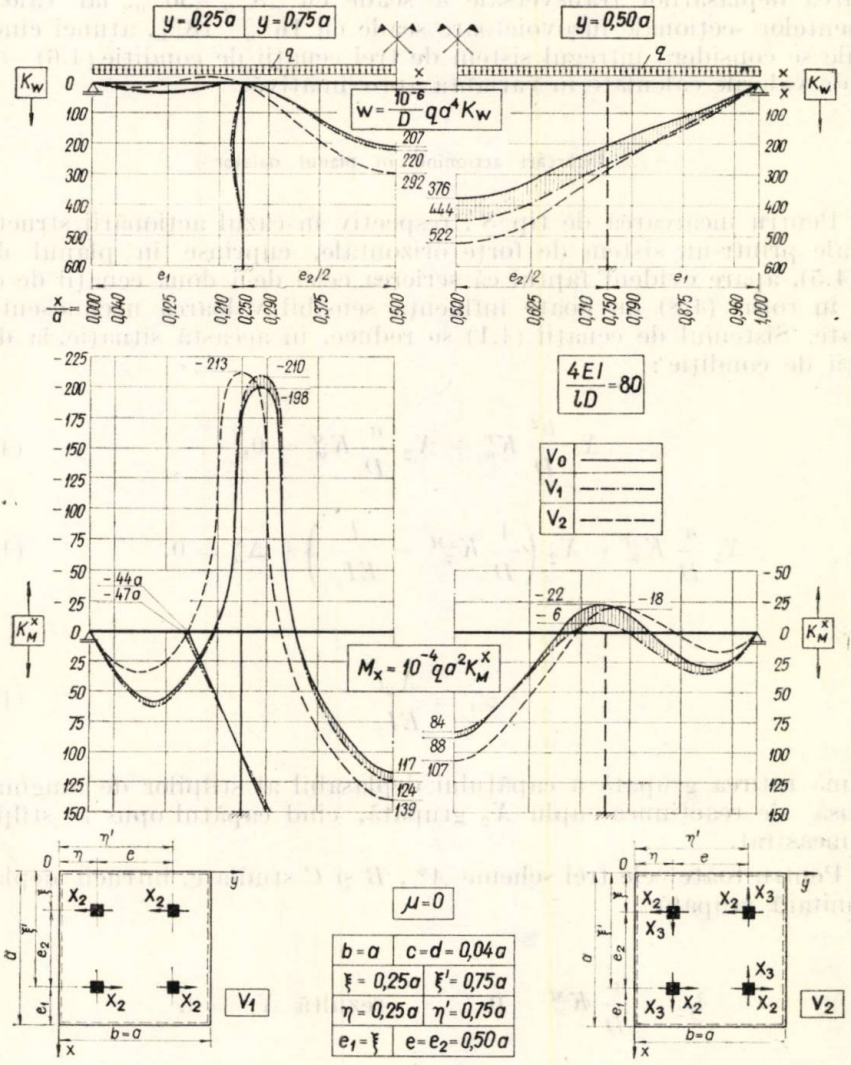


Fig. 4.4. — Structuri cu dale sub acțiunea încărcării gravitaționale q uniform distribuită. Suprafața mediană deformată w și diagrama de momente secționale M_x în axa stîlpilor (planul $y = 0{,}25\ a$) și în axa panoului central (planul $y = 0{,}50\ a$). Influența condiției suplimentare în rotiri (variantele V_2, V_1 și V_0).

varianta aproximativă V_0, este de 14% pentru cazul stîlpilor foarte rigizi ($4\,EI/lD = 80$). Valoarea forțelor de legătură-cupluri $X_2 = X_3$, calculate considerînd ambele ecuații de continuitate în rotiri (4.7) și (4.8), este redusă cu 7% în raport cu valoarea X_2, calculată în varianta V_1 (o singură restricție în rotiri).

Compararea variantelor V_2 și V_0 demonstrează *eficiența metodei riguroase* de analiză statică propusă de autor atît în ce privește *deplasările elastice* cît și *eforturile secționale* în dala planșeului (fig. 4.4). Astfel, pentru aceeași valoare-limită (80) a factorului de rigiditate relativă stîlp-dală, valoarea deplasărilor transversale w scade cu 28%—30%, iar valoarea momentelor secționale încovoietoare scade cu 16%—18%, atunci cînd în calcule se consideră întregul sistem de trei ecuații de condiție (4.6)—(4.8) față de valorile calculate în varianta aproximativă.

4.2.2. Încărcări acționînd în planul dalelor

Pentru încărcarea de tip S, respectiv în cazul acționării structurii cu dale printr-un sistem de forțe orizontale, cuprinse în planul dalei (fig. 4.5), apare evident faptul că scrierea celei de-a doua ecuații de condiție în rotiri (4.8) nu poate influența sensibil valoarea necunoscutelor grupate. Sistemul de ecuații (4.1) se reduce, în această situație, la două ecuații de condiție:

$$X_1 \frac{a^2}{D} K_w^P + X_2 \frac{a}{D} K_w^M = 0, \tag{4.12}$$

$$X_1 \frac{a}{D} K_\varphi^{xP} + X_2 \left(\frac{1}{D} K_\varphi^{xM} + \frac{l}{EI_x} \right) + \Delta_{2s}^S = 0, \tag{4.13}$$

unde

$$\varphi_{sl}^x = \frac{X_2 l}{EI_x} \tag{4.14}$$

exprimă rotirea grupată a capătului deplasabil al stîlpilor de lungime l, produsă de reacțiunea-cuplu X_2 grupată, cînd capătul opus al stîlpilor este încastrat.

Pentru toate cele trei scheme A*), B și C studiate, întrucît deplasarea unitară grupată

$$\delta_{12} = \frac{a}{D} K_w^M = 0, \qquad \text{rezultă } X_1 = 0.$$

*) În schema plăcii pătrate ($b = a$) se admite ipoteza unei translații libere pe orizontală în sensul axei Ox (sensul forțelor S), similară cu translația liberă a plăcii de lungime infinită, în același sens.

Introducînd în ecuaţia (4.13)

$$\Delta_{2s}^{S} = -\frac{S\,l^2}{4\,EI},$$

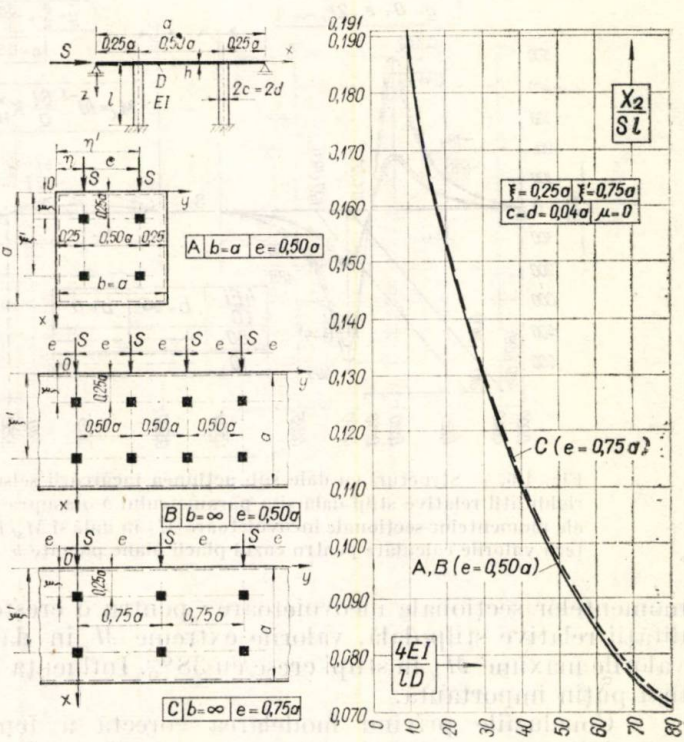


Fig. 4.5. — Structuri cu dale sub acţiunea încărcării seismice S. Influenţa rigidităţii relative stîlp-dală şi a echidistanţei e dintre stîlpi asupra valorii necunoscutei grupate X_2 (reacţiunea-cuplu) în nodurile stîlp-dală.

se obţine expresia forţei de legătură-cuplu X_2 grupată, utilizată în calculele numerice comparative efectuate :

$$X_2 = \frac{1}{4 + \dfrac{K_{\varphi}^{\alpha M}}{K_{\varphi}^{st}}}\,Sl. \tag{4.15}$$

Factorul $1/K_{\varphi}^{st}$ (4.10) are aceeaşi semnificaţie ca şi în cazul încărcărilor gravitaţionale (§ 4.2.1).

Fiind menţinute intervalele de variaţie ale parametrilor de calcul $4EI/lD$, b/a şi e/a cît şi cele trei variante ale schemei de calcul adoptate în analiza statică a structurii cu dale sub acţiunea încărcării de tip q, studiul comparativ efectuat în cazul încărcării de tip S conduce la aceleaşi concluzii privind *puternica influenţă a rigidităţii relative stîlp-dală* asupra valorii necunoscutei-cuplu X_2 grupată (fig. 4.5). În schimb, influenţa parametrilor b/a şi e/a apare aici ca neglijabilă.

Diagrama momentelor secționale încovoietoare M_x în dală și M_{st} în stîlpii structurii studiate, trasată pentru variantele $A(b = a)$ și $B(b = \infty)$ și menținînd neschimbată echidistanța dintre stîlpi $e = 0{,}50\ a$ (fig. 4.6), ilustrează clar influența parametrului $4EI/lD$ asupra valorilor extreme ale

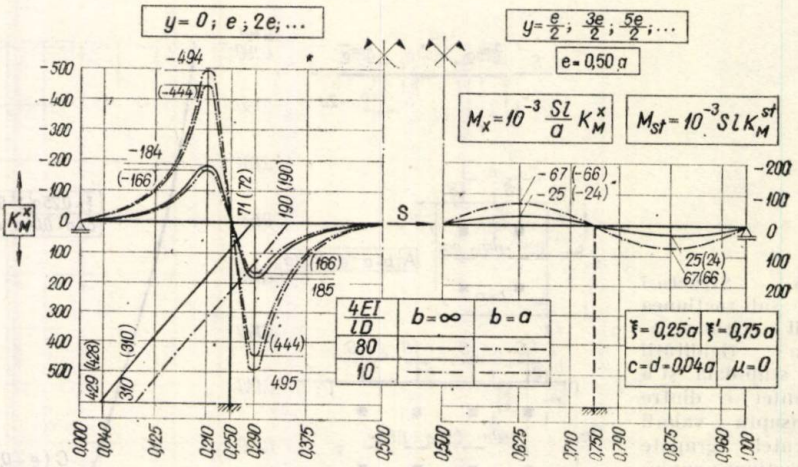


Fig. 4.6. — Structuri cu dale sub acțiunea încărcării seismice S. Influența rigidității relative stîlp-dală și a parametrului b/a asupra valorilor extreme ale momentelor secționale încovoietoare M_x în dală și M_{st} în stîlpi (în paranteză valorile calculate pentru cazul plăcii plane pătrate $b = a$).

momentelor secționale încovoietoare : pentru o creștere de opt ori a rigidității relative stîlp-dală, valorile extreme M_x în dală scad cu 63%, iar valorile maxime M_{st} în stîlpi cresc cu 38%. Influența parametrului b/a este mai puțin importantă.

Concluziile privind modelarea corectă a fenomenului fizic real, aplicabilitatea practică și eficiența metodei de analiză elastică preconizate, în special în ce privește reducerea valorii eforturilor de dimensionare în dală prin introducerea în calcule a restricțiilor suplimentare în rotiri, sînt astfel demonstrate. În plus, s-a arătat cum modelarea efectului legăturii rigide stîlp-dală face posibilă abordarea calculului static al structurilor cu dale la acțiunea unui sistem de forțe orizontale.

Rezultatele obținute vor fi utilizate în partea treia a lucrării, la efectuarea studiilor comparative privind vibrațiile proprii și vibrațiile forțate ale structurilor formate din bare și plăci.

Primită la redacție la 18 septembrie 1979

BIBLIOGRAFIE. II

30. Al. Gheorghiu, *Concepții moderne în calculul structurilor*. Edit. tehnică, București, 1975.
31. R. Negruțiu, *Plăci plane sub acțiunea unui cuplu de suprafață. Noi modele matematice ale suprafeței mediane deformate*, Bul. știin. Inst. construcții București, **21**, 3—4 (1978).

UN ARC ELICOIDAL CILINDRIC CU RIGIDITATE PROGRESIVĂ CU SARCINA, DESTINAT SUSPENSIEI AUTOMOBILULUI DACIA 1302

I. MODELUL MATEMATIC

de N. TRUICĂ
Institutul de fizică și tehnologia materialelor București

M. MITRACHE
Centrul de cercetări științifice și inginerie tehnologică pentru autoturisme Pitești

În cadrul Centrului de cercetări științifice și inginerie tehnologică pentru autoturisme Pitești, în colaborare cu Institutul de fizică și tehnologia materialelor București, cu concursul Combinatului metalurgic Cîmpia Turzii și al Intreprinderii de piese auto Sibiu, s-au realizat arcuri elicoidale cilindrice cu pas variabil, a căror rigiditate este progresivă cu sarcina, destinate suspensiei spate a automobilului Dacia 1302. Condiția de a utiliza arcuri elicoidale cilindrice a fost impusă atît de construcția mașinii, cît și de considerente tehnologice relative la realizarea arcurilor și a elementelor lor de prindere pe mașină.
În partea întîia a acestui articol se prezintă modelul matematic al arcului elicoidal cilindric cu rigiditate progresivă cu sarcina, confecționat din sîrmă cu secțiunea constantă. Partea a doua va cuprinde rezultatele experimentale obținute în această lucrare.

§ 1. INTRODUCERE

§ 1.1. DEFINIȚII, NOTAȚII

Considerăm arcul confecționat din sîrmă cu secțiunea circulară constantă. Fie d diametrul sîrmei, D diametrul cilindrului pe care se înfășoară fibra medie a sîrmei arcului, Δ axa cilindrului de diametru D, P un plan perpendicular pe Δ și O punctul în care axa Δ intersectează planul P. Notăm cu A punctul în care elicea fibrei medii a sîrmei intersectează planul P, cu M un punct curent al acestei elici și cu M' proiecția ortogonală a punctului M pe planul P. Coordonatele cilindrice ale punctului M sînt $\theta = \sphericalangle AOM'$ și $h(\theta) = M'M$.

Fie Q planul format de dreptele OA și Δ. Desfășurăm suprafața cilindrului cu diametrul D pe planul Q : segmentului MM' îi corespunde în planul Q segmentul NN'. Coordonatele carteziene ale punctului N sînt $x = AN' = \pi D\xi$, în care $\xi = \dfrac{\theta}{2\pi}$ și $h(\theta) = N'N$. Notăm cu φ unghiul pe care îl face tangenta dusă la desfășurata elicei în punctul N cu axa OA și cu p *pasul elicei corespunzător punctului* N :

$$p = \pi D \operatorname{tg}\varphi = \pi D \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\xi}. \tag{1.1}$$

Unghiul φ poate fi definit și ca unghiul format de tangenta dusă la elice în punctul M cu planul P.

Numim *spiră a arcului* porțiunea din elice corespunzătoare unei variații a unghiului θ egale cu 2π. Numim *pasul spirei* variația lui h corespunzătoare spirei respective : $h(\xi) - h(\xi - 1)$. Numim *pasul interior al spirei* diferența dintre pasul spirei și diametrul sîrmei :

$$q = h(\xi) - h(\xi - 1) - d, \quad \xi \in [0, n). \tag{1.2}$$

Intervalul $[0, n]$ corespunde *spirelor active* ale arcului. Intervalele $[-\xi_0, 0]$ și $[n, n + \xi_0]$ corespund spirelor de capăt ale arcului, numite *spira de sprijin*, respectiv *spira plană*. În timpul solicitării arcului, spirele de capăt nu se deformează ; în acest scop, ele se așează la montare în piesele numite *talerele arcului*. Spirele de capăt și talerele arcului reprezintă elementele de legătură dintre arc și dispozitivul în care funcționează arcul. În mod curent ξ_0 are valoarea 3/4.

Considerăm că arcul este solicitat numai de forțe al căror suport este axa Δ. Greutatea arcului se neglijează. Spunem că *un arc se află în stare liberă* cînd forța axială care îl solicită este nulă.

În cele ce urmează, vom nota cu indicele zero mărimile care definesc geometria arcului în stare liberă, valoarea maximă a forței axiale, corespunzătoare comprimării arcului spiră pe spiră, valoarea maximă a săgeții arcului. Absența indicelui zero exprimă faptul că mărimea respectivă se referă la arcul aflat sub sarcină parțială.

§1.2. ARCUL CU PAS CONSTANT

Ecuația elicei arcului cu pasul p_0 constant are expresia

$$h_0(\xi) = p_0 \xi, \quad \xi \in [0, n]. \tag{1.3}$$

Notăm cu F forța care solicită arcul după axa Δ și cu f deformația corespunzătoare a arcului în lungul axei Δ (săgeata arcului). Între f și F există relația cunoscută

([1], p. 522, [2], p. 184) :

$$f = \frac{8D^3 n}{G d^4} F, \tag{1.4}$$

în care G reprezintă modulul de elasticitate transversal al materialului din care este confecționat arcul ; d, D și n au semnificațiile din paragraful anterior.

Rigiditatea arcului se definește ca derivata forței axiale în raport cu săgeata :

$$c = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}f}. \tag{1.5}$$

În cazul arcului cu pas constant rigiditatea este constantă :

$$c_0 = \frac{F}{f} = \frac{A}{n}, \tag{1.6}$$

unde $A = \frac{Gd^4}{8D^3}$ reprezintă *rigiditatea unei singure spire.*

Rigiditatea A este o constantă pentru un arc cilindric caracterizat prin mărimile d, D și G (vezi [1], p. 538).

Scriem ultima relație sub forma

$$F = A\,\delta, \tag{1.7}$$

în care $\delta = \frac{f}{n}$ reprezintă *săgeata unei singure spire.* Relația (1.7) exprimă *proprietatea 1* a arcului elicoidal cilindric cu pasul elicei constant, confecționat din sîrmă cu secțiunea constantă, solicitat în domeniul elastic de comportare a materialului din care a fost făcută sîrma : *forța axială care solicită arcul este proporțională cu săgeata unei singure spire, constanta de proporționalitate fiind rigiditatea arcului corespunzătoare unei singure spire active. Săgeata unei spire este aceeași pentru toate spirele active ale arcului.*

La comprimarea arcului spiră pe spiră săgeata spirei δ atinge valoarea maximă δ_0. Din relația (1.7) obținem valorile maxime ale forței axiale și respectiv săgeții arcului :

$$F_0 = A\,\delta_0,\ f_0 = n\,\delta_0. \tag{1.8}$$

Pasul elicei în stare liberă are deci valoarea

$$p_0 = d + \delta_0. \tag{1.9}$$

În timpul solicitării arcului de către forța axială F, pasul elicei este același pentru toate spirele, structura geometrică a elicei nu se modifică :

$$p = p_0 \pm \delta,\ \delta \in [0, \delta_0],$$

$$h(F, \xi) = p\,\xi,\ \xi \in [0, n]. \tag{1.10}$$

Relațiile (1.10) exprimă *proprietatea 2* a arcului elicoidal cilindric cu pasul constant, confecționat din sîrmă cu secțiunea constantă. În relația $(1.10)_1$ semnul $(+)$ se ia cînd arcul este solicitat la întindere ; semnul $(-)$ corespunde comprimării arcului. Observăm că în relația $(1.10)_2$ pentru orice valoare a forței F, $F \in [0, F_0]$, variabila ξ ia toate valorile din intervalul $[0, n]$. Rezultă deci egalitatea :

$$dh(F, \xi) = p\,d\,\xi, \text{ pentru } \delta = \text{constant}. \tag{1.11}$$

Caracteristica arcului cu pas constant, f în funcție de F este un segment de dreaptă, definit de punctele $(0, 0)$ și $(A\delta_0, n\delta_0)$, în planul $F - f$.

Numim *arcuri echivalente* două arcuri elicoidale cilindrice care sînt caracterizate de aceleași mărimi d, D, n, A și δ_0, deosebindu-se între ele prin geometria elicei fibrei medii a sîrmei și, respectiv, prin caracteristicile $f - F$.

Pentru a înlesni compararea caracteristicilor $f - F$ a două arcuri echivalente, graficele respective vor fi reprezentate în coordonatele adimensionale:

$$\varphi = \frac{f}{n\delta_0} \text{ și } \Phi = \frac{F}{A\delta_0}, \quad \varphi, \Phi \in [0, 1]. \tag{1.12}$$

În planul $\Phi - \varphi$, caracteristica $\varphi - \Phi$ a arcului cu pas constant este un segment de dreaptă situat pe prima bisectoare, cuprins între punctele $(0, 0)$ și (1.1). Ținînd seama de notațiile (1.12), obținem din relația (1.7) următoarea expresie pentru săgeata spirei:

$$\delta = \Phi\delta_0, \quad \Phi \in [0, 1]. \tag{1.13}$$

Dacă se neglijează energia cinetică a masei arcului, energia sa potențială de deformație W este egală cu lucrul mecanic exterior al forței axiale care îl solicită. Rezultă:

$$\mathrm{d}W = \mathrm{d}\mathscr{L} = F\,\mathrm{d}f = F_0 f_0 \Phi \mathrm{d}\Phi, \tag{1.14}$$

$$W(\Phi) = \Phi^2 W_0, \quad W_0 = \frac{1}{2} F_0 f_0.$$

Dimensionarea săgeții maxime δ_0. Efortul unitar tangențial corectat care solicită sîrma arcului la comprimarea acestuia cu forța axială F se calculează cu relația ([1], p. 520)

$$\tau = k \frac{8FD}{\pi d^3}, \tag{1.15}$$

în care

$$k = \frac{4C - 1}{4C - 4} + \frac{0{,}615}{C}, \quad C = \frac{D}{d}.$$

La comprimarea arcului spiră pe spiră efortul unitar tangențial corectat ia valoarea maximă

$$\tau_{max} = k \frac{G d}{\pi D^2} \delta_0. \tag{1.16}$$

Întrucît τ_{max} nu trebuie să depășească efortul unitar tangențial admisibil τ_a, din ultima relație obținem

$$\frac{k}{C}\frac{\delta_0}{\pi D} \leqslant \frac{\tau_a}{G}. \tag{1.17}$$

Pentru $G = 78500$ N/mm^2 și $\tau_a = 806$ N/mm^2, obținem din condiția de mai sus următoarea relație de dimensionare a săgeții maxime a spirei δ_0 :

$$\delta_0 \leqslant \frac{C}{31k} D. \tag{1.18}$$

§ 2. ARCUL CU RIGIDITATE VARIABILĂ (RIVARC)

Introducem termenul *rivarc* pentru a numi arcul elicoidal cilindric cu rigiditate variabilă, confecționat din sîrmă cu secțiunea constantă, destinat să lucreze numai sub forțe de comprimare.

Considerăm că rivarcul și arcul cu pas constant studiat în paragraful anterior sînt arcuri echivalente. Mărimile d, D, A și n sînt deci aceleași pentru ambele arcuri. Elicile celor două arcuri în stare liberă se deosebesc prin aceea că în timp ce la arcul cu pas constant pasul interior al spirei este constant și are valoarea δ_0, la rivarc pasul interior al spirei este o funcție continuă convexă în intervalul $[0, \delta_0]$; după atingerea valorii maxime δ_0, pasul interior al spirei rămîne constant; numărul spirelor rivarcului cu pasul constant este zero sau un număr mai mare decît zero.

Elicea rivarcului în stare liberă este descrisă de ecuațiile :

a) *rivarcul simplu*

$$h_0 = h_0(\xi), \quad \xi \in [0, n], \tag{2.1}$$

$$h_0'(\xi) > 0 \text{ și } h_0''(\xi) > 0 \text{ pentru orice } \xi \in [0, n],$$

$$q_0(\xi) = h_0(\xi) - h_0(\xi - 1) - d\,; \; q_0(n) = \delta_0.$$

b) *rivarcul mixt*

$$h_{01} = h_0(\xi), \quad \xi \in [0, m], \; m < n,$$

$$p_0(\xi) = \frac{dh_0(\xi)}{d\xi}, \; p_0(m) = d + \delta_0, \tag{2.2}$$

$$h_{02} = h_0(m) + p_0(m)(\xi - m), \; \xi \in [m, n].$$

Rivarcul simplu are toate spirele active cu pas variabil. La rivarcul mixt numai primele m spire au pas variabil, următoarele $n-m$ spire au pas constant.

Ecuațiile $(2.1)_1$ și $(2.2)_1$ sînt reprezentate în figura 1 prin arcele de curbă AB, respectiv AC. Segmentul de dreaptă CD, definit de ecuația $(2.2)_3$, este tangent la arcul de curbă AC în punctul C (condiția $(2.2)_2$) și este paralel cu segmentul AE, acesta din urmă reprezentînd elicea arcului cu pas constant echivalent (ec. (1.3)).

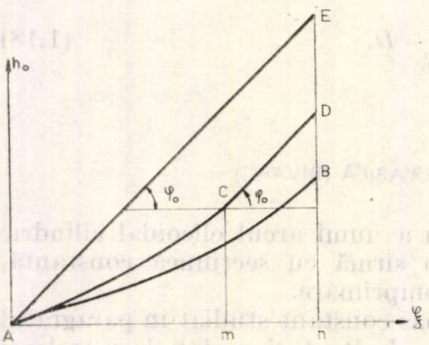


Fig. 1

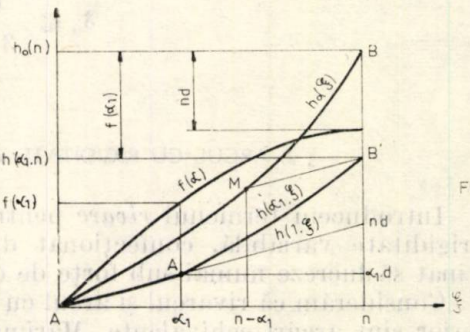


Fig. 2

Pe măsură ce forțele care comprimă rivarcul cresc, o parte din spire sînt scoase din lucru, fibra lor medie formînd o elice cu pasul d. Notăm cu α numărul spirelor scoase din lucru, rivarcul fiind comprimat de forțele axiale F. Săgeata δ a spirei rivarcului are valoare pasului interior al spirei corespunzător punctului elicei $\xi = \alpha$:

$$\delta = q_0(\alpha), \tag{2.3}$$

în care $\alpha \in [0, n]$ la rivarcul simplu, respectiv $\alpha \in [0, m]$ la rivarcul mixt.

Întrucît cele două proprietăți ale arcului cu pas constant nu depind nici de valoarea pasului elicei, condiția (1.18) fiind satisfăcută, și nici de numărul spirelor active, aceste proprietăți caracterizînd comportarea unei singure spire, respectiv un element de spiră oricît de mic vrem, extindem valabilitatea lor și asupra rivarcului, considerîndu-l pe acesta din urmă ca fiind format dintr-o mulțime de elemente de spire cu pasul constant, formulîndu-le astfel:

Ipoteza 1: forțele axiale care comprimă rivarcul sînt proporționale cu săgeata spirei, constanta de proporționalitate fiind rigiditatea unei singure spire:

$$F = Aq_0(\alpha), \tag{2.4}$$

în care $\alpha \in [0, n]$ la rivarcul simplu și $\alpha \in [0, m]$ la rivarcul mixt.

În cazul rivarcului mixt, după scoaterea din lucru a spirelor cu pas variabil, spirele rămase active se comportă în continuare ca un arc cu pas constant obișnuit.

Ipoteza 2: în timpul comprimării rivarcului, geometria celor $n-\alpha$, respectiv $m-\alpha$ spire cu pas variabil rămase active este aceeași cu geometria primelor $n-\alpha$ respectiv $m-\alpha$ spire cu pas variabil ale rivarcului în stare liberă; spirele cu pas constant au același pas tot timpul cît rivarcul este tensionat. Altfel spus, în timpul comprimării rivarcului elicea spirelor active suferă o translație în lungul elicei cu pasul d al spirelor scoase din lucru, translație definită în planul $\xi-h$ de originea $A(0, 0)$ și de extremitatea spirelor scoase din lucru $A'(\alpha, \alpha d)$ (fig. 2).

Justificarea acestor ipoteze se va face confruntînd consecințele teoretice ce decurg pe baza lor, cu datele furnizate de studiul experimental al comportării rivarcului.

Scriem expresiile elicei spirelor rămase active, ținînd seama de ecuațiile (2.1) și (2.2) și de relația (2.3):

a) *rivarcul simplu*

$$h(\alpha, \xi) = \alpha d + h_0(\xi - \alpha), \quad \alpha \in [0, n], \ \xi \in [\alpha, n]. \tag{2.5}$$

b) *rivarcul mixt*

$$h_1(\alpha, \xi) = \alpha d + h_0(\xi - \alpha), \quad \xi \in [\alpha, m],$$

$$h_2(\alpha, \xi) = h_1(\alpha, m) + (p_0(m) - q_0(\alpha))(\xi - m), \quad \xi \in [m, n], \tag{2.6}$$

$$p(\alpha, \xi) = \frac{\mathrm{d}h_0(\xi - \alpha)}{\mathrm{d}\xi}; \quad p(\alpha, m) + q_0(\alpha) = p_0(m),$$

în care $\alpha \in [0, m]$.

Ecuația $(2.6)_3$ exprimă condiția ca în timpul comprimării rivarcului elicea spirelor cu pas constant să rămînă tangentă elicei spirelor cu pas variabil în punctul $\xi = m$.

După scoaterea din lucru a spirelor cu pas variabil, elicea spirelor cu pas constant are expresia

$$h_3(\delta, \xi) = md + (p_0(m) - \delta)(\xi - m), \tag{2.7}$$

$$\delta \in [q_0(m), \delta_0], \ \xi \in [m, n].$$

Cînd ξ parcurge elicea spirelor rămase active, parametrul α este constant. Rezultă că în ecuațiile elicei deformate (2.5), $(2.6)_1$ și $(2.6)_2$ diferențiala $\mathrm{d}\alpha$ este nulă. Analog, în ecuația (2.7) diferențiala $\mathrm{d}\delta$ este nulă.

Cunoscînd expresiile elicei rivarcului în stare liberă și în stare comprimată, calculăm săgeata rivarcului în funcție de parametrul α:

a) *rivarcul simplu*

$$f(\alpha) = h_0(n) - h(\alpha, n), \quad \alpha \in [0, n]. \tag{2.8}$$

b) *rivarcul mixt*

$$f_1(\alpha) = h_{02}(n) - h_2(\alpha, n), \quad \alpha \in [0, m],$$

$$f_2(\delta) = f_1(m) + h_2(m, n) - h_3(\delta, n), \quad \delta \in [q_0(m), \delta_0]. \tag{2.9}$$

Ecuaţiile (2.8) şi (2.9) exprimă faptul că săgeata rivarcului are aceeaşi lege geometrică cu elicea rivarcului în stare liberă.

Rigiditatea rivarcului este dată de expresiile :

a) *rivarcul simplu*

$$c(\alpha) = -\frac{q'(\alpha)}{h'(\alpha, n)} \cdot A, \quad \alpha \in [0, n]. \tag{2.10}$$

b) *rivarcul mixt*

$$c_1(\alpha) = -\frac{q'(\alpha)}{h_2'(\alpha, n)} \cdot A, \quad \alpha \in [0, m], \tag{2.11}$$

$$c_2 = \frac{A}{n - m}, \quad \delta \in [q_0(m), \delta_0].$$

Întrucît săgeata spirei $q_0(\alpha)$ variază continuu în intervalul $[0, \delta_0]$, forţa F variază continuu între zero şi $A\delta_0$, deci rivarcul şi arcul cu pas constant echivalent pot suporta aceeaşi forţă maximă. Deoarece relaţia (1.15) de calcul a efortului unitar tangenţial corectat este valabilă şi pentru spirele active ale rivarcului, rezultă că

a) pentru spirele scoase din lucru

$$\tau = \tau_{max} \frac{q_0(\xi)}{\delta_0}, \quad \xi \in [0, \alpha]. \tag{2.12}_1$$

b) pentru spirele active

$$\tau = \tau_{max} \frac{q_0(\alpha)}{\delta_0} \text{ pentru orice } \xi \in [\alpha, n]. \tag{2.12}_2$$

Relaţiile de mai sus exprimă faptul că efortul unitar tangenţial maxim, care se manifestă într-o secţiune oarecare la comprimarea spiră pe spiră a rivarcului, este porporţional cu mărimea pasului interior al spirei, corespunzător secţiunii considerate.

§ 3. APLICAŢIE. RIVARCUL DESTINAT SUSPENSIEI SPATE DACIA 1302

Admitem pentru elicea rivarcului în stare liberă expresiile :

$$h_{01}(\xi) = a\,\xi^2 + b\xi, \quad \xi \in [0, m],$$

$$p_{01}(\xi) = 2a\xi + b, \quad b > a > 0, \tag{3.1}$$

$$h_{02}(\xi) = h_{01}(m) + p_{01}(m)(\xi - m), \quad \xi \in [m, n].$$

Punem condiția ca pasul maxim al elicei rivarcului să fie egal cu pasul elicei arcului cu pas constant echivalent

$$p_{01}(m) = 2am + b = d + \delta_0. \tag{3.2}$$

Pasul interior al spirei, definit de relația (1.2), are expresia

$$q_0(\xi) = 2a\xi, \quad \xi \in [0, m]. \tag{3.3}$$

Ultima relație cuprinde condiția

$$q_0(0) = b - a - d = 0. \tag{3.4}$$

Mărimile d, δ_0 și m fiind cunoscute, din relațiile (3.2) și (3.4) se determină coeficienții a și b. Observăm că mărimea $2a$ reprezintă pasul interior al spirei cu indicele 1. Pașii interiori ai primelor m spire formează o progresie aritmetică cu rația $2a$; între $2a$ și δ_0 există relația

$$a(2m + 1) = \delta_0. \tag{3.5}$$

Mărimea a reprezintă pasul interior rămas al celor $n-m$ spire cu pas constant, cînd primele m spire au fost scoase din lucru.

Forța F care comprimă rivarcul este dată de expresiile :

$$F = \begin{cases} 2a\alpha A, & \alpha \in [0, m], \\ \delta A, & \delta \in [2am, \delta_0]. \end{cases} \tag{3.6}$$

Relația (3.5), amplificată cu rigiditatea A, exprimă faptul că rivarcul și arcul cu pas constant echivalent pot suporta aceeași forță maximă F_0 dată de relația (1.8).

Elicea activă a rivarcului comprimat de forța F este descrisă de ecuațiile :

$$h_1(\alpha, \xi) = \alpha d + a(\xi - \alpha)^2 + b(\xi - \alpha), \quad \xi \in [\alpha, m], \tag{3.7}$$

$$h_2(\alpha, \xi) = h_1(\alpha, m) + (p_{01}(m) - 2a\alpha)(\xi - m), \quad \xi \in [m, n],$$

în care $\alpha \in [0, m]$.

Observăm că este respectată condiția $(2.6)_3$.

Cînd lucrează numai spirele cu pas constant, ecuația elicei active are expresia

$$h_3(\delta, \xi) = md + (p_{01}(m) - \delta)(\xi - m),$$

$$\delta \in [2am, \delta_0], \quad \xi \in [m, n]. \tag{3.8}$$

Calculăm expresiile săgeții rivarcului cu relațiile (2.9) și obținem :

$$f_1(\alpha) = 2a\alpha\left(n - \frac{\alpha-1}{2}\right), \quad \alpha \in [0, m].$$

$$f_2(\delta) = f_1(m) + (n-m)(\delta - 2am), \quad \delta \in [2am, \delta_0]. \tag{3.9}$$

Calculăm valoarea maximă a săgeții rivarcului

$$f_{m,n}^{max} = f_1(m) + f_2(\delta_0) = \left[1 - \frac{m^2}{n(2m+1)}\right] f_0, \tag{3.10}$$

în care f_0 este săgeata maximă a arcului cu pas constant echivalent.

În cazul cînd toate spirele rivarcului sînt situate pe arcul de parabolă $(3.1)_1$ relația (3.10) devine :

$$f_{n,n}^{max} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}\right) f_0. \tag{3.11}_1$$

În acest caz, în care $m = n$, relația (3.5) se modifică astfel :

$$2an = \delta_0. \tag{3.11}_2$$

În figura 3 este reprezentată săgeata rivarcului dată de relațiile (3.9), în coordonatele adimensionale φ și Φ, pentru $n = 8$. Parametrul m poate lua valori de la $m = 0$, cazul arcului cu pas constant echivalent, la $m = n$. Observăm că energia potențială de deformație a rivarcului, reprezentată de aria mărginită de diagrama săgeții rivarcului și proiecția ei pe axa ordonatelor, descrește cînd m crește :

$$W_1(\alpha) = \int_0^{\alpha} F(\alpha)\, df_1(\alpha) = A\ (2a\alpha)^2 \left(\frac{2n+1}{4} - \frac{\alpha}{3}\right), \quad \alpha \in [0, m], \tag{3.12}$$

$$W_2(\delta) = W_1(m) + \int_0^{a} A(n-m)\delta \mathrm{d}\delta, \quad \delta \in [0, a]. \tag{3.13}$$

Calculăm valoarea maximă a energiei potențiale

$$W_{m,n}^{max} = W_1(m) + W_2(a), \tag{3.14}$$

$$W_1(m) = \frac{1 + \frac{1}{2n} - \frac{2m}{3n}}{\left(1 + \frac{1}{2m}\right)^2} W_0\,; \quad W_2(a) = \frac{1 - \frac{m}{n}}{(2m+1)^2} W_0,$$

în care W_0 reprezintă energia potențială maximă a arcului cu pas constant echivalent (1.14). Pentru cazul $m = n$, obținem

$$W_{m,n}^{max} = W_1(n) = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n}\right) W_0. \tag{3.15}$$

Valoarea relativ mică a raportului $W_1(n)/W_0$ se explică prin aceea că momentul de torsiune $\frac{1}{2} FD$ solicită numai elicea activă a rivarcului, respectiv $n - \alpha$ spire, în timp ce la arcul cu pas constant momentul de torsiune solicită întreaga elice. La rivarcul a cărui elice este un arc de parabolă simplă, efortul tangențial variază liniar de-a lungul spirelor scoase din lucru și este constant numai în lungul elicei spirelor active.

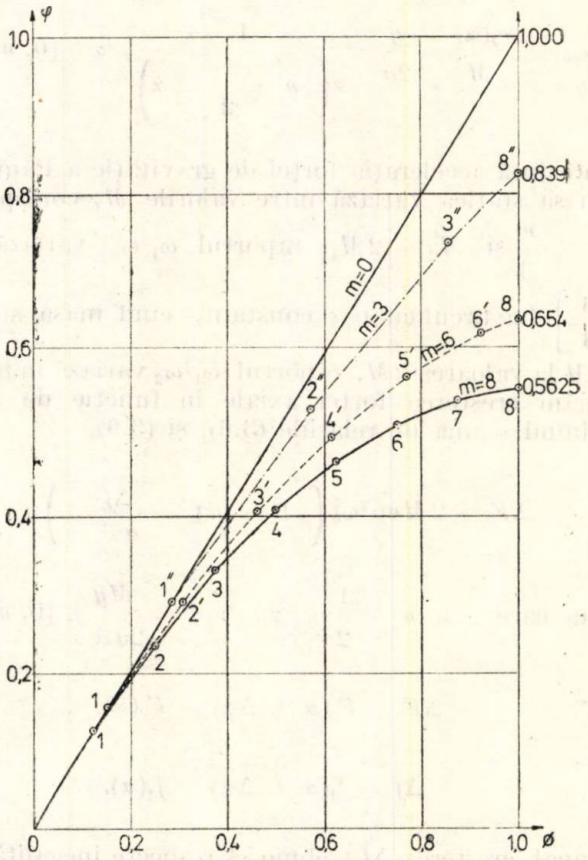


Fig 3.

Rigiditatea rivarcului este dată de relațiile

$$c_1(\alpha) = \frac{A}{n + \frac{1}{2} - \alpha}, \quad \alpha \in [0, m],$$

$$c_2 = \frac{A}{n - m}, \quad \delta \in [2am, \delta_0]. \tag{3.16}$$

Notăm cu ω_0 pulsația proprie corespunzătoare deformației statice a sistemului oscilant format de masa $M = \frac{2a\alpha A}{g}$ și rivarcul considerat în acest paragraf :

$$\omega_0^2 = \frac{c_1(\alpha)}{M} = \frac{g}{2a} \cdot \frac{1}{\alpha\left(n + \frac{1}{2} - \alpha\right)}, \quad \alpha \in [0, m], \tag{3.17}$$

în care g reprezintă accelerația forței de gravitație a Pământului.

Cînd masa statică variază între valorile M_1 corespunzătoare parametrului $\alpha_1 = \frac{n}{3}$ și $M_2 = 2M_1$, raportul ω_1/ω_2 variază în intervalul $\left[1, \sqrt{\frac{4n+6}{4n+3}}\right]$. La arcul cu pas constant, cînd masa statică variază de la valoarea M la valoarea $2M$, raportul ω_1/ω_2 variază în intervalul $[1, \sqrt{2}]$.

Exprimăm creșterea forței axiale în funcție de creșterea săgeții rivarcului, ținînd seama de relațiile $(3.6)_1$ și $(3.9)_1$

$$\Delta F = 2Ma\mu^2\omega_0^2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\Delta f}{a\mu^2}}\right), \tag{3.18}$$

în care $\mu = n + \frac{1}{2} - \alpha$; $\quad \alpha = \frac{Mg}{2aA} \in [0, m]$,

$$\Delta F = F(\alpha + \Delta\alpha) - F(\alpha),$$

$$\Delta f = f_1(\alpha + \Delta\alpha) - f_1(\alpha).$$

Funcțional, creșterea Δf trebuie să respecte inegalitățile de mai jos :

$$|\Delta f| \leqslant f_1(\alpha) \text{ și } |\Delta f| \leqslant f_1(m) - f_1(\alpha). \tag{3.19}$$

Întrucît există egalitatea

$$a\mu^2 = f_1(m) - f_1(\alpha) + a\left[(n-m)(n-m+1) + \frac{1}{4}\right], \qquad (3.20)_1$$

relaţiile (3.19) sînt suficiente pentru ca inegalitatea

$$|\Delta f| \leqslant a\mu^2 \qquad (3.20)_2$$

impusă de (3.18), să fie satisfăcută.

Introducem notaţiile $\Delta f = x$ şi $x/a\mu^2 = X$, şi dezvoltăm radicalul din relaţia (3.18) în seria Taylor, în jurul valorii $X = 0$. Obţinem pentru variaţia forţei, expresia :

$$\Delta F = Ma\mu^2\omega_0^2\left(X + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{8}X^3 + \frac{5}{64}X^4 + \frac{7}{128}X^5 + \ldots\right). \qquad (3.21)$$

Scriem ecuaţia oscilaţiilor sistemului mecanic reprezentat în figura 4, format de rivarcul studiat în acest paragraf, masa statică M şi un amortizor cu frecare vîscoasă. Considerăm că forţa rezistenţă dezvoltată în amortizor este proporţională cu viteza $\dot{x}$ a oscilaţiei masei, constanta de proporţionalitate fiind k. Obţinem :

$$M\ddot{x} + k\dot{x} + \Delta F = f(t), \text{ respectiv}$$

$$\ddot{X} + h\dot{X} + \omega_0^2\left(X + \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{8}X^3 + \ldots\right) = f(t), \qquad (3.22)$$

în care $h = k/M$; ω_0^2 are expresia dată de relaţia (3.17) ; ţinînd seama de notaţia $X = \Delta f/a\mu^2$ şi de inegalităţile (3.19), rezultă

$$|X| \leqslant \frac{f_1(\alpha)}{a\mu^2} \text{ şi } |X| \leqslant \frac{f_1(m) - f_1(\alpha)}{a\mu^2}, \qquad (3.23)$$

parametrul α fiind determinat cu relaţia $(3.18)_3$.

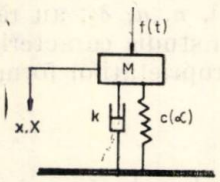


Fig. 4

Dăm mai jos valorile nominale ale parametrilor rivarcului destinat suspensiei spate Dacia 1302 :

$d = 15{,}4$ mm, $n = 8$,

$D = 145{,}1$ mm, $m = 6$,

$a = 3{,}15$ mm, $G = 78500$ N/mm^2,

$A = 180{,}66$ N/mm,

$F_0 = 7400$ N, $\tau_{max} = 865$ N/mm^2.

Material : oţel X ; călire la 850°C, revenire la 450°C ; HB 514 ; rezistenţa la rupere 1810 N/mm^2, limita de curgere 1695 N/mm^2.

§4. REALIZAREA RIVARCULUI DACIA 1302

Tehnologia actuală de confecţionare a arcurilor elicoidale cilindrice destinate suspensiilor de automobil prevede înfăşurarea la cald a sîrmei pe un dorn cilindric lis cu ajutorul unui al doilea cilindru prevăzut cu un canal elicoidal, care imprimă sîrmei elicea dorită. Dispozitivul funcţionează pe principiul angrenării : în punctul în care barei sîrmei i se imprimă curbura elicei, punct situat în planul format de axele de rotaţie ale celor două dornuri cilindrice, cei doi cilindri au aceeaşi viteză periferică. Elicea dornului de conducere, exceptînd sensul de înfăşurare, este aceeaşi cu elicea arcului în stare liberă.

Realizarea canalului elicoidal al dornului de conducere se face fără dificultăţi, pe maşini unelte obişnuite, în cazul în care pasul elicei este constant. Pentru realizarea elicei rivarcului Dacia 1302 ar fi fost necesară fie o maşină specială capabilă să imprime deplasării de translaţie a sculei de aşchiat viteza cerută de ecuaţia (3.1),

$$v = (2a\xi + b)\omega, \tag{4.1}$$

în care $v = \mathrm{d}h/\mathrm{d}t$; $\omega = \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}t$ reprezintă viteza de rotaţie a dornului de conducere, măsurată în rotaţii pe secundă, fie realizarea elicei prin puncte, de exemplu pe o freză universală echipată cu cap divizor, — rezolvare laborioasă şi puţin precisă. S-a adoptat următoarea soluţie : s-a asimilat arcul de parabolă simplă corespunzător unei spire cu coarda respectivă, realizîndu-se astfel pentru elicea rivarcului o linie poligonală cu $m + 1$ laturi, primele m laturi fiind înscrise pe arcul de parabolă definit de ecuaţia $(3.1)_1$. Mărimile d, D, A, m, n, a, δ_0, au rămas aceleaşi cu cele stabilite în paragraful anterior. Vom studia caracteristicile comportării sub sarcină ale acestui rivarc în baza proprietăţilor formulate în §2.

Cu notaţia

$$\xi = k + \varepsilon\,;\ k = 1,\ 2,\ \ldots,m\,;\ \varepsilon \in [0,\ 1], \tag{4.2}$$

(cînd ε ia toate valorile intervalului $[0, 1]$ k este constant, deci $dk = 0$), ecuaţiile elicei rivarcului au expresiile :

$$h^*_{01}(\varepsilon, k) = a(k-1)^2 + b(k-1) + \varepsilon(2ak + d),$$
$$h^*_{02}(\xi) = h^*_{01}(1, m) + (2am + b)(\xi - m), \quad \xi \in [m, n]. \tag{4.3}$$

Ecuaţiile $(4.3)_2$ şi $(3.1)_3$ sînt identice, relaţiile (3.2) şi (3.4) sînt valabile şi în acest caz. Relaţia (3.3) devine :

$$q_0(\varepsilon, k) = 2a(k - 1 + \varepsilon). \tag{4.4}$$

Scriem săgeata spirei rivarcului sub forma

$$\delta_1 = 2a(\alpha + \beta); \ \alpha = 0, 1, 2, \ldots, m-1; \ \beta \in [0, 1],$$
$$\delta_2 = \delta \in [2am, \delta_0], \tag{4.5}$$

cînd β ia toate valorile intervalului $[0, 1]$, α este constantă, deci $d\alpha = 0$. În acest caz, α reprezintă numărul spirelor întregi scoase din lucru.

Ecuaţiile elicei active a rivarcului, pentru $\delta_1 \in [0, 2am]$, au expresiile

$$h_1^*(\alpha, \beta, \varepsilon, k) = \alpha d + \sum_{k=\alpha+1}^{k-1} [2a(k - \alpha - \beta) + d] + \varepsilon[2a(k - \alpha - \beta) + d],$$
$$h_2^*(\alpha, \beta, \xi) = h_1^*(\alpha, \beta, 1, m) + (\delta_0 - \delta_1 + d)(\xi - m), \tag{4.6}$$

în care $k = \alpha + 1, \alpha + 2, \ldots, m; \ \varepsilon \in [0, 1]; \ \xi \in [m, n]$.

Pentru săgeata rivarcului obţinem relaţia

$$f_1(\alpha, \beta) = 2a\left[(\alpha + \beta)\left(n + \frac{1}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \frac{\beta(1 - \beta)}{2}\right], \tag{4.7}$$

în care $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, m - 1; \ \beta \in [0, 1]$.

Ţinînd seama că forţa axială care comprimă rivarcul are expresia

$$F = 2a(\alpha + \beta)A \quad \text{şi} \quad dF = 2aA\,d\beta, \tag{4.8}$$

ecuaţia (4.7) poate fi pusă sub forma următoare :

$$f_1(F, \beta) = \frac{F}{A}\left(n + \frac{1}{2} - \frac{F}{4aA}\right) - a\beta(1 - \beta). \tag{4.9}$$

Ecuația (4.7), respectiv (4.9), reprezintă un contur poligonal convex deschis format din m segmente de dreaptă, ale cărui vîrfuri sînt situate pe parabola $(3.9)_1$. Vîrfurile conturului poligonal corespund acelor puncte pentru care F este un multiplu întreg de $2aA$, respectiv cînd ε ia valorile 0 și 1. În aceste puncte rigiditatea arcului își schimbă valoarea. Observăm că termenul $a\beta(1-\beta)$ este pozitiv pentru orice $\beta \in [0, 1]$, nul la capetele intervalului, și ia valoarea maximă $a/4$ pentru $\beta = 1/2$. În cazul de care ne ocupăm a are valoarea 3,15 mm, deci valoarea maximă a termenului $a\beta(1-\beta)$ este de 0,7875 mm, valoare sensibil mai mică decît variațiile admise pentru săgeată datorate toleranțelor tehnologice de execuție a rivarcului. Rezultă că aceast termen, cel puțin în faza de proiectare, poate fi neglijat.

Prin diferențierea ecuației (4.9), ținînd sema de relațiile (4.8), se obține :

$$c_1(\alpha) = \frac{A}{n-\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, 2. \ldots, m. \tag{4.10}$$

După ce primele m spire au fost scoase din lucru, elicea activă a celor $n - m$ spire cu același pas este descrisă de ecuația (3.8), săgeata rivarcului de relațiile $(3.9)_2$ și (3.10), iar rigiditatea de expresia $(3.16)_2$.

Diagramele $F - f$ ale rivarcului Dacia 1302, atît cea calculată în baza ipotezelor 1 și 2 din paragraful 2, cît și cea obținută experimental, sînt prezentate în figura 5. Săgeata obținută experimental este mai mare decît săgeata calculată. Abaterea maximă este de 4%. Ținînd seama de toleranțele de execuție specifice fabricației de serie mare ale mărimilor geometrice ale rivarcului și de faptul că valoarea reală a modului de elasticitate transversal al materialului din care a fost confecționată sîrma

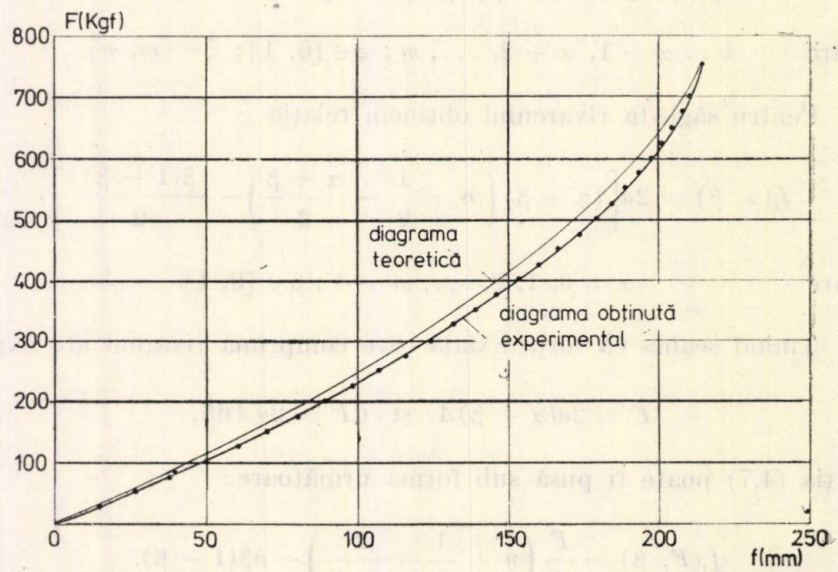


Fig. 5

diferă de valoarea luată în calcul, putem aprecia că ipotezele privind rivarcul, admise în paragraful 2, sînt corecte.

În figura 6 se prezintă caracteristica elastică calculată a suspensiei spate a automobilului Dacia 1302, atît în situația cînd este echipată cu arcurile cu pas constant actuale, confecționate din sîrmă cu diametrul de

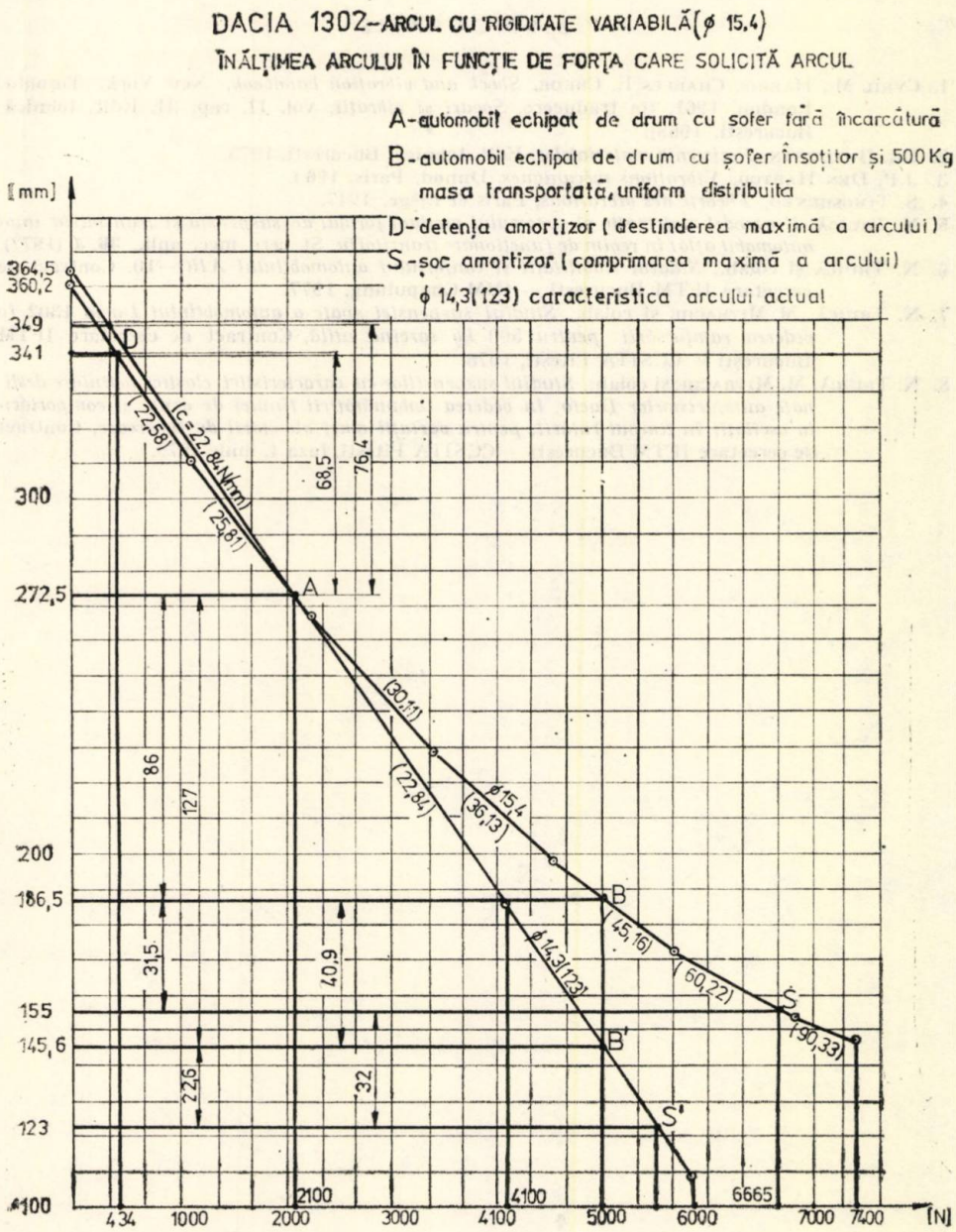


Fig. 6

14,3 mm, cît și în situația cînd este echipată cu rivarcul confecționat din sîrmă cu diametrul de 15,4 mm. Pe axa absciselor s-a figurat 1/2 din forța care solicită suspensia.

Primită la redacție la 13 august 1979

BIBLIOGRAFIE

1. CYRIL M., HARRIS, CHARLES E. CREDE, *Shock and vibration handbook*, New York, Toronto, London, 1961, (în traducere, *Șocuri și vibrații*, vol. II, cap. 34, Edit. tehnică, București, 1968).
2. GH. BUZDUGAN, *Rezistența materialelor*, Edit. tehnică, București, 1975.
3. J.P. DEN HARTOG, *Vibrations mécaniques*, Dunod, Paris, 1961.
4. S. TIMOSHENKO, *Théorie des vibrations*, Paris et Liège, 1947.
5. N. TRUICĂ, *Un model matematic al sistemului oscilant format de suspensia și transmisia unui automobil aflat în regim de funcționare tranzitoriu*, St. cerc. mec. apli., **36**, 5 (1977).
6. N. TRUICĂ și colab., *Studiul stabilității și confortului automobilului ARO—10*, Contract de cercetare IFTM București — IMM Cîmpulung, 1977.
7. N. TRUICĂ, M. MITRACHE și colab., *Studiul suspensiei spate a automobilului Dacia 1302 în vederea ramforsării pentru 500 kg sarcină utilă*, Contract de cercetare IFTM București — CCSITA Pitești, 1978.
8. N. TRUICĂ, M. MITRACHE și colab., *Studiul suspensiilor cu caracteristici elastice neliniare destinate autoturismelor Dacia, în vederea îmbunătățirii ținutei de drum și comportării la oscilații în timpul rulării, pentru variații mari ale stării de încărcare*, Contract de cercetare IFTM București — CCSITA Pitești, faza I, iunie 1979.

METODA TRANSMITERII NODALE UTILIZATĂ LA RIDICAREA NEDETERMINĂRILOR ARBORELUI COTIT

de I. COȘEREANU, I. GOIA
Universitatea din Brașov
S. VLASE, V. MIHALCICA
Centrul de cercetare științifică și inginerie tehnologică pentru autocamioane Brașov

Lucrarea utilizează metoda transmiterii nodale pentru determinarea coeficienților ecuațiilor canonice ale metodei forțelor. Tratarea în această manieră permite utilizarea calculului automat la ridicarea nedeterminărilor arborelui cotit. S-au executat calculele pentru arborii cotiți care echipează unele motoare de autocamion.

Determinarea reacțiunilor ce apar în lagărele paliere ale unui motor reprezintă o etapă importantă în conducerea unui calcul pentru arbore cotit; gradul de exactitate obținut în calcularea acestora determină nivelul de încredere în rezultatele finale ale calculelor.

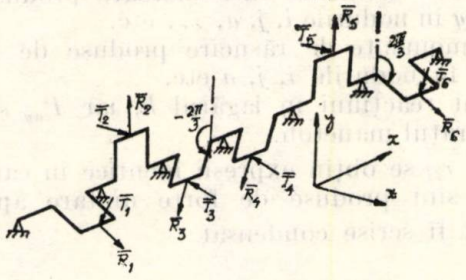


Fig. 1

Arborele cotit pe lagărele sale reprezintă în general un sistem static nedeterminat, aflarea reacțiunilor din lagăre revenind la ridicarea nedeterminărilor (fig. 1).

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 2, 1980, P. 301–310

Considerînd lagărele paliere rigide putem scrie ecuațiile canonice ale metodei forțelor [1], [2]:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1,n+1} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2,n+1} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{n,n+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{ay} \\ P_{by} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{cy} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1,n+1} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2,n+1} \\ & & & \\ & & & \\ & & & \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{n,n+1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{az} \\ P_{bz} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_{cz} \end{Bmatrix} = \{0\}$$

unde

$$\alpha_{ij} = \sum \frac{1}{EI} \int m_i m_j \, dx + \sum \frac{1}{GI_r} \int m_{ri} m_{rj} \, dx,$$

$$s_{ij} = \sum \frac{1}{EI} \int m_i m_a \, dx + \sum \frac{1}{GI_r} \int m_{ri} \, m_{ra} \, dx,$$

m_i, m_j, m_a, ... fiind momente încovoietoare produse de forțe unitare aplicate după axa y în nodurile i, j, a, ... etc.

m_{ri}, m_{rj}, m_{ra}, ... momente de răsucire produse de forțe unitare aplicate după axa y în nodurile i, j, a etc.

Y_k și Z_k sînt reacțiuni în lagărul k, iar P_{ay} și P_{az} componentele forței ce solicită brațul maneton.

Pentru β_{ij} și r_{ij} se obțin expresii identice în care m_i, m_j, m_a, ..., m_{ri}, m_{rj}, m_{ra}, ... sînt produse de forțe unitare aplicate după axa z.

Ecuațiile pot fi scrise condensat:

$$[\alpha]\{Y\}_c + [S]\{P\}_y = \{0\}$$

și

$$[\beta]\{Z\}_c + [R]\{P\}_z = \{0\}.$$

Arborele se consideră rezemat la capete.

Există metode diverse pentru rezolvarea problemei enunțate care însă pentru cazul unui arbore cotit cu număr relativ mare de lagăre devin ineficiente din cauza calculelor necesar a fi efectuate.

Prezentăm în continuare o metodă ce permite o programare ușoară, aplicabilă pentru orice tip de arbore cotit.

Pentru aceasta discretizăm arborele în elemente caracterizate prin variația continuă a acțiunilor mecanice (fig. 2).

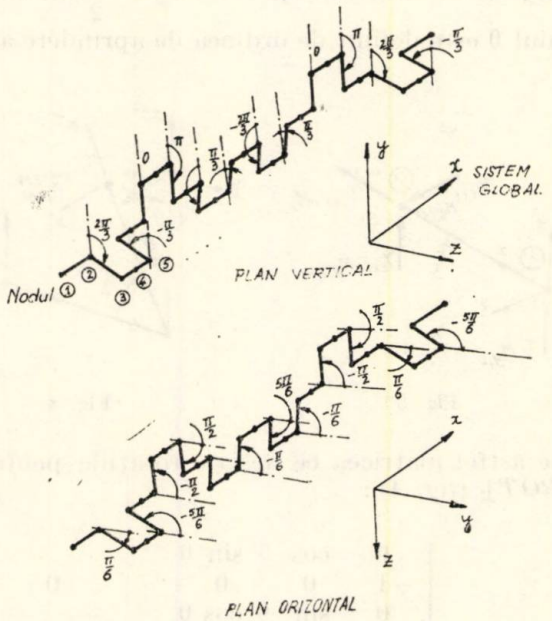


Fig. 2

Un element oarecare i va fi determinat de nodurile consecutive i, $i+1$. Astfel notînd cu $\{R\}_i$ vectorul ce descrie eforturile nodului i, vectorul $\{R\}_{i+1}$ se obține aplicînd asupra lui $\{R\}_i$ transformarea liniară $[T]_{i,i+1}$:

$$\{R\}_{i+1} = [T]_{i,i+1}\ \{R\}_i.$$

Considerînd sistemul de coordonate local al elementului i ales ca în figura 3 relația scrisă ia forma explicită:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_{i+1} = \left[\begin{array}{ccc:cc} & I & & 0 & \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & L & I & \\ 0 & -L & 0 & & \end{array}\right] \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}_i,$$

unde I este matricea unitate,

L este lungimea elementului considerat.

Elementele în care este discretizat arborele cotit pot fi separate în două clase distincte: elementele cu axa de simetrie paralelă cu axa palie-

relor (elementele obținute prin discretizarea fusurilor paliere și manetoane) și elementele ce reprezintă brațele. Pentru efectuarea calculului recurent acestea din urmă trebuie raportate la sistemul de referință global la care este raportat arborele. Trecerea de la sistemul global la cel local este realizată prin intermediul unei rotații de unghi $\frac{\pi}{2}$ urmată de rotația de unghi θ. Unghiul θ este definit de ordinea de aprindere aleasă.

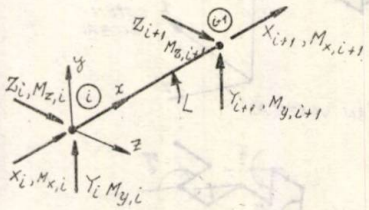


Fig. 3

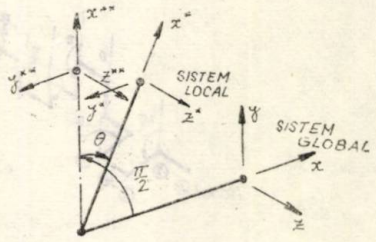


Fig. 4

Se obține astfel matricea ce descrie rotațiile pentru trecerea la sistemul local $[ROT]_i$ (fig. 4):

$$[ROT]_i = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 0 & \cos\theta & \sin\theta & & & \\ -1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & & & \\ \hdashline & & & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ & 0 & & -1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{array}\right]$$

și

$$\{R\}_i^* = [ROT]_i \{R\}_i.$$

Trecerea de la sistemul local la cel global a realizată prin $[ROT]_i^T$:

$$\{R\}_i = [ROT]_i^T \{R\}_i^*.$$

În acest caz vectorul eforturilor în nodul $i+1$ va fi dat de

$$\{R\}_{i+1} = [ROT]_i^T \{R\}_{i+1}^* = [ROT]_i^T [T]_{i,i+1} \{R\}_i^* = [ROT]_i^T [T]_{i,i+1} [ROT]_i \{R\}_i.$$

Folosindu-ne de metoda recurentă prezentată se calculează valorile momentelor în noduri date de forțe unitare aplicate în nodurile *i, j, a,* . . . ca fiind componentele 4, 5, 6 ale vectorilor $\{R\}_k$ în cazul cînd asupra arborelui așezat pe reazemele de bază acționează o forță unitară aplicată în nodul *i, j, a,* . . .

Calculul integralelor de forma $\delta = \int_0^L m_i m_j \, dx$ efectuate de-a lungul elementului k se execută analitic. Astfel dacă avem

$$m_i\Big|_{x=0} = a_1; \quad m_j\Big|_{x=0} = a_2,$$

$$m_i\Big|_{x=L} = b_1; \quad m_j\Big|_{x=L} = b_2,$$

putem scrie:

$$\delta = \int_0^L m_i m_j \, dx = \int_0^L \left(\frac{b_1 - a_1}{L} x + a_1\right)\left(\frac{b_2 - a_2}{L} x + a_2\right) dx =$$

$$= \frac{L}{6}(2a_1a_2 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2b_1b_2).$$

În discretizarea făcută am considerat fusurile ca elemente cilindrice, brațele ca elemente paralelipipedice la care J_y, J_z, J_p sînt calculate funcție de forma geometrică minimă a secțiunii. Întrucît momentele de inerție J_z, J_p pe lungimea elementului de tip braț variază, fiind mai mari în afara secțiunii minime, valoarea medie luată în calcul va trebui corectată în final.

Dacă pentru elementul k notăm:

$$\Gamma^m_{k,ij} = \frac{L_k}{6}[2R^i_k(m)\,R^i_k(m) + R^i_k(m)\,R^j_{k+1}(m) +$$

$$+ R^j_k(m)\,R^i_{k+1}(m) + 2R^i_{k+1}(m)\,R^j_{k+1}(m)],$$

$\delta_{k,ij}$ va fi: $\delta_{k,ij} = \dfrac{1}{GI_p}\Gamma^4_{k,ij} + \dfrac{1}{EI_y}\Gamma^5_{k,ij} + \dfrac{1}{EI_z}\Gamma^6_{k,ij}$,

iar

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{NE} \delta_{k,ij},$$

NE reprezentînd numărul de elemente total, iar $R^i(m)$ elementul de pe linia m în vectorul $\{R\}^i$.

Coeficienții s_{ij}, β_{ij}, și r_{ij} se calculează identic operînd cu vectorii $\{R\}^i$, $\{R\}^j$, $\{R\}^a$.

Rezolvarea sistemului de ecuații cu coeficienții calculați oferă reacțiunile în lagărele 1, 2, ..., n.

$$\{Y\}_c = -[\alpha]^{-1}[S]\{P\}_y,$$

$$\{Z\}_c = -[\beta]^{-1}[R]\{P\}_z.$$

Y_0 și Y_{n+1} se determină astfel:

$$Y_0 = -\frac{Y_1 l_1 + Y_2 l_2 + \ldots + Y_n l_n}{l},$$

$$Y_{n+1} = -\frac{Y_1(l - l_1) + Y_2(l - l_2) \ldots Y_n(l - l_n)}{l},$$

l_i poziționînd reazemul i față de reazemul 0, iar $l = l_{n+1}$.

Cu notațiile $\varepsilon_i = \frac{l_i}{l}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\text{și } [B] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & -I \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 - \varepsilon_1, & 1 - \varepsilon_2 \ldots 1 - \varepsilon_n \end{bmatrix},$$

vectorul reacțiunilor $\{Y\} = \{Y_0 Y_1 \ldots Y_n Y_{n+1}\}^T$ poate fi reprezentat într-o formă unitară:

$$\{Y\} = [B]\,[\alpha]^{-1}\,[S]\,\{P\}_y.$$

Pentru $\{Z\}$ se obține analog:

$$\{Z\} = [B]\,[\beta]^{-1}\,[R]\,\{P\}_z.$$

Am arătat că momentele de inerție ale brațelor J_z și J_p sînt mai mari decît cele luate în considerare în calcul inițial (fig. 5). Pentru aceasta se face o corectare a lor.

Astfel dacă δ_{ij} este săgeata în nodul i produsă de o forță unitară aplicată în nodul j, notăm δ^*_{ij} rezultatul calculului în care am luat $J_z = J_p = \infty$.

În acest caz putem scrie:

$$\delta_{ij} = \delta^*_{ij} + \delta^z_{ij} + \delta^0_{ij},$$

unde δ^z_{ij} este datorată încovoierilor prin J_z, iar δ^0_{ij} este datorată torsiunilor prin J_p.

Dacă $J_{e,z}$ și $J_{e,p}$ sînt momente de inerție echivalente ce trebuie luate în considerare pentru a obține calculul corect notăm:

$$\lambda_1 = \frac{J_z}{J_{e\,z}}, \quad \lambda_2 = \frac{J_0}{J_{e\,0}}.$$

În acest caz putem scrie pentru cele două plane vertical și orizontal luate în considerare :

$$\delta_{ij}^{v} = \delta_{ij}^{v,*} + \lambda_1 \delta_{ij}^{v,z} + \lambda_2 \delta_{ij}^{v,0},$$

$$\delta_{ij}^{H} = \delta_{ij}^{H,*} + \lambda_1 \delta_{ij}^{H,z} + \lambda_2 \delta_{ij}^{H,0},$$

unde δ_{ij}^{v} și δ_{ij}^{H} sînt valorile măsurate.

Se obține de aici :

$$\begin{Bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{ij}^{v,z} & \delta_{ij}^{v,0} \\ \delta_{ij}^{H,z} & \delta_{ij}^{H,0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \delta_{ij}^{v} - \delta_{ij}^{v,*} \\ \delta_{ij}^{H} - \delta_{ij}^{H,*} \end{Bmatrix}.$$

Reacțiunile Y și Z sînt calculate față de un sistem de referință mobil, solidar cu arborele cotit. Față de sistemul fix, solidar cu blocul motor, avem (fig. 6)

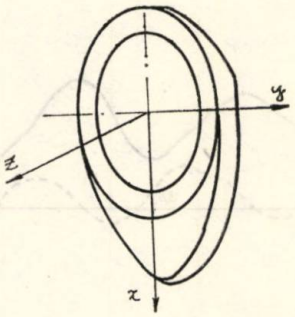


Fig. 5

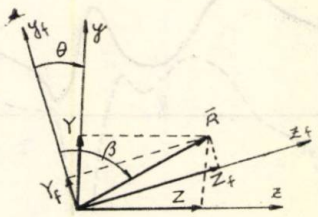


Fig. 6

$$\begin{Bmatrix} Y_f \\ Z_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Y \\ Z \end{Bmatrix},$$

$$\beta = \operatorname{arc\,tg} \frac{Z}{Y}.$$

Relațiile scrise permit determinarea reacțiunilor în lagărele paliere față de sistemul de referință fix și construirea diagramelor polare și de uzură, deci dependențele :

$$Y_i = Y_i(\theta);\ Z_i = Z_i(\theta);\ R_i = R_i(\theta),$$

unde $R_i = \sqrt{Y_i^2 + Z_i^2}$,
și $Y_i = Y_i(Z_i)$ (diagrama polară), unde θ reprezintă unghiul de rotație al arborelui cotit, iar $i = 0, 1, 2, \ldots, n + 1$ numărul palierului.

Pe baza metodei descrise s-a alcătuit un program general de calcul care permite tratarea oricărui tip de arbore cotit cu număr indiferent de manetoane.

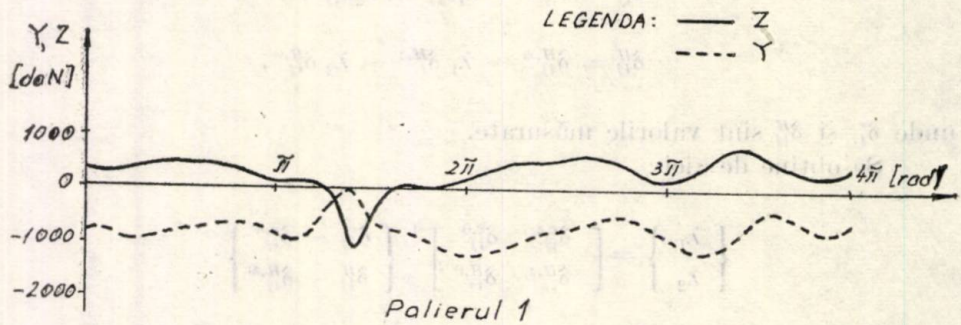


Fig. 7

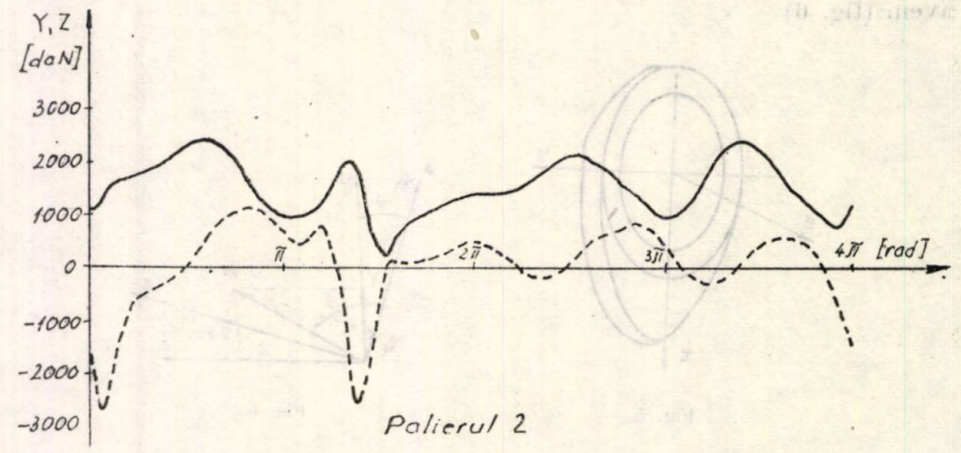


Fig. 8

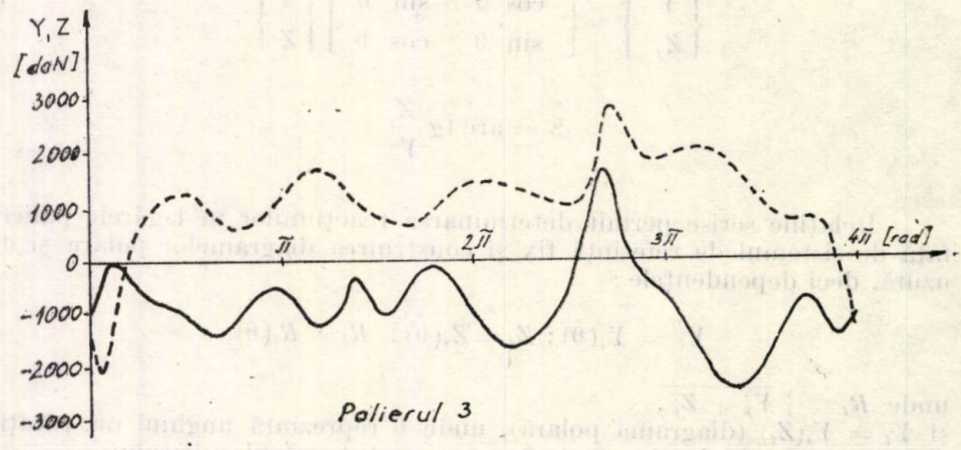


Fig. 9

Cu ajutorul programului s-au determinat reacțiunile ce apar în palierele motoarelor românești [3], [4] și în final solicitările organelor acestor motoare.

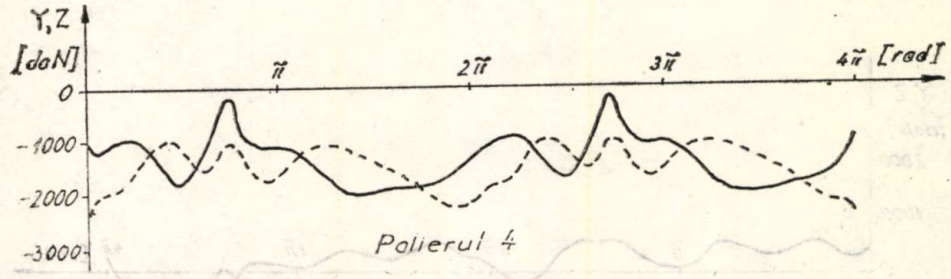


Fig. 10

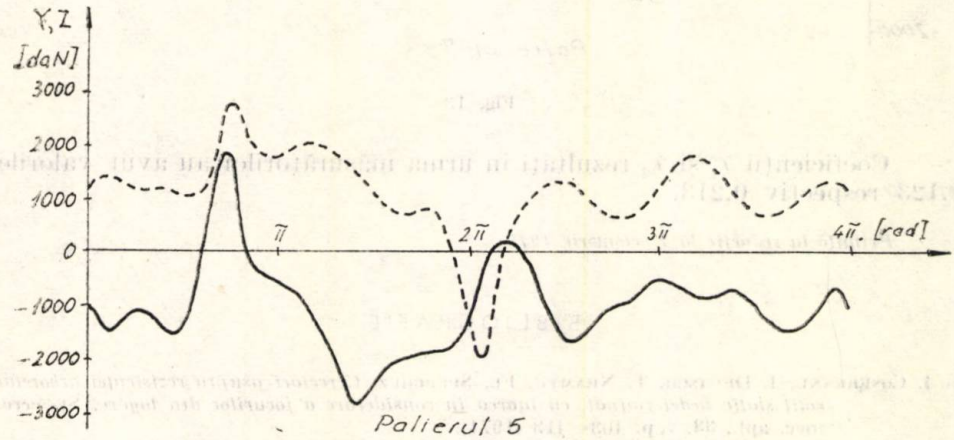


Fig. 11

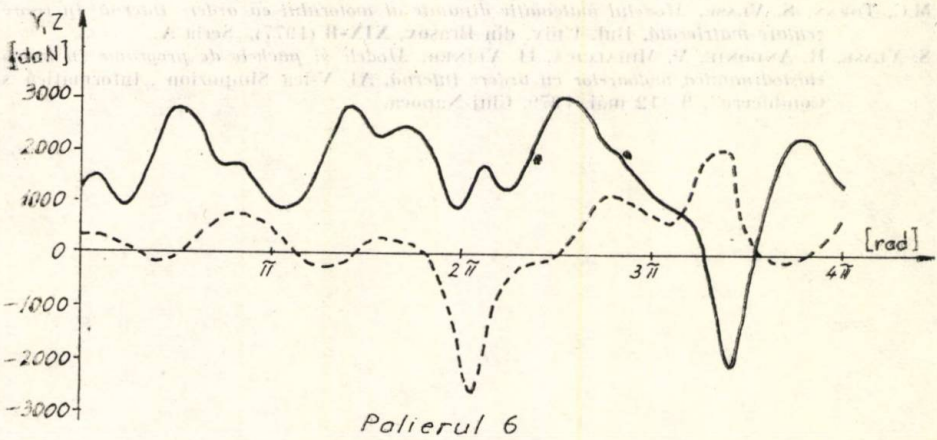


Fig. 12

Pentru un astfel de motor cu 6 cilindri în linie, 135 CP, valorile reacțiunilor determinate pentru parcursul unui ciclu motor sînt reprezentate în figurile 7—13.

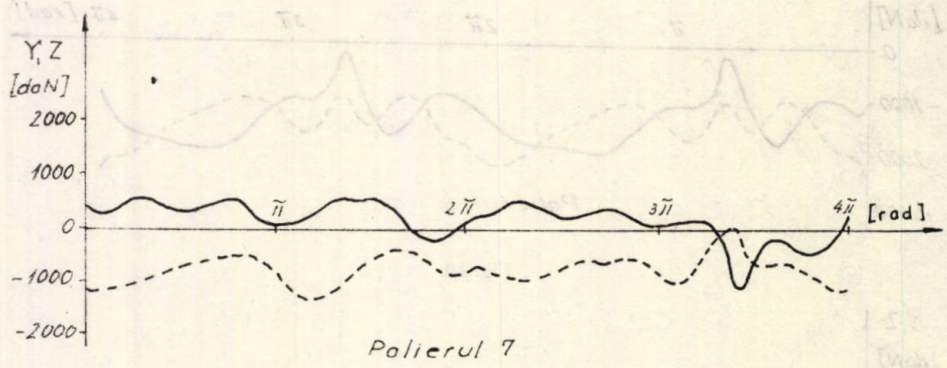


Fig. 13

Coeficienții λ_1 și λ_2 rezultați în urma măsurătorilor au avut valorile 0,123 respectiv 0,213.

Primită la redacție la 1 octombrie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. I. Coșereanu, I. Deutsch, T. Neamțu, Fl. Sperchez, *Cercetări asupra rezistenței arborelui cotit static nedeterminat, cu luarea în considerare a jocurilor din lagăre.* St. cerc. mec. apl., **33**, 2, p. 403—413 (1974).
2. I. Coșereanu, I. Deutsch, *Über das Weschseln des Grundsystems beim Aufheben der Unbestimmtheit von Geraden auf mehrere Stützen aufliegenden Balken,* Bul. Institutului Politehnic din Iași, **XVIII(XXII)**, *1—2* (1972), Secția V.
3. M.C. Tofan, S. Vlase, *Modelul matematic dinamic al motorului cu ardere internă în reprezentare matriceală,* Bul. Univ. din Brașov, **XIX-B** (1977), Seria A.
4. S. Vlase, R. Andonie, V. Mihalcica, H. Veiner, *Modele și pachete de programe în termoelastodinamica motoarelor cu ardere internă,* Al V-lea Simpozion „Informatică și Conducere", 9—12 mai, 1979, Cluj-Napoca.

METODA DE CALCUL A DIAMETRULUI SAPELOR CU TREI CONURI

DORIN CONSTANTINESCU
Institutul de proiectări și cercetări utilaj petrolier, Ploiești

GABRIEL TEODOR PRIPOAE
Universitatea București

Lucrarea prezintă o metodă analitică directă, originală, pentru calculul diametrului sapelor cu trei conuri, prin rezolvarea ecuației de gradul patru, rezultată din condiția de intersecție a cercului reprezentînd gaura de sondă și elipsa dată de proiecția pe planul perpendicular pe axa sapei, a cercului formînd diametrul conului.
Pînă în prezent, calculul se realiza prin încercări, prin metode grafo-analitice sau prin metoda de interpolare liniară, punîndu-se condiții pentru precizia necesară.
Cu ajutorul metodei de calcul prezentate, se pot rezolva mai multe categorii de probleme puse cercetării și proiectării construcției și tehnologiei de fabricație a sapelor cu trei conuri.

Calculul diametrului sapelor cu trei conuri constă în determinarea poziției și valorii diametrului maxim d al conurilor [1, 2] figura 1.

Poziția diametrului d, materializată prin distanța K_1 la axa de rotație a sapei cu diametrul $D_s = 2 \cdot R_s$, este funcție de valorile unor caracteristici dimensionale, depinzînd la rîndul lor de tipul sapei (natura rocilor pentru care este destinată), și anume :

y_0, deplasarea axei conurilor, în raport cu axa sapei (în planul perpendicular pe axa sapei XOY),

i_0, unghiul de înclinare a axei conurilor, în raport cu axa sapei și

ρ, unghiul de împănare al conurilor, față de planul perpendicular pe axa sapei.

Pentru soluționarea problemei este necesară rezolvarea sistemului format din ecuațiile

$$d = \frac{2}{y}(y - y_0)(y^2 \sin^2 i_0 + R_s^2 \cos^2 i_0)^{1/2}, \tag{1}$$

$$K_1 = \frac{1}{\sin i_0}(R_s^2 - y^2)^{1/2} - \frac{1}{\operatorname{tg} i_0}\left[\frac{d^2}{4} - (y - y_0)^2\right]^{1/2}, \tag{2}$$

și

$$\rho^0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{d}{2K_1} + i_0 - 90^\circ, \tag{3}$$

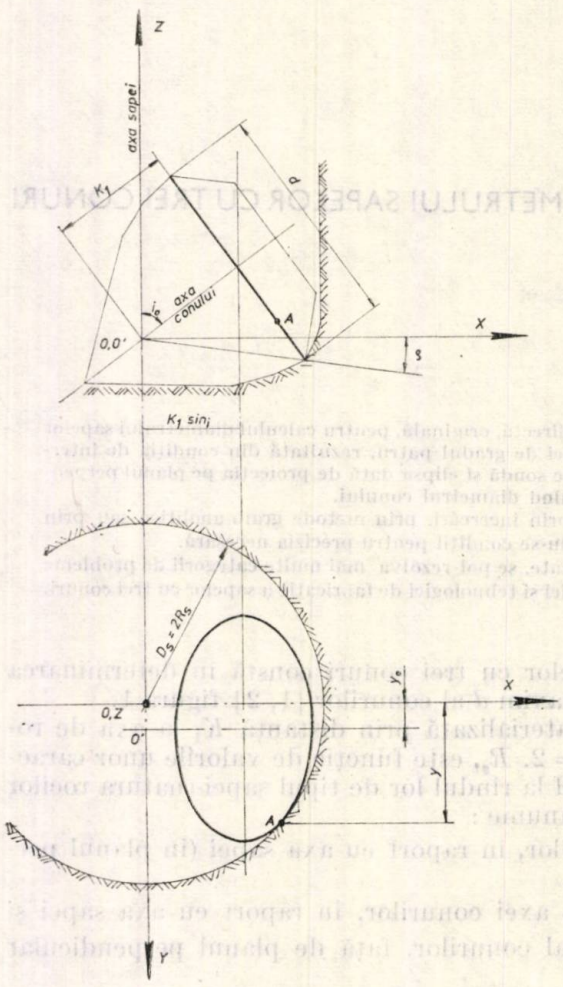


Fig. 1

ecuația (1) rezultînd din condiția de intersecție într-un singur punct (tangenței, reprezentată în figura 1 prin punctul A), dintre cilindrul găurii de sondă, cu diametru D_s și elipsa rezultată din proiecția diametrului conurilor d, în planul XOY, perpendicular pe axa sapei Z (cu y s-a notat ordonata corespunzătoare). Rezultă deci, că, fiind date dimensiunea sapei (D_S), caracteristicile dimensionale dependente de tipul sapei (y_0, i_0 și ρ) și alegîndu-se corespunzător diametrul maxim al conurilor d, rezolvarea sistemului de ecuații de mai sus, se reduce, de fapt, la rezolvarea ecuației (1) în y, funcție de care se determină și se verifică valoarea dimensiunii de poziție K_1, prin utilizarea relațiilor (2) și respectiv (3).

Pînă în prezent, calculul diametrului sapei se realiza prin încercări, fie prin metode grafo- analitice [1], fie prin metoda de interpolare liniară („metoda coardei") [2], punîndu-se condiții pentru precizia necesară, metode laborioase, în condițiile asigurării unei precizii corespunzătoare. Lucrarea de față prezintă o metodă de rezolvare analitică directă a problemei.

Plecîndu-se de la relația [1], rezultă ecuația de gradul patru în y:

$$y^4 - 2y_0 y^3 - \frac{d^2 - 4R_s^2 \cos^2 i_0 - 4y_0^2 \sin^2 i_0}{4 \sin^2 i_0} y^2 -$$

$$- 2(y_0 R_s^2 \operatorname{ctg}^2 i_0)\, y + y_0^2 R_s^2 \operatorname{ctg}^2 i_0 = 0, \qquad (4)$$

adică o ecuație de forma

$$y^4 + \alpha y^3 + \beta y^2 + \gamma y + \delta = 0 \qquad (4')$$

în care

$$\alpha = -2y_0,$$

$$\beta = -\frac{d^2 - 4R_s^2 \cos^2 i_0 - 4\, y_0^2 \sin^2 i_0}{4 \sin^2 i_0},$$

$$\gamma = -2y_0 R_s^2 \operatorname{ctg}^2 i_0 \tag{5}$$

și

$$\delta = y^2{}_0 R_s^2 \operatorname{ctg}^2 i_0.$$

Făcînd substituția [3],

$$y = x - \frac{\alpha}{4}, \text{ adică } y = x + \frac{y_0}{2}, \tag{6}$$

rezultă ecuația incompletă de gradul patru, prin lipsa termenului în x^3, de forma :

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0, \tag{7}$$

în care

$$p = -6\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 + \beta,$$

$$q = 8\left(\frac{\alpha}{4}\right)^3 - 2\,\frac{\alpha}{4}\,\beta + \gamma \tag{8}$$

și

$$r = -3\left(\frac{\alpha}{4}\right)^4 + \left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 \beta - \frac{\alpha}{4}\,\gamma + \delta,$$

adică

$$p = -\frac{d^2 - 4R_s^2 \cos^2 i_0 + 2y_0^2 \sin^2 i_0}{4 \sin^2 i_0},$$

$$q = -\frac{d^2 + 4R_s^2 \cos^2 i_0}{4 \sin^2 i_0}\, y_0 \tag{8'}$$

și

$$r = -\frac{d^2 - 4R_s^2 \cos^2 i_0 - y_0^2 \sin^2 i_0}{16 \sin^2 i_0}\, y_0^2$$

și deci ecuația (7) devine

$$x^4 - \frac{d^2 - 4R_s^2 \cos^2 i_0 + 2y_0^2 \sin^2 i_0}{4 \sin^2 i_0} x^2 -$$

$$- \frac{d^2 + 4R_s^2 \cos^2 i_0}{4 \sin^2 i_0} y_0 x -$$

$$- \frac{d^2 - 4R_s^2 \cos^2 i_0 - y_0^2 \sin^2 i_0}{16 \sin^2 i_0} y_0^2 = 0, \tag{7'}$$

avînd ca rădăcini :

$$x_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2} + \sqrt{Z_3}),$$

$$x_2 = \frac{1}{2} (\sqrt{Z_1} - \sqrt{Z_2} - \sqrt{Z_3}),$$

$$x_3 = \frac{1}{2} (-\sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2} - \sqrt{Z_3}), \tag{9}$$

$$x_4 = \frac{1}{2} (- \sqrt{Z_1} - \sqrt{Z_2} + \sqrt{Z_3}),$$

în care $Z_{1,2,3}$ sînt rădăcinile ecuației de ordinul trei

$$Z^3 + 2pZ^2 + (p^2 - 4r) Z - q^2 = 0 \tag{10}$$

sau

$$Z^3 - \frac{d^2 - 4R_s^2 \cos^2 i_0 + 2y_0^2 \sin^2 i_0}{2 \sin^2 i_0} Z^2 +$$

$$+ \frac{(d^2 - 4R_s^2 \cos^2 i_0) (d^2 - 4R_s^2 \cos^2 i_0 + 8y_0^2 \sin^2 i_0)}{16 \sin^4 i_0} Z -$$

$$- \frac{(d^2 + 4R_s^2 \cos^2 i_0)^2}{16 \sin^4 i_0} y_0^2 = 0, \tag{10'}$$

adică o ecuație de forma

$$Az^3 + Bz^2 + Cz + D = 0, \text{ cu } A = 1. \tag{10''}$$

Substituind

$$z = v - \frac{B}{3A} = v - \frac{B}{3}, \tag{11}$$

adică

$$z = v + \frac{d^2 - 4R_s^2 \cos^2 i_0 + 2y_0^2 \sin^2 i_0}{6 \sin^2 i_0},$$

rezultă o ecuație incompletă de gradul trei, lipsind termenul în v^2, de forma:

$$v^3 + Pv + Q = 0, \tag{12}$$

în care

$$P = \frac{3AC - B^2}{3A^2} = \frac{3C - B^2}{3}, \tag{13}$$

și

$$Q = \frac{2B^3}{27A^3} - \frac{BC}{3A^2} + \frac{D}{A} = \frac{2B^3}{27} - \frac{BC}{3} + D,$$

adică

$$P = -\frac{p^2 + 12r}{3}$$

și

$$Q = -\frac{2p^3}{27} + \frac{8pr}{3} - q^2 \tag{13'}$$

sau, utilizînd caracteristicile dimensionale corespunzătoare sapelor,

$$P = -\frac{(d^2 - 4R_s^2 \cos^2 i_0 - 4y_0^2 \sin^2 i_0)^2}{48 \sin^4 i_0}$$

și (13'')

$$Q = -\frac{864\, d^2 R_s^2 y_0^2 \sin^2 i_0 \cos^2 i_0 - (d^2 - 4R_s^2 \cos^2 i_0 - 4y_0^2 \sin^2 i_0)^3}{864 \sin^6 i_0},$$

ale cărei rădăcini sînt (prin aplicarea formulei lui Cardan):

$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}},$$

$$v_2 = \varepsilon_1 \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \varepsilon_2 \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}, \tag{14}$$

$$v_3 = \varepsilon_2 \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \varepsilon_1 \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}},$$

în care

$$\varepsilon_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \text{ și } \varepsilon_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \tag{15}$$

reprezintă rădăcinile de ordinul trei ale unității.

În funcție de semnul discriminantului

$$\Delta = \frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}, \tag{16}$$

rezultă felul rădăcinilor ecuației (12) în v, și anume :

— pentru $\Delta > 0$, corespund o rădăcină reală și două complex-conjugate,

— pentru $\Delta = 0$, corespund trei rădăcini reale (una dublă) și

— pentru $\Delta < 0$, corepund trei rădăcini reale, diferite.

Studiul variației discriminantului, funcție de caracteristicile dimensionale ale sapelor cu trei conuri,

$$\Delta = \frac{d^2 R_s^2 y_0^2 \cos^2 i_0}{1728 \sin^{10} i_0} [432\, d^2 R_s^2 y_0^2 \sin^2 i_0 \cos^2 i_0 - \\ - (d^2 - 4R_s^2 \cos^2 i_0 - 4y_0^2 \sin^2 i_0)^3], \tag{16'}$$

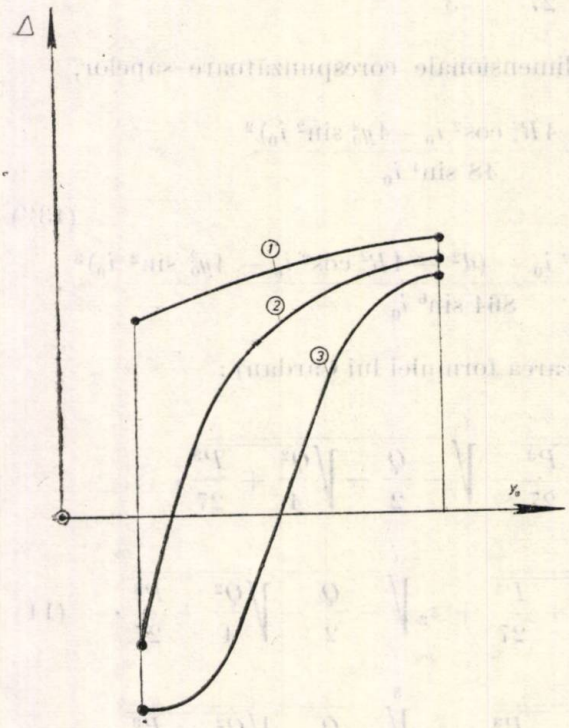


Fig. 2

a scos în evidență, pentru valorile uzuale folosite în practică, trei feluri de dependență, prezentate schematic prin graficele din figura 2, valorile parametrilor d și i_0 crescînd de la curbele de forma ① către curbele de forma ③. Se observă că, pentru cele mai mici valori ale diametrului conurilor și unghiului de înclinare, discriminantul este permanent pozitiv și că deci, în aceste cazuri, ecuația (12) de gradul trei în v admite o singură rădăcină reală.

Pentru rezolvarea ecuației (12) de gradul trei în v, se disting deci trei cazuri :

Primul caz, pentru $\Delta = 0$, va conduce la

$$v_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}}, \tag{14.1}$$

$$v_{2,3} = -\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}},$$

adică trei rădăcini reale, din care două confundate, de unde

$$Z_1 = 2\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}} + \frac{d^2 - 4R_s^2\cos^2 i_0 + 2y_0^2 \sin^2 i_0}{6\sin^2 i_0}$$

și (11.1)

$$Z_{2,3} = -\sqrt[3]{-\frac{Q}{2}} + \frac{d^2 - 4R_s^2\cos^2 i_0 + 2y_0^2 \sin^2 i_0}{6\sin^2 i_0},$$

cele patru rădăcini $y_{1,2,3,4}$ din care una reprezintă soluția căutată, rezultînd apoi prin aplicarea relațiilor (9) și respectiv (6).

Pentru celelalte două cazuri, se recurge la forma trigonometrică, prin aplicarea relației lui Moivre, avînd în vedere că în toate situațiile $P < 0$, conform relațiilor (13), (13′) sau (13″) și anume :

— pentru cazul $\Delta < 0$, se notează

$$-\frac{Q}{2} \pm i\sqrt{-\frac{Q^2}{4} - \frac{P^3}{27}} = R_2(\cos\varphi_2 \pm i \sin\varphi_2), \tag{17}$$

unde

$$R_2 = \sqrt{-\frac{P^3}{27}}$$

și (18)

$$\varphi_2 = \arccos\left(-\frac{Q}{2R_2}\right),$$

rezultă

$$v_{1,2,3} = 2\sqrt[3]{R_2}\cos\frac{\varphi_2 + 2K\,180^\circ}{3}, \tag{14.2}$$

în care $K = 0$, 1 și 2, adică trei rădăcini reale și diferite, rădăcinile $y_{1,2,3,4}$ calculîndu-se prin aplicarea consecutivă a relațiilor (11), (9) și (6);

— pentru cazul $\Delta > 0$, se notează

$$\sin\omega_3 = \frac{2}{Q}\sqrt{-\frac{P^3}{27}}$$

și (19)

$$\operatorname{tg}\varphi_3 = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega_3}{2}},$$

rezultînd

$$v_1 = -\frac{2\sqrt{-\frac{P}{3}}}{\sin 2\varphi_3}$$

și (14.3)

$$v_{2,3} = \frac{\sqrt{-\frac{P}{3}}}{\sin 2\varphi_3} \pm i\sqrt{-P}\operatorname{ctg} 2\varphi_3,$$

adică o rădăcină reală și două complexe conjugate; prin aplicarea relațiilor (11), rezultă

$$Z_1 = -\frac{2\sqrt{-\frac{P}{3}}}{\sin 2\varphi_3} + \frac{d^2 - 4R_s^2\cos^2 i_0 + 2y_0^2\sin^2 i_0}{6\sin^2 i_0},$$

$$Z_{2,3} = \frac{\sqrt{-\frac{P}{3}}}{\sin 2\varphi_3} + \frac{d^2 - 4R_s^2\cos^2 i_0 + 2y_0^2\sin^2 i_0}{6\sin^2 i_0} \pm \quad (11.3)$$

$$\pm i\sqrt{-P}\operatorname{ctg} 2\varphi_3,$$

dacă se notează

$$A_3 = \frac{\sqrt{-\frac{P}{3}}}{\sin 2\varphi_3} + \frac{d^2 - 4R_s^2\cos^2 i_0 + 2y_0^2\sin^2 i_0}{6\sin^2 i_0}, \quad (20)$$

$$B_3 = \sqrt{-P}\operatorname{ctg} 2\varphi_3,$$

precum și

$$R_{31} = \sqrt{A_3^2 + B_3^2}$$

și (21)

$$\varphi_{31} = \operatorname{arc\,tg}\frac{B_3}{A_3},$$

rezultă, de asemenea, prin aplicarea relației lui Moivre, cu observația că s-au considerat cîte o singură rădăcină de ordinul doi, cele pozitive, sumele radicalilor $\sqrt{Z_1}$ și $\sqrt{Z_3}$ fiind avute în vedere în relațiile (9),

$$\sqrt{Z_2} = \sqrt{R_{31}} \left(\cos \frac{\varphi_{31}}{2} + i. \sin \frac{\varphi_{31}}{2} \right)$$

și (22)

$$\sqrt{Z_3} = \sqrt{R_{31}} \left(\cos \frac{\varphi_{31}}{2} - \mathrm{i}. \sin \frac{\varphi_{31}}{2} \right),$$

înlocuind, relațiile (9) devin

$$x_1 = \frac{1}{2} \sqrt{Z_1} + \sqrt{R_{31}} \cos \frac{\varphi_{31}}{2},$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \sqrt{Z_1} - \sqrt{R_{31}} \cos \frac{\varphi_{31}}{2},$$

(9.3)

$$x_3 = -\frac{1}{2} \sqrt{Z_1} + \mathrm{i} \sqrt{R_{31}} \sin \frac{\varphi_{31}}{2},$$

$$x_4 = -\frac{1}{2} \sqrt{Z_1} - \mathrm{i} \sqrt{R_{31}} \sin \frac{\varphi_{31}}{2},$$

iar relația (6) devine, pentru cele două rădăcini reale rezultate,

$$y_{1,2} = x_{1,2} + \frac{y_0}{2}, \qquad (6.3)$$

din care o rădăcină trebuie să verifice relația de bază (1).

Cu ajutorul metodei de calcul prezentate, se pot rezolva mai multe categorii de probleme puse cercetării și proiectării construcției și tehnologiei de fabricație a sapelor cu trei conuri, cum sînt: calculul propriu-zis al diametrului și optimizarea dimensionării conurilor, studiul global și pentru fiecare cîmp de toleranță al dimensiunilor ce concură la determinarea diametrului sapei, cîmp necesar a fi impus pentru încadrarea în abaterea admisă la diametrul sapelor, în condiții tehnico-economice corespunzătoare.

În continuare, se dau două exemple de aplicație a metodei de calcul în discuție:

— *exemplul 1*, pentru calculul propriu-zis al diametrului sapelor cu trei conuri, cu întocmirea breviarelor de calcul necesare, la sapele TA—9.5/8 J și, respectiv, S—12¼ J, și anume: în tabelul 1 se determină semnul discriminantului conform relațiilor (16) și (16') al rădăcinilor v, corespunzătoare ecuației (12), în funcție de care calculul se continuă în

Tabelul 1. Determinarea semnului discriminantului Δ (16)

$D_s = 2R_s$, mm		244,5	311,2
(R_s) , mm		122,25	155,6
i_0 , °		54	57
y_0 , mm		2,0	9,5
d , mm		163,0	202,0
Nr crt.	Relația de calcul	Valorile rezultate din calcul	
1	d^2	26.569	40.804
2	R_s^2	14.945,062.5	24.211,36
3	$4 \cdot R_s^2 \cdot \cos^2 i_0$	20.653,568.24	28.727,425.85
4	y_0^2	4	90,25
5	$4\, y_0^2 \sin^2 i_0$	10,472.136.09	253,915.971.1
6	(1) − (3) − (5)	5.904,959.624	11.822,658.18
7	$(6)^3$	$2,058.973.7 \cdot 10^{17}$	$1,652.515 \cdot 10^{12}$
8	$(6)^2$	34.868.548,16	139.775.246,4
9	$P = -(8)/48 \cdot \sin^2 i_0$	−1.695.750,808	−5.886.042,414
10	$54 \cdot (1) \cdot (3) \cdot (5)$	$3,103.125.4 \cdot 10^{11}$	$1,607.243.2 \cdot 10^{13}$
11	$Q = -((10) - (7))/864 \sin^6 i_0$	431.026.490	$-4,736.256.10^{10}$
12	$\Delta = (11)^2/4 + (9)^3/27$	$-1,341.559.10^{17}$	$5,675.489.9 \cdot 10^{20}$

tabelele 2 și 3 pentru $\Delta < 0$ și, respectiv, $\Delta > 0$, din care rezultă valorile rădăcinilor y (verificate prin valorile d) și pozițiile corelate K_1, prin aplicarea relațiilor de calcul corespunzătoare, prezentate mai sus; caracteristicile dimensionale ale sapei TA—9.5/8 J, cu valoare mică pentru deplasarea axei conurilor ($y_0 = 2$ mm) și cu unghiul de înclinare $i_0 = 54°$, conduc la $\Delta < 0$ și la două rădăcini (reale) pozitive pentru ordonata y a punctului de intersecție, din care numai y_1 corespunde, așa cum rezultă și din calculul de verificare a valorii impuse diametrului conurilor d; pentru sapa S—$12^1/_4$ J, rezultă $\Delta > 0$, din cele două rădăcini reale verificînd cea notată cu y_1;

— *exemplul 2*, pentru calculul influenței cîmpului total al toleranțelor cotelor care alcătuiesc lanțul de dimensiuni al cotelor de poziție a diametrului conurilor, pe direcția axelor lor, în ipoteza că este consumat

Tabelul 2. **Calculul diametrului în cazul $\Delta < 0$**

	$D_s = 2R_s$, mm	244,5
	(R_s) , mm	122,25
	i_o , °	54
	y_o , mm	2,0
	d , mm	163,0
Nr crt	Relatia de calcul	Valorile rezultate din calcul
1	$R_2 = \sqrt{-P^3/27}$	424.972,822
2	$\varphi_2 = \arccos(-Q/2R_2)$	59,527.655
3	$(d^2 - 4R_s^2\cos^2 i_o + 2y_o^2\sin^2 i_o)/6\sin^2 i_o$	1.507,662.562
4	$z_1 = 2\sqrt[3]{R_2}\cos(\varphi_2/3) + (3)$	2.922,051.063
5	$z_2 = 2\sqrt[3]{R_2}\cos[(\varphi_2 + 2.180)/3] + (3)$	358,450.604
6	$z_3 = 2\sqrt[3]{R_2}\cos[(\varphi_2 + 4.180)/3] + (3)$	1.242,486.02
7	$y_1 = \left(\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}\right)/2 + \frac{y_o}{2}$	55,118.853.05
8	$y_2 = \left(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}\right)/2 + \frac{y_o}{2}$	0,937.146.25
9	$y_3 = \left(-\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} - \sqrt{z_3}\right)/2 + \frac{y_o}{2}$	— 34,186.061.35
10	$y_4 = \left(-\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3}\right)/2 + \frac{y_o}{2}$	— 17,869.937.95
11	verificare $d_1 = 2(y_1 - y_o)(y_1^2\sin^2 i_o + R_s^2\cos^2 i_o)^{1/2}/y_1$	163,0
12	verificare $d_2 = 2(y_2 - y_o)(y_2^2\sin^2 i_o + R_s^2\cos^2 i_o)^{1/2}/y_2$	— 163,0
13	verificare $d_3 = 2(y_3 - y_o)(y_3^2\sin^2 i_o + R_s^2\cos^2 i_o)^{1/2}/y_3$	163,0
14	verificare $d_4 = 2(y_4 - y_o)(y_4^2\sin^2 i_o + R_s^2\cos^2 i_o)^{1/2}/y_4$	163,0
15	y	55,118.853.05
16	$K_1 = (R_s^2 - y^2)^{1/2}/\sin i_o - [d^2/4 - (y - y_o)^2]^{1/2}/\operatorname{tg} i_o$	89,970

întregul cîmp de toleranţă al diametrului sapelor D_s (adică toate celelalte dimensiuni, care influenţează diametrul, se realizează la valori nominale); în tabelul 4, similar tabelului 1, se determină semnul discriminantului din

Tabelul 3 **Calculul diametrului în cazul $\Delta > 0$**

	$D_s = 2R_s$	mm	311,2
	(R_s)	mm	155,6
	i_0	°	57
	y_0	mm	9,5
	d	mm	202,0

Nr crt	Relaţia de calcul	Valorile rezultate din calcul
1	$\sin\omega_3 = \frac{2}{Q}\sqrt{-P^3/27}$	− 0,114.599.
2	$tg\,\varphi_3 = \sqrt[3]{tg(\omega_3/2)}$	− 0,385.947.23
3	$2\varphi_3$	− 42,207.914°
4	$-2\sqrt{-P/3}\,/\sin 2\varphi_3$	4.169,905.875
5	$(d^2 - 4R_s\cos^2 i_0 + 2y_0\sin^2 i_0)/6\sin^2 i_0$	2.891,688.321
6	$z_1 = ④ + ⑤$	7.061,594.196
7	$\sqrt{-P/3}\,/\sin 2\varphi_3 = -④/2$	− 2.084,952.937
8	$A_3 = ⑦ + ⑤$	806,735.384
9	$B_3 = \sqrt{-P}\;ctg\,2\varphi_3$	− 2.674,891.392
10	$R_{31} = \sqrt{A_3^2 + B_3^2} = \sqrt{⑧^2 + ⑨^2}$	2.793,897.98
11	$\varphi_{31} = arc\,tg(B_3/A_3) = arc\,tg(⑨/⑧)$	− 73,216.922°
12	$\sqrt{R_{31}}\cos(\varphi_{31}/2)$	42,311.266.4
13	$\sqrt{z_1}/2 = \sqrt{⑥}/2$	41,903.820.9
14	$y_1 = ⑫ + ⑬ + y_0/2$	89,196.785.32
15	$y_2 = -⑫ + ⑬ + y_0/2$	4,336.506.78
16	verificare $d_1 = 2(y_1 - y_0)(y_1^2\sin^2 i_0 + R_s^2\cos^2 i_0)^{1/2}/y_1$	202,0
17	verificare $d_2 = 2(y_2 - y_0)(y_2^2\sin^2 i_0 + R_s^2\cos^2 i_0)^{1/2}/y_2$	− 202,0
18	y	89,196.785.32
19	$K_1 = (R_s^2 - y^2)^{1/2}/\sin i_0 - [d^2/4 - (y - y_0)^2]^{1/2}/tg\,i_0$	111,730

relațiile de calcul pentru rădăcinile ecuației (12), iar în tabelele 5 și 6 se calculează variațiile maxime pentru cotele de poziție K_1, ale căror valori rezultate sînt 0,553, pentru sapa TA—9.5/8 J și, respectiv, 0,581 mm, pentru sapa S—12¼ J.

Primită la redacție la 7 noiembrie 1979

Tabelul 5. Determinarea semnului discriminantului Δ, în cazul $D_{s\,max.}$

$D_{s\,max.} = 2R_s$, mm		244,5+0,8 = 245,3	311,2+0,8 = 312,0
$(R_{s\,max.})$, mm		122,65	156,0
i_0 , °		54	57
y_0 , mm		2	9,5
d , mm		163,0	202,0
Nr crt.	Relația de calcul	Valorile rezultate din calcul	
1	d^2	26.569	40.804
2	R_s^2	15.043,022.5	24 336
3	$4R_s^2 \cos^2 i_0$	20 733,945 63	28.875,314.54
4	y_0^2	4	90,250
5	$4y_0^2 \sin^2 i_0$	10,472.136.09	253,915.971.1
6	(1)−(3)−(5)	5769,582.234	11.674,769.49
7	$(6)^3$	$1,920.583.1 \cdot 10^{11}$	$1691.273 \cdot 9.10^{12}$
8	$(6)^2$	33.288079,15	136.300.242,6
9	$P = -(8)/48 \sin^4 i_0$	− 1.618.888,367	−5.739.707,485
10	$54 \cdot (1) \cdot (3) \cdot (5)$	$3,123\,465.4 \cdot 10^{11}$	$1,615.523.3 \cdot 10^{13}$
11	$Q = -[(10)-(7)]/864 \sin^6 i_0$	− 496.550.583,2	− $4,844.146.2 \cdot 10^{15}$
12	$\Delta = (11)^2/4 + (9)^3/27$	− $9,549.944 \cdot 10^{16}$	$5,736.404.5 \cdot 10^{20}$

Tabelul 5. Calculul variației maxime a cotei de poziție K_1, în cazul $\Delta < 0$

$D_{S_{max}} = 2R_{S_{max}}$	mm	245,3
$(R_S)_{max}$	mm	122,65
i_0	°	54
Y_0	mm	2,0
d	mm	163,0

Nr. crt.	Relația de calcul	Valoarea rezultată din calcul
1	$R_2 = \sqrt{-P^3/27}$	396.408.955
2	$\cos \varphi_2 = -Q/2R_2$	0,626.310.969
3	φ_2	51,221.526°
4	$(d^2 - 4R_S^2 \cos^2 i_0 + 2y_0^2 \sin^2 i_0)/6 \sin^2 i_0$	1473,189.521
5	$z_1 = 2\sqrt[3]{R_2} \cos(\varphi_2/3) + ④$	2877,627.648
6	$z_2 = 2\sqrt[3]{R_2} \cos[(\varphi_2 + 2\cdot 180)/3] + ④$	397,401.837
7	$z_3 = 2\sqrt[3]{R_2} \cos[(\varphi_2 + 4\cdot 180)/3] + ④$	1144,539.004
8	$y = (\sqrt{z_1} + \sqrt{z_2} + \sqrt{z_3})/2 + Y_0/2$	54,704.750.75
9	verificare $d = 2(y - y_0)(y^2 \sin^2 i_0 + R_S^2 \cos^2 i_0)^{1/2}/y$	163,0
10	$K_1' = (R_S - y^2)^{1/2}/\sin i_0 - [d^2/4 - (y - y_0)^2]^{1/2}/\operatorname{tg} i_0$	90,523.230.5
11	$\Delta K_1 = \lvert K_1 - ⑩ \rvert$	0,553

Tabelul 6 Calculul variației maxime a cotei de poziție $K_{1,}$ în cazul $\Delta > 0$

	$D_{s\,max} = 2R_s$, mm	311,2+0,8 = 312,0
	$(R_{s\,max})$, mm	156,0
	i_0 , 0	57
	y_0 , mm	9,5
	d , mm	202,0
Nr. crt.	Relația de calcul	Valorile rezultate din calcul
1	$\sin \omega_3 = 2\sqrt{-p^3/27}/q$.	−0,109.261.081
2	$tg\ \varphi_3 = \sqrt[3]{tg\ \omega_3/2}$	−0,379.821.16
3	$2\ \varphi_3$	−41, 595.674 °
4	$-2\sqrt{-p/3}/\sin 2\ \varphi_3$	4.167,075.482
5	$(a^2 + 4R_s^2 \cos^2 i_0 + 2y_0 \sin^2 i_0)/6\sin^2 i_0$	2.856,645.352
6	$z_1 = ④ + ⑤$	7.023,720.834
7	$\sqrt{-p/3}/\sin 2\ \varphi_3 = -④/2$	−2.083,537.741
8	$A_3 = ⑦ + ⑤$	773,107.611
9	$B_3 = \sqrt{-p}\ ctg\ 2\ \varphi_3$	−2.693,829.569
10	$R_{31} = \sqrt{A_3^2 - B_3^2} = \sqrt{⑧^2 + ⑨^2}$	2807,378.92
11	$\varphi_{31} = arctg\ (B_3/A_3) = arctg\ (⑨/⑧)$	− 74, 015.093°
12	$\sqrt{R_{31}}\ \cos(\varphi_{31}/2)$	72,311.266.4
13	$\sqrt{z_1}/2 = \sqrt{⑥}/2$	41,903.320.9
14	$y = ⑫ + ⑬ + y_0/2$	88,965.087.3
15	verificare $d_1 = 2(y-y_0)(y^2\sin^2 i_0 + R_s^2 \cos^2 i_0)^{1/2}/y$	202,0
16	$K_1 = (R_s^2 - y^2)^{1/2}/\sin i_0 - [d^2/4 - (y-y_0)^2]^{1/2}/tg\ i_0$	112,311.533
17	$\Delta K1 = \lvert ⑯ - k_{11} \rvert$	0,581

BIBLIOGRAFIE

1. D. Constantinescu, N.V. Mereanu, *Sape de foraj*, Edit. tehnică, București, 1970.
2. D. Constantinescu, E. Spătaru, *Procedeu de calcul al diametrului sapelor cu trei conuri*, Rev. Petrol și Gaze, *10*, (1975).
3. N. Mihăilescu și colectiv, *Memorator matematic și fizic*, Edit. tehnică, București, 1955.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 39, nr. 3 mai—iunie 1980

SUMAR

STUDII

RADU IOVĂNESCU, Metoda de calcul a stărilor de tensiune dintr-o structură axial simetrică de tip mixt, alcătuită dintr-o învelitoare cilindrică îmbinată cu o învelitoare sferică 329

ADRIAN POCANSCHI, ION OLARIU, Diafragme absorbante cu inserţie elastic biliniară 349

TRAIAN BĂDOIU, Algoritmi de generare automată de elemente finite conforme şi de înaltă precizie pentru problemele la limită ale teoriei elasticităţii. II 359

ALECSANDRU D. STAN, Mişcarea printr-un spaţiu inelar permeabil 371

D. LARIONESCU, Aspecte matematice ale sintezei mecanismelor ce utilizează aproximarea în sensul lui Cebîşev 383

IOAN CRĂCIUN, Contribuţii la sinteza sistemelor în lanţ şi ramificate ce execută vibraţii de torsiune. I 391

M. BUCULEI, D. MARGHITU, Ecuaţii de mişcare pentru vibraţiile elementelor cinematice ale mecanismelor plane, cu axa linie poligonală 415

GEORGE DOBRE, Suma lungimilor liniilor de contact la angrenajul cilindric cu dinţi înclinaţi în evolventă 421

GH. ZECHERU, D. RAŞEEV, O metodă pentru estimarea rezistenţei la iniţierea ruperii în piesele metalice destinate exploatării la temperaturi scăzute 431

LUCIAN CĂPITANU, ALEXANDRU SANDU, Cercetări privind creşterea durabilităţii articulaţiilor bolţ-bucşă, la lanţurile de şenile ale tractoarelor agricole şi industriale 441

A. PAVEL, Evaluarea posibilităţii de prelungire a duratei efective de serviciu, dincolo de durata de serviciu de calcul, la serpentinele de reacţie ale cuptoarelor tubulare tehnologice petrochimice. I 449

RECENZII 463

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 39, nr. 3 mai—iunie 1980

SUMAR

STUDII

RADU IOVĂNESCU. Metoda de calcul a stărilor de tensiune dintr-o structură axial simetrică de tip mixt, alcătuită dintr-o invelitoare cilindrică îmbinată cu o invelitoare sferică 329

ADRIAN POCANSCHI, ION OLARIU. Diafragme absorbante cu inserție elastic bilinieră 349

TRAIAN RĂDOIU. Algoritmi de generare automată de elemente finite conforme și de înaltă precizie pentru problemele la limită ale teoriei elasticității. II 359

ALECSANDRU D. STAN. Mișcarea printr-un spațiu fluelar permeabil 371

D. LARIONESCU. Aspecte matematice ale sintezei mecanismelor va utilizează aproximarea în sensul lui Gebiev 383

IOAN GRĂCIUN. Contribuții la sinteza sistemelor în lanț și ramificate ce execută vibrații de torsiune. I 391

M. BUCULEI, D. MARGHITU. Ecuații de mișcare pentru vibrațiile elementelor cinematice ale mecanismelor plane, cu axa linie poligonală 415

GEORGE DOBRE. Suma funcțiilor liniilor de contact la ungrenajul cilindric cu dinți înclinați în evolventă 421

GH. ZECHERU, D. BASEEV. O metodă pentru estimarea rezistenței la inițierea ruperii la piesele metalice destinate exploatării la temperaturi scăzute 431

LUCIAN CĂPITANU, ALEXANDRU SANDU. Cercetări privind creșterea durabilității articulațiilor bolț-bucșă, la lanțurile de șenile ale tractoarelor agricole și industriale 441

A. PAVEL. Evaluarea posibilității de prelungire a duratei efective de serviciu, dincolo de durata de serviciu de calcul, la serpentinele de reactie ale cuptoarelor tubulare tehnologice petrochimice. I 449

RECENZII 463

METODA DE CALCUL A STĂRILOR DE TENSIUNE DINTR-O STRUCTURĂ AXIAL SIMETRICĂ DE TIP MIXT, ALCĂTUITĂ DINTR-O ÎNVELITOARE CILINDRICĂ ÎMBINATĂ CU O ÎNVELITOARE SFERICĂ

de IOVĂNESCU RADU
I.F.T.M. București

În lucrare se propune o metodă analitică de calcul a stărilor de tensiune ce apar într-o structură axial simetrică, alcătuită din două tipuri de învelitori : una cilindrică, alta sferică. Dezvoltarea funcțiilor de deplasare în serii de un tip nou de polinoame, derivate din polinoamele Legendre, în raport cu parametrul ce variază pe meridianul structurii permite obținerea unei soluții ce satisface exact condițiile de margine.

1. INTRODUCERE

Lucrarea prezintă o metodă de calcul analitică, fiind cunoscut faptul că metodele bazate pe discretizare, de tip element finit, nu dau întotdeauna rezultate satisfăcătoare în calculul învelitorilor.

Structura, în ansamblul ei, fiind axial simetrică, permite utilizarea seriilor trigonometrice în reprezentarea funcțiilor de deplasare necunoscute, în secțiune orizontală.

Plecîndu-se de la ecuațiile teoriei învelitorilor subțiri elastice [1], particularizate la cazul învelitorilor cilindrice, respectiv sferice, problema a putut fi redusă, pentru o armonică oarecare, la două sisteme de ecuații diferențiale, ordinare de ordinul opt — unul pentru cilindru, celălalt pentru sferă — avînd corespunzător și condiții la limită.

Pentru rezolvarea acestor sisteme s-a apelat la un tip nou de dezvoltare polinomială a funcțiilor de deplasare, în raport cu parametrul ce variază pe meridianul structurii. Este vorba de un sistem complet de polinoame, derivate din polinoamele Legendre, care prezintă două mari avantaje și anume :

— se pot satisface exact condițiile la limită ale problemei, reținînd doar un număr finit de termeni din aceste dezvoltări ;

— operația de derivare a acestor polinoame se efectuează cu o deosebită ușurință.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 3, 1980, P. 329—348

Astfel, necunoscutele problemei fiind primii coeficienţi ai acestor dezvoltări polinomiale, ele vor fi determinate dintr-un sistem finit de ecuaţii algebrice, ce asigură satisfacerea riguroasă a condiţiilor la limită şi a continuităţii cilindru-sferă, precum şi satisfacerea ecuaţiilor de echilibru pentru cilindru, respectiv sferă, cu o anumită aproximaţie.

2. ECUAŢIILE ÎNVELITORII CILINDRICE CIRCULARE

Pentru suprafaţa mediană a învelitorii cilindrice circulare, se va considera următoarea reprezentare parametrică :

$$x = R\cos\frac{s}{R},$$

$$y = R\sin\frac{s}{R}, \tag{2.1}$$

$$z = z,$$

unde R este raza cilindrului circular ce corespunde acestei suprafeţe, s este lungimea arcului măsurat pe cercul de rază R şi corespunzînd coordonatei polare θ ($s = \theta R$), iar z este cota pe verticala cilindrului (fig. 1).

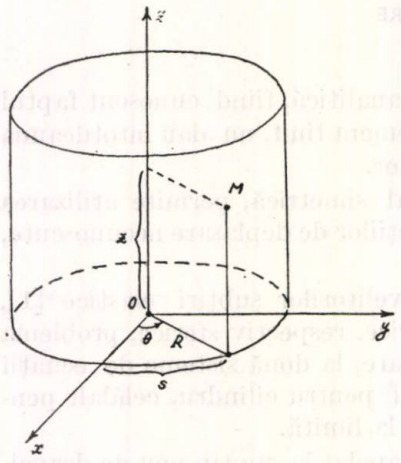


Fig. 1

În acest mod poziţia unui punct oarecare M, situat pe suprafaţa mediană a învelitorii, va fi determinată dacă se cunosc coordonatele curbi linii s şi z.

Coeficienţii primelor două forme fundamentale ale suprafeţei mediane, rezultaţi din reprezentarea (2.1), vor fi :

$$A = 1,\ B = 1,$$

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R},\ \frac{1}{R_2} = 0, \tag{2.2}$$

curbele coordonate fiind ortogonale.

Dacă se vor considera drept funcţii necunoscute ale problemei, cele trei componente $u(s, z)$, $v(s, z)$, $w(s, z)$ ale vectorului deplasare :

$$\vec{U}(s, z) = u(s, z)\,\vec{t}_1 + v(s, z)\,\vec{t}_2 - w(s, z)\,\vec{n}, \tag{2.3}$$

$\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$, şi $\vec{n}$ fiind versorii sistemului local de coordonate (fig. 2) generat de (2.1), atunci sistemul de ecuaţii în deplasări corespunzînd învelitorii cilindrice circulare, va avea aspectul :

a) ecuaţiile de echilibru :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s\,\partial z} - \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial s} + \frac{h^2}{3R}\frac{\partial}{\partial s}\Delta w = -\frac{1-\nu^2}{2Eh}X,$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial z}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\frac{\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1-\nu^2}{2Eh}Y,$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\nu}{R}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{1}{R^2}w-\frac{h^2}{3R}\frac{\partial}{\partial s}\left[\Delta u+(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right]-\frac{h^2}{3}\Delta\Delta w=\tag{2.4}$$

$$=-\frac{1-\nu^2}{2Eh}Z,$$

b) ecuaţiile fizico-geometrice :

$$T_1=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial s}+\nu\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{w}{R}\right),$$

$$T_2=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial z}-\nu\frac{w}{R}\right),$$

$$S_1=-S_2=\frac{Eh}{1+\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial s}\right)$$

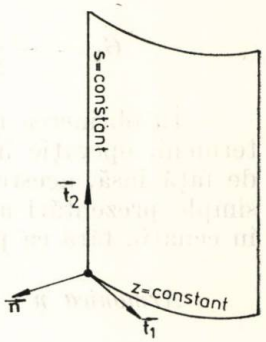


Fig. 2

$$G_1=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),\tag{2.5}$$

$$G_2=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\nu}{R}\frac{\partial u}{\partial s}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right),$$

$$H_1=-H_2=\frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial z}\right),$$

$$N_1=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}+\frac{1-\nu}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial s\,\partial z^2}\right),$$

$$N_2=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial z}+\frac{\partial^3 w}{\partial s^2\,\partial z}+\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}\right),$$

c) condiţiile la limită în lungul unui cerc $z=\text{const.}$, acest gen de margini fiind singurele ce apar în cazul axial simetric. După cum se ştie din teoria învelitorilor subţiri elastice, pe o margine există opt mărimi cărora li se pot impune patru condiţii la limită. În cazul de faţă aceste mărimi sînt :

$$u\,;\ v\,;\ w\,;\ \gamma_2=-\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$T_2 = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\nu}{R}w\right),$$

$$S_2' = -\frac{Eh}{1+\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{2h^2}{3R}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial z}\right),$$

$$N_2' = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{2-\nu}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial z} + (2-\nu)\frac{\partial^3 w}{\partial s^2\partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial z^3}\right], \tag{2.6}$$

$$G_2 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\nu}{R}\frac{\partial u}{\partial s} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right).$$

În obținerea relațiilor (2.4), (2.5) și (2.6) s-au neglijat o parte din termeni, operație inevitabilă în calculul tehnic al învelitorilor. În cazul de față însă, aceste neglijări au fost efectuate doar în scopul unei mai simple prezentări a metodei, acești termeni putînd oricînd fi introduși în ecuații, fără ca procedeul de calcul să aibă de suferit.

Armonica n

După cum s-a menționat deja, funcțiile ce apar în ecuații se vor dezvolta în serii trigonometrice în raport cu unghiul $\theta = s/R$. În plus, structura ecuațiilor permite rezolvarea distinctă a problemei în cazul unei solicitări simetrice sau a unei solicitări antisimetrice, ecuațiile care rezultă în cazul antisimetric, obținîndu-se din cele ale cazului simetric prin modificarea cîtorva semne.

Corespunzător celor două cazuri, rezultă pentru deplasări următoarele reprezentări :

A) cazul simetric :

$$u(s,z) = \sum_{n=1}^{N} u_n(z)\sin n\frac{s}{R},$$

$$v(s,z) = \sum_{n=0}^{N} v_n(z)\cos n\frac{s}{R}, \tag{2.7}$$

$$w(s,z) = \sum_{n=0}^{N} w_n(z)\cos n\frac{s}{R},$$

B) cazul antisimetric :

$$u(s,z) = \sum_{n=0}^{N} u_n(z)\cos n\frac{s}{R},$$

$$v(s,z) = \sum_{n=1}^{N} v_n(z)\sin n\frac{s}{R}, \tag{2.8}$$

$$w(s,z) = \sum_{n=1}^{N} w_n(z)\sin n\frac{s}{R},$$

N fiind numărul de armonice luate în considerație în reprezentarea în serie trigonometrică a sarcinii exterioare.

Introducînd aceste reprezentări în relațiile (2.4), (2.5) și (2.6), se obțin, pentru o armonică oarecare n, relațiile următoare :

1°. ecuațiile de echilibru :

$$-\frac{n^2}{R^2}u_n+\frac{1-\nu}{2}u_n''\mp\frac{1+\nu}{2}\frac{n}{R}v_n'\pm\frac{n}{R^2}w_n=-\frac{1-\nu^2}{2Eh}X_{ns}(X_{nc}),$$

$$\pm\frac{1+\nu}{2}\frac{n}{R}u_n'-\frac{1-\nu}{2}\frac{n^2}{R^2}v_n+v_n''-\frac{\nu}{R}w_n'=-\frac{1-\nu^2}{2Eh}Y_{nc}(Y_{ns}), \quad (2.9)$$

$$\pm\frac{n}{R^2}u_n+\frac{\nu}{R}v_n'-\frac{1}{R^2}w_n-\frac{h^2}{3}w_n^{IV}=-\frac{1-\nu^2}{2Eh}Z_{nc}(Z_{ns}),$$

2°. mărimi disponibile pentru impunerea condițiilor la limită :

$$u_n\,;\ v_n\,;\ w_n\,;\ \gamma_{2n}=-w_n'.$$

$$T_{2n}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\pm\nu\frac{n}{R}u_n+v_n'-\frac{\nu}{R}w_n\right),$$

$$S_{2n}'=-\frac{Eh}{1+\nu}\left(u_n'\mp\frac{n}{R}v_n\mp\frac{2h^2}{3}\frac{n}{R^2}w_n'\right), \quad (2.10)$$

$$N_{2n}'=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[\pm(2-\nu)\frac{n}{R^2}u_n'+w_n'''-(2-\nu)\frac{n^2}{R^2}w_n'\right],$$

$$G_{2n}=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\pm\frac{\nu}{R^2}n\cdot u_n+w_n''-\nu\frac{n^2}{R^2}w_n\right),$$

3°. mărimi de calculat în final. Este vorba de mărimi ce caracterizează starea de deformare și de tensiune a învelitorii cum sînt componentele deplasării, tensiunile și momentele :

$$u_n\,;\ v_n\,;\ w_n,$$

$$T_{1n}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\pm\frac{n}{R}u_n+\nu v_n'-\frac{1}{R}w_n\right), \quad (2.11)$$

$$T_{2n}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\pm\nu\frac{n}{R}u_n+v_n'-\frac{\nu}{R}w_n\right),$$

$$S_{1n} = -S_{2n} = \frac{Eh}{1+\nu}\left(u_n' \mp \frac{n}{R} v_n\right),$$

$$G_{1n} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\pm \frac{n}{R^2} u_n + \nu w_n'' - \frac{n^2}{R^2} w_n\right),$$

$$G_{2n} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\pm \frac{\nu n}{R^2} u_n + w_n'' - \nu \frac{n^2}{R^2} w_n\right),$$

$$H_{1n} = -H_{2n} = \frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\left(\frac{1}{R} u_n' \mp \frac{n}{R} w_n'\right),$$

$$N_{2n} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\pm \frac{n}{R^2} u_n' + w_n''' - \frac{n^2}{R^2} w_n'\right).$$

În locurile unde, în relațiile (2.9), (2.10) și (2.11), apar două semne, cel de deasupra corespunde întotdeauna cazului simetric. Aceste trei grupe de relații vor fi folosite efectiv în cadrul algoritmului și al programului de calcul și în acest scop se vor pune sub o formă matriceală.

Se va nota cu $\{d_n\}$ vectorul ce conține componentele deplasării și derivatele lor pînă la ordinul maxim cu care intervin în aceste relații:

$$\{d_n\}^T = \{u_n, u_n', u_n'', v_n, v_n', v_n'', w_n, w_n', w_n'', w_n''', w_n^{IV}\}. \tag{2.12}$$

Atunci, relațiile (2.9), (2.10) și (2.11) se vor scrie respectiv:

$$[E_n^c]\{d_n\} = \{f_n\}, \tag{2.13}$$

$$\{c_n\} = [CL_n^c] \cdot \{d_n\}, \tag{2.14}$$

și

$$\{r_n\} = [RF_n^c]\{d_n\}, \tag{2.15}$$

indicele c corespunzînd învelitorii cilindrice.

3. ECUAȚIILE ÎNVELITORII SFERICE

Reprezentarea parametrică adoptată în cazul suprafeței sferice este cea generată de sistemul coordonatelor sferice:

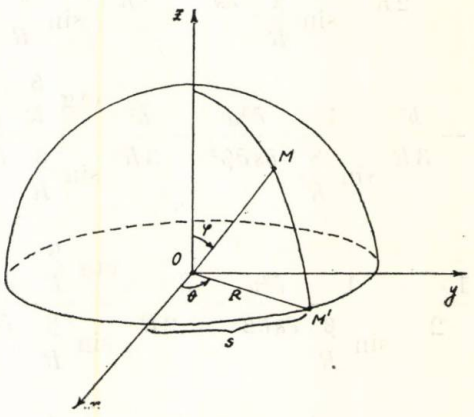
$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\varphi \cos\theta, \\ y &= \rho \sin\varphi \sin\theta, \\ z &= \rho \cos\varphi, \end{aligned} \tag{3.1}$$

în care se ia $\rho = R = \text{const.}$ (fig. 3). Dacă în locul parametrilor unghiulari se aleg în mod corespunzător parametrii lungimi de arce :

$$s = \theta \cdot R, \qquad \beta = \varphi \cdot R, \tag{3.2}$$

reprezentarea parametrică a suprafeței sferice capătă forma finală :

$$x = R \sin \frac{\beta}{R} \cos \frac{s}{R}, \quad y = R \sin \frac{\beta}{R} \sin \frac{s}{R}, \quad z = R \cos \frac{\beta}{R}. \tag{3.3}$$



F 3

Coeficienții primelor două forme fundamentale ale acestei suprafețe, ce rezultă din (3.3), sînt :

$$A = \sin \frac{\beta}{R}, \; B = 1, \qquad \frac{1}{R_1} = -\frac{1}{R}, \; \frac{1}{R_2} = -\frac{1}{R}. \tag{3.4}$$

Necunoscutele problemei vor fi din nou componentele vectorului deplasare :

$$\vec{U}(s, \beta) = u(s, \beta)\,\vec{t}_1 + v(s, \beta)\,\vec{t}_2 - w(s, \beta)\,\vec{n}, \tag{3.5}$$

în sistemul local de versori $\vec{t}_1$, $\vec{t}_2$ și $\vec{n}$ (fig. 4).

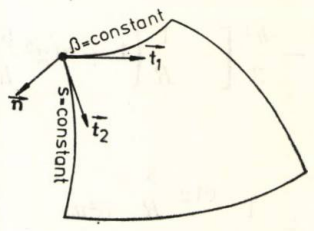


Fig. 4

Particularizarea ecuațiilor generale ale teoriei învelitorilor subțiri elastice [1] la cazul învelitorii sferice și exprimarea lor în deplasări, conduce la :

a) ecuațiile de echilibru :

$$\left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{R}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} + \frac{1-\nu}{2R} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{R} \frac{\partial u}{\partial \beta} +$$

$$+ \frac{1-\nu}{2R}\left(1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{R}\right) u + \frac{1+\nu}{2} \frac{1}{\sin \frac{\beta}{R}} \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \beta} +$$

$$+\frac{3-\nu}{2R}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{1+\nu}{R}\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial w}{\partial s}-\frac{h^2}{3R}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}-$$

$$-\frac{h^2}{3R}\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial^3 w}{\partial s\,\partial\beta^2}-\frac{h^2}{3R^2}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial\beta}=-\frac{1-\nu^2}{2Eh}X, \tag{3.6}$$

$$\frac{1+\nu}{2}\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial\beta}-\frac{3-\nu}{2R}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1-\nu}{2}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+$$

$$+\frac{1}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\frac{\partial v}{\partial\beta}-\frac{1}{R^2}\left(\nu+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)v+\frac{1+\nu}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta}-$$

$$-\frac{h^2}{3R}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial s^2\,\partial\beta}-\frac{h^2}{3R}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}+\frac{2h^2}{3R^2}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-$$

$$-\frac{h^2}{3R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{h^2}{3R^3}\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta}=-\frac{1-\nu^2}{2Eh}Y,$$

$$-\frac{1+\nu}{R}\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{1+\nu}{R}\frac{\partial v}{\partial\beta}-\frac{1+\nu}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}v-\frac{2(1+\nu)}{R^2}w-$$

$$-\frac{h^2}{3}\left[-\frac{1}{R}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}-\frac{2-\nu}{R}\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial^3 u}{\partial s\,\partial\beta^2}+\right.$$

$$+\frac{1}{R^2}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial\beta}-\frac{1}{R^3}\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{2-\nu}{R}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial^3 v}{\partial s^2\,\partial\beta}-$$

$$-\frac{1}{R}\frac{\partial^3 v}{\partial\beta^3}-\frac{1}{R^2}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}-\frac{2}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+$$

$$+\frac{1}{R^3}\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\frac{\partial v}{\partial\beta}-\frac{1}{R^4}\operatorname{ctg}^3\frac{\beta}{R}v+\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)^2\frac{\partial^4 w}{\partial s^4}+$$

$$+2\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial s^2\partial\beta^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial\beta^4}-\frac{2}{R}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\frac{\partial^3 w}{\partial s^2\partial\beta}+$$

$$+\frac{2}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}+\frac{1}{R^2}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\left(3-\nu+4\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}-$$

$$-\frac{1}{R^2}\left(1+\nu+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-\frac{1}{R^3}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\left(\nu-2-\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial w}{\partial\beta}=$$

$$=-\frac{1-\nu^2}{2Eh}Z;$$

b) ecuațiile fizico-geometrice :

$$T_1=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial u}{\partial s}+\nu\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{1}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}v+\frac{1+\nu}{R}w\right],$$

$$T_2=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\nu}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{\nu}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}v+\frac{1+\nu}{R}w\right],$$

$$S_1=-S_2=\frac{Eh}{1+\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}-\frac{1}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}u+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial v}{\partial s}\right),$$

$$G_1=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{\nu}{R}\frac{\partial v}{\partial\beta}-\frac{1}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}v+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sin^2\frac{\beta}{R}}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{1}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right), \qquad (3.7)$$

$$G_2=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(-\frac{\nu}{R}\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\beta}-\frac{\nu}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}v+\right.$$

$$\left.+\frac{\nu}{\sin^2\frac{\beta}{R}}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{\nu}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right),$$

$$H_1 = -H_2 = \frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\left(-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{1}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}u-\frac{1}{R}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial v}{\partial s}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial\beta}-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\frac{\partial w}{\partial s}\right),$$

$$N_1 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[-\frac{1}{R}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-\frac{1-\nu}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}-\right.$$

$$-\frac{1-\nu}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\frac{1-\nu}{R^3}\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}-1\right)u-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial s\,\partial\beta}+$$

$$+\frac{\nu-2}{R^2}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial v}{\partial s}+\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial^3 w}{\partial s^3}+\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial^3 w}{\partial s\,\partial\beta^2}+$$

$$\left.+\frac{1}{R}\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial\beta}+\frac{1-\nu}{R^2}\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\cdot\frac{\partial w}{\partial s}\right],$$

$$N_2 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial\beta}+\frac{2-\nu}{R^2}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}}{\sin\frac{\beta}{R}}\frac{\partial u}{\partial s}-\right.$$

$$-\frac{1-\nu}{R}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}-\frac{1}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\frac{\partial v}{\partial\beta}+$$

$$+\frac{1}{R^3}\left(\nu+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)v+\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial s^2\,\partial\beta}+\frac{\partial^3 w}{\partial\beta^3}-$$

$$-\frac{2}{R}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\frac{1}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}-$$

$$\left.-\frac{1}{R^2}\left(\nu+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial w}{\partial\beta}\right],$$

c) condiţiile la limită pe o margine $\beta = \text{const.}$ se vor putea impune la patru dintre următoarele opt mărimi :

$$u\,;\quad v\,;\quad w\,;\quad \gamma_2 = +\frac{1}{R}\,v - \frac{\partial w}{\partial \beta},$$

$$T_2 = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\frac{\nu}{\sin\frac{\beta}{R}}\,\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{\nu}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\,v + \frac{1+\nu}{R}\,w\right), \tag{3.8}$$

$$S_2' = -\frac{Eh}{1+\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial \beta} - \frac{1}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\,u + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\cdot\frac{\partial v}{\partial s} + \right.$$

$$\left. + \frac{2h^2}{3R}\,\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\,\frac{\partial^2 w}{\partial s\,\partial \beta} - \frac{2h^2}{3R^2}\,\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}}{\sin\frac{\beta}{R}}\cdot\frac{\partial w}{\partial s}\right),$$

$$N_2' = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[-\frac{2-\nu}{R}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial \beta} + \frac{3-2\nu}{R^2}\,\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}}{\sin\frac{\beta}{R}}\,\frac{\partial u}{\partial s} - \right.$$

$$- \frac{2(1-\nu)}{R}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{1}{R}\,\frac{\partial^2 v}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\,\frac{\partial v}{\partial \beta} +$$

$$+ \frac{1}{R^3}\left(\nu + \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)v + (2-\nu)\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial^3 w}{\partial s^2\,\partial \beta} + \frac{\partial^3 w}{\partial \beta^3} - \cdot$$

$$- \frac{3-\nu}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + \frac{1}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\,\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} -$$

$$\left. - \frac{1}{R^2}\left(\nu + \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial w}{\partial \beta}\right],$$

$$G_2 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[-\frac{\nu}{R}\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\cdot\frac{\partial u}{\partial s}-\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial\beta}-\frac{\nu}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}v+\right.$$

$$\left.+\nu\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}+\frac{\nu}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\frac{\partial w}{\partial\beta}\right].$$

Armonica n

Ca și în cazul învelitorii cilindrice, vor rezulta pentru deplasări următoarele două grupe de dezvoltări :

A) cazul simetric :

$$u(s,\beta)=\sum_{n=1}^{N}u_n(\beta)\sin n\frac{s}{R},$$

$$v(s,\beta)=\sum_{n=0}^{N}v_n(\beta)\cos n\frac{s}{R}, \tag{3.9}$$

$$w(s,\beta)=\sum_{n=0}^{N}w_n(\beta)\cos n\frac{s}{R};$$

B) cazul antisimetric :

$$u(s,\beta)=\sum_{n=0}^{N}u_n(\beta)\cos n\frac{s}{R},$$

$$v(s,\beta)=\sum_{n=1}^{N}v_n(\beta)\sin n\frac{s}{R}, \tag{3.10}$$

$$w(s,\beta)=\sum_{n=1}^{N}w_n(\beta)\sin n\frac{s}{R},$$

numărul N de termeni fiind dat de numărul de armonice conținute de reprezentarea în serie trigonometrică a sarcinii exterioare ce acționează asupra structurii.

Din relațiile (3.6), (3.7) și (3.8), rezultă pentru armonica n următoarele :

1°. ecuațiile de echilibru :

$$\frac{1-\nu}{2}u_n''+\frac{1-\nu}{2R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}u_n'+\frac{1}{R^2}\left[\frac{1-\nu}{2}\left(1-\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)-\right.$$

$$n^2 - \left(1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{R}\right)\Bigg] u_n \mp \frac{(1+\nu)n}{2R} \frac{1}{\sin \frac{\beta}{R}} v_n' \mp \frac{(3-\nu)n}{2R^2} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{R}}{\sin \frac{\beta}{R}} v_n \pm$$

$$\pm \frac{h^2 n}{3R^2} \frac{1}{\sin \frac{\beta}{R}} w_n'' \pm \frac{h^2 n}{3R^3} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{R}}{\sin \frac{\beta}{R}} w_n' \mp \frac{1}{R^2} \frac{n}{\sin \frac{\beta}{R}} \Bigg(1 + \nu +$$

$$+ \frac{h^2 n^2}{3R^2 \sin^2 \frac{\beta}{R}} \Bigg) w_n = - \frac{1-\nu^2}{2Eh} X_{ns}\,(X_{nc}),$$

$$\pm \frac{(1+\nu)n}{2R} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\beta}{R}} u_n' \mp \frac{(3-\nu)n}{2R^2} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{R}}{\sin \frac{\beta}{R}} u_n + v_n'' +$$

$$+ \frac{1}{R} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{R} v_n' - \frac{1}{R^2} \Bigg(\nu + \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{R} + \frac{1-\nu}{2} \frac{n^2}{\sin^2 \frac{\beta}{R}} \Bigg) v_n - \frac{h^2}{3R} w_n''' -$$

$$- \frac{h^2}{3R^2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{R} w_n'' + \frac{1}{R} \Bigg(1 + \nu + \frac{h^2}{3R^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{R} + \frac{h^2 n^2}{3R^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{R}} \Bigg) w_n' -$$

$$- \frac{2h^2 n^2}{3R^4} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{R}}{\sin^2 \frac{\beta}{R}} w_n = - \frac{1-\nu^2}{2Eh} Y_{nc}(Y_{ns}), \tag{3.11}$$

$$\pm \frac{(2-\nu)h^2 n}{3R^2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\beta}{R}} u_n'' \mp \frac{h^2 n}{3R^3} \frac{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{R}}{\sin \frac{\beta}{R}} u_n' \mp \frac{n}{R^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sin \frac{\beta}{R}} \Bigg(1 + \nu - \frac{h^2}{3R^2} \operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{R} + \frac{h^2 n^2}{3R^2} \frac{1}{\sin^2 \frac{\beta}{R}} \Bigg) u_n + \frac{2h^2}{3R^2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{R} v_n'' -$$

$$-\frac{1}{R}\left[1+\nu+\frac{h^2}{3R^2}\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}+\frac{(2-\nu)\,n^2h^2}{3R^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\beta}{R}}\right]v_n'-$$

$$-\frac{1}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\left(1+\nu-\frac{h^2}{3R^2}\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}+\frac{h^2n^2}{3R^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\beta}{R}}\right)v_n-\frac{h^2}{3}w_n^{IV}-$$

$$-\frac{2h^2}{3R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}w_n'''+\frac{h^2}{3R^2}\left(1+\nu+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}+\frac{2n^2}{\sin^2\frac{\beta}{R}}\right)w_n''-$$

$$-\frac{h^2}{3R^3}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\left(2-\nu+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}+\frac{2n^2}{\sin^2\frac{\beta}{R}}\right)w_n'-$$

$$-\frac{1}{R^2}\left[2(1+\nu)-\frac{n^2}{R^2}\left(3-\nu+4\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{n^4}{R^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\beta}{R}}\right]w_n=-\frac{1-\nu^2}{2Eh}Z_{nc}(Z_{ns}),$$

2°. mărimi disponibile pentru impunerea condițiilor la limită :

$$u_n\,;\ v_n\,;\ w_n\,;\ \gamma_{2n}=\frac{1}{R}v_n-w_n',$$

$$T_{2n}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\pm\frac{\nu n}{R\sin\frac{\beta}{R}}u_n+v_n'+\frac{\nu}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}v_n+\frac{1+\nu}{R}w_n\right),$$

$$S_{2n}'=-\frac{Eh}{1+\nu}\cdot\left[u_n'-\frac{1}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}u_n\mp\frac{n}{R\sin\frac{\beta}{R}}v_n\pm\right.$$

$$\left.\pm\frac{2h^2n}{3R^2}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\beta}{R}}\left(w_n'-\frac{1}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}w_n\right)\right],$$

$$N'_{2n} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left\{\mp\frac{(2-\nu)n}{R^2\sin\frac{\beta}{R}}u'_n \pm \frac{(3-2\nu)n}{R^3\sin\frac{\beta}{R}}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}u_n - \right.$$

$$-\frac{1}{R}v''_n - \frac{1}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}v'_n + \frac{1}{R^3}\left[\nu + \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R} + \right.$$

$$\left.+2(1-\nu)n^2\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\right]v_n + w'''_n + \frac{1}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}w''_n +$$

$$+\frac{1}{R^2}\left[-\nu-\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}-(2-\nu)n^2\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)\right]w'_n +$$

$$\left.+\frac{(3-\nu)n^2}{R^3}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)w_n\right\}.$$

$$G_{2n} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\mp\frac{\nu n}{R^2\sin\frac{\beta}{R}}u_n - \frac{1}{R}v'_n - \frac{\nu}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}v_n + \right.$$

$$\left.+w''_n + \frac{\nu}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}w'_n - \frac{\nu n^2}{R^2\sin\frac{\beta}{R}}w_n\right),$$

3°. mărimi de calculat în final:

u_n; v_n; w_n,

$$T_{1n} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\pm\frac{n}{R\sin\frac{\beta}{R}}u_n + \nu v'_n + \frac{1}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}v_n + \frac{1+\nu}{R}w_n\right),$$

$$G_{2n} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left(\pm\frac{\nu n}{R\sin\frac{\beta}{R}}u_n + v'_n + \frac{\nu}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}v_n + \frac{1+\nu}{R}w_n\right),$$

$$S_{1n} = -S_{2n} = \frac{Eh}{1+\nu}\left(u'_n - \frac{1}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}u_n \mp \frac{n}{R\sin\frac{\beta}{R}}v_n\right),$$

$$G_{1n} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\mp\frac{n}{R^2\sin\frac{\beta}{R}}u_n - \frac{\nu}{R}v_n' - \frac{1}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}v_n + \right.$$

$$\left. + \nu w_n'' + \frac{1}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}w_n' - \frac{n^2}{R^2\sin^2\frac{\beta}{R}}w_n\right),$$

$$G_{2n} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left(\mp\frac{\nu n}{R^2\sin\frac{\beta}{R}}u_n - \frac{1}{R}v_n' - \frac{\nu}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}v_n + \right.$$

$$\left. + w_n'' + \frac{\nu}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}w_n' - \frac{\nu n^2}{R^2\sin^2\frac{\beta}{R}}w_n\right),$$

$$H_{1n} = -H_{2n} = \frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\left(-\frac{1}{R}u_n' + \frac{1}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}u_n \pm \right.$$

$$\left. \pm\frac{n}{R^2\sin\frac{\beta}{R}}v_n \mp \frac{n}{R\sin\frac{\beta}{R}}w_n' \pm \frac{n}{R^2\sin\frac{\beta}{R}}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}w_n\right), \tag{3.13}$$

$$N_{2n} = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left\{\mp\frac{n}{R^2\sin\frac{\beta}{R}}u_n' \mp \frac{(2-\nu)n}{R^3\sin\frac{\beta}{R}}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}u_n - \right.$$

$$- \frac{1}{R}v_n'' - \frac{1}{R^2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}v_n' + \frac{1}{R^3}\left[(1-\nu)n^2\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)+\right.$$

$$\left. + \nu + \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right]v_n + w_n''' + \frac{1}{R}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}w_n'' - \frac{1}{R_2}\left[n^2\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)+\right.$$

$$\left.\left. + \nu + \operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right]w_n' + \frac{2n^2}{R^3}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{R}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{R}\right)w_n\right\},$$

cu aceeași regulă pentru dublul semn ca și în cazul cilindrului.

Sub forma matriceală aceste trei grupe de relații se vor scrie :

$$[E_n^s]\{d_n\} = \{f_n\}, \tag{3.14}$$

$$\{c_n\} = [CL_n^s]\cdot\{d_n\}, \tag{3.15}$$

$$\{r_n\} = [RF_n^s]\cdot\{d_n\}. \tag{3.16}$$

4. DEZVOLTĂRI POLINOMIALE ÎN LUNGUL MERIDIANULUI

Din paragrafele anterioare au rezultat, pentru fiecare armonică n a dezvoltărilor în serii trigonometrice, sisteme de ecuaţii diferenţiale ordinare, avînd drept funcţii necunoscute, ce depind de parametrul ce variază pe meridianul structurii, coeficienţii de ordinul n ai acestor dezvoltări.

Pentru rezolvarea unui astfel de sistem, cu condiţii la limită corespunzătoare, se vor folosi reprezentări ale funcţiilor necunoscute în serii de polinoame de un tip nou, imaginate de V. Visarion. Polinoamele ce stau la baza acestor serii au fost definite în modul următor:

$$\overset{0}{P}_n(\varphi) = P_n(\varphi),$$

$$\overset{1}{P}_n(\varphi) = \frac{\overset{0}{P}_{n+1}(\varphi) - \overset{0}{P}_{n-1}(\varphi)}{2n+1},$$

$$\overset{2}{P}_n(\varphi) = \frac{\overset{1}{P}_{n+1}(\varphi) - \overset{1}{P}_{n-1}(\varphi)}{2n+1}, \tag{4.1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{m}{P}_n(\varphi) = \frac{\overset{m-1}{P}_{n+1}(\varphi) - \overset{m-1}{P}_{n-1}(\varphi)}{2n+1}, \qquad m \leqslant n,$$

unde s-a notat cu $P_n(\varphi)$ polinomul Legendre de ordin n. Din proprietăţile polinoamelor Legendre rezultă pentru polinoamele (4.1) o serie de proprietăţi deosebit de utile în cele ce urmează:

A) Toate polinoamele $\overset{k}{P}_n(\varphi)$ $(k > 0)$ se anulează la capetele intervalului $[-1, +1]$:

$$\overset{k}{P}_n(\pm 1) = 0. \tag{4.2}$$

B) Derivata unui astfel de polinom este dată de relaţia:

$$\frac{\mathrm{d}^k \overset{m}{P}_n(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^k} = \overset{m-k}{P}_n(\varphi) \quad \text{pentru } k \leqslant m. \tag{4.3}$$

C) Aceste polinoame formează sisteme complete pe intervalul $[-1, +1]$, dacă sînt grupate în modul următor:

$$\overset{0}{P}_0,\ \overset{0}{P}_1,\ \overset{1}{P}_1,\ \overset{1}{P}_2,\ \ldots,\overset{1}{P}_k,\ \ldots$$

$$\overset{0}{P}_0,\ \overset{0}{P}_1,\ \overset{1}{P}_1,\ \overset{1}{P}_2,\ \overset{2}{P}_2,\ \overset{2}{P}_3,\ \ldots,\overset{2}{P}_k,\ \ldots \tag{4.4}$$

$$\overset{0}{P}_0,\ \overset{0}{P}_1,\ \overset{1}{P}_1,\ \overset{1}{P}_2,\ \overset{2}{P}_2,\ \overset{2}{P}_3,\ \overset{3}{P}_3,\ \overset{3}{P}_4,\ \ldots,\overset{3}{P}_k,\ \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Ţinînd seama de ordinul de derivare cu care intervin funcţiile necunoscute u_n, v_n şi w_n în ecuaţiile de echilibru (2.9), respectiv (3.11), precum şi în condiţiile la limită (2.10), respectiv (3.12), rezultă drept optime pentru aceste funcţii următoarele reprezentări :

$$u_n^c,\ v_n^c,\ u_n^s = \overset{0}{K}_0\overset{0}{P}_0 + \overset{0}{K}_1\overset{0}{P}_1 + \overset{1}{K}_1\overset{1}{P}_1 + \overset{1}{K}_2\overset{1}{P}_2 + \sum_{m=2}^{\infty}\overset{2}{K}_m\overset{2}{P}_m,$$

$$v_n^s,\ w_n^c,\ w_n^s = \overset{0}{K}_0\overset{0}{P}_0 + \overset{0}{K}_1\overset{0}{P}_1 + \overset{1}{K}_1\overset{1}{P}_1 + \overset{1}{K}_2\overset{1}{P}_2 + \overset{2}{K}_2\overset{2}{P}_2 +$$

$$+ \overset{2}{K}_3\overset{2}{P}_3 + \overset{3}{K}_3\overset{3}{P}_3 + \overset{3}{K}_4\overset{3}{P}_4 + \sum_{m=4}^{\infty}\overset{4}{K}_m\overset{4}{P}_m, \quad (4.5)$$

unde indicii c şi s specifică cilindrul respectiv sfera. Sumele din membrul drept marchează în fiecare caz termenii ce nu intervin în satisfacerea condiţiilor la limită. De exemplu, w_n^s apare în condiţiile la limită (3.12) cu ordinul de derivare maxim trei. Atunci, polinoamele P_m^4 derivate de maximum trei ori şi calculate în punctele $\varphi = +1$ sau $\varphi = -1$ se anulează conform proprietăţii (4.2). În acest mod, limitînd la un număr finit de termeni reprezentările (4.5), se pot totuşi satisface exact condiţiile la limită ale problemei.

5. SISTEMUL GLOBAL DE ECUAŢII ALGEBRICE ALE PROBLEMEI PENTRU ARMONICA n

Pentru determinarea coeficienţilor $\overset{i}{K}_j$ din reprezentările (4.5) se construieşte un sistem de ecuaţii algebrice liniare provenind din trei surse.

a) *Condiţii la limită pentru cilindru respectiv sferă.* După cum se ştie din teoria lui Love a învelitorilor elastice, pe marginea unei învelitori se pot impune condiţii la patru dintre cantităţile (2.10), respectiv (3.12). Dacă în aceste relaţii se face o schimbare de parametru :

$$z = (z_2 - z_1)\varphi + z_1 \quad (5.1)$$

pentru cilindru, şi

$$\beta = (\beta_2 - \beta_1)\,\varphi + \beta_1 \quad (5.2)$$

pentru sferă, în raport cu noul parametru, extremităţile domeniilor ocupate de cele două tipuri de învelitoare se obţin pentru $\varphi = \pm 1$.

Impunerea a patru condiţii la limită pe o margine de cilindru, respectiv sferă, revine la introducerea reprezentărilor (4.5) în expresiile celor patru cantităţi (alese în funcţie de tipul de rezemare) din (2.10) sau (3.12) şi calculul acestor expresii pentru $\varphi = +1$ sau $\varphi = -1$. Se obţin patru ecuaţii algebrice liniare în necunoscutele substructurii considerate (cilindru sau sferă).

b) *Condiţii de continuitate cilindru-sferă.* În impunerea condiţiilor de continuitate cilindru-sferă a trebuit să se ţină seama de faptul că, în punctele de contact dintre cele două substructuri, sistemele locale de coordonate nu coincid.

Într-un caz mai general, pentru un unghi a de contact și o distanță d între suprafețele mediane ale celor două învelitori (fig. 5), relațiile de continuitate capătă aspectul:

$$
\begin{aligned}
u_n^c &= u_n^s, \\
v_n^c &= w_n^s \sin a - v_n^s \cos a, \\
w_n^c &= -w_n^s \cos a - v_n^s \sin a, \\
\gamma_{2n}^c &= \gamma_{2n}^s, \\
T_{2n}^c &= -N_{2n}'^s \sin a + T_{2n}^s \cos a, \\
S_{2n}'^c &= -S_{2n}'^s, \\
N_{2n}'^c &= N_{2n}'^s \cos a + T_{2n}^s \sin a, \\
G_{2n}^c &= -G_{2n}^s + d(N_{2n}'^s \sin a - T_{2n}^s \cos a),
\end{aligned}
\tag{5.3}
$$

unde toate cantitățile ce intervin sînt calculate în punctul de contact ($\varphi + 1$ sau $\varphi = -1$), după ce s-au efectuat schimbările de parametru (5.1)—(5.2) în (2.10), respectiv (3.12) și s-au înlocuit funcțiile necunoscute prin (4.5).

Rezultă un număr de opt ecuații algebrice liniare ce conțin necunoscute atît de la cilindru, cît și de la sferă. În plus, în virtutea proprietăților reprezentărilor (4.5), aceste condiții sînt echivalente cu satisfacerea exactă a condițiilor de continuitate, chiar dacă se trunchiază (4.5) la un număr finit de termeni.

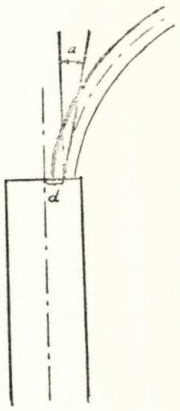


Fig. 5

c) *Condiții de echilibru.* Să notăm cu N_c, N_s numărul total de constante $\overset{i}{K}_j$ la care ne-am decis în reprezentările (4.5) pentru cilindru, respectiv sferă. Pînă în prezent, din condițiile la limită și din condițiile de continuitate (repartizate ca număr în mod egal celor două grupe de necunoscute N_c, N_s) s-au obținut cîte opt ecuații algebrice liniare pentru fiecare dintre cele două substructuri. Mai rămîn de construit $N_c - 8$ ecuații pentru cilindru și $N_s - 8$ ecuații pentru sferă, prin utilizarea ecuațiilor de echilibru.

Pentru a transforma ecuația diferențială pe care o reprezintă oricare dintre ecuațiile de echilibru, într-un șir de ecuații algebrice liniare pentru necunoscutele $\overset{i}{K}_j$ se va proceda în modul următor:

— se va efectua schimbarea de parametru (5.1) sau (5.2);

— se vor înlocui funcțiile necunoscute u_n, v_n și w_n prin reprezentările (4.5) după ce acestea au fost limitate la numărul dorit de termeni;

— se va înmulți ecuația obținută, prin șirul primelor polinoame Legendre $P_0(\varphi)$, $P_1(\varphi)$, ..., $P_M(\varphi)$ și se va integra pe intervalul $[-1, +1]$ de fiecare dată, obținîndu-se un număr de $M + 1$ ecuații liniare algebrice. Aceste ecuații algebrice aproximează condiția de echilibru reprezentată de ecuația diferențială inițială, întrucît sînt în număr finit, iar reprezentările (4.5) au fost trunchiate. Totuși, se pot alege întotdeauna un număr suficient de termeni în aceste reprezentări, astfel încît să se aproximeze cu eroarea dorită funcțiile necunoscute u_n, v_n și w_n.

În calculele făcute cu ajutorul programului elaborat în limbaj FORTRAN pe baza modelului prezentat, s-au luat atît la cilindru cît și la sferă, din reprezentările (4.5), cîte opt termeni pentru u_n, respectiv v_n și șaisprezece termeni pentru w_n. Au rezultat pentru fiecare dintre cele două substructuri un număr de 32 necunoscute. Cele 24 ($N - 8$) de condiții de echilibru necesare completării sistemului algebric în cazul fiecăreia dintre aceste substructuri s-au obținut astfel cîte șase din primele două ecuații de echilibru și douăsprezece din a treia, ținîndu-se astfel seama atît de ordinul acestor ecuații, cît și de direcția de echilibru pe care o reprezintă.

Primită la redacție la 7 noiembrie, 1979

BIBLIOGRAFIE

1. V. VISARION, *Elemente pentru calculul plăcilor curbe subțiri elastice*, Edit. Academiei, București (1961).
2. . L. GOLDENWEIZER, *Teoria uprughih tonkih obolocek*, Gostehizdat, Moskva (1953).

DIAFRAGME ABSORBANTE CU INSERȚIE ELASTIC BILINIARĂ

de ADRIAN POCANSCHI, Ing. ION OLARIU

Institutul politehnic Cluj-Napoca

Se propune și se discută posibilitatea amortizării șocului seismic asupra construcțiilor prin realizarea structurilor de rezistență în diafragme capabile să-și adapteze caracteristicile de rigiditate în raport cu acțiunile la care trebuie să răspundă.

În [1] se pune în discuție posibilitatea optimizării răspunsului seismic al construcțiilor în ideea dirijării controlate a caracteristicilor de răspuns în raport cu tipul acțiunilor exterioare, ajungîndu-se astfel la problema precizării unor structuri a căror parametri de rigiditate să se autoadapteze la natura excitațiilor cărora urmează să le răspundă construcția. Astfel, o structură trebuie să posede suficientă rigiditate pentru a transmite la fundații acțiunile exterioare supraterane de tip vînt și sarcini gravitaționale în condiții date de deformabilitate, iar în momentul declanșării mișcărilor seismice să fie capabilă să se adapteze acestor acțiuni limitînd valoarea maximă a forțelor de inerție la valori predeterminate în condiții de stabilitate, ce implică limitarea deplasărilor la valori maxim posibile. Structurile clasice de rezistență se autoadaptează la mișcările seismice prin distrugerea unor legături interioare (degradări și cedări plastice), care conduc de fapt la „autoflexibilizarea" forțată a structurii. În structurile preconizate se presupune o autoflexibilizare controlată a structurii pornind de la premisa că deplasarea absolută maximă indusă într-o structură de către un cutremur sever nu depășește deplasarea maximă a mișcării terenului (înregistrată în timpul mișcărilor seismice cele mai severe la valoarea de cca 29 cm) atît timp cît pe zona de acțiune „șoc" perioada proprie de vibrație a structurii depășește valoarea de 5 s ($T \geqslant 5$ s) [2].

În cele ce urmează se studiază posibilitatea realizării unor diafragme din beton armat cu rigiditate adaptabilă prin folosirea în combinație cu betonul armat a unui material cu caracteristică elastică biliniară și capacitate remarcabilă de amortizare de tip neopren.

1. Se adoptă pentru diafragmă diagrama forță-deplasare din figura 1. K_i reprezintă rigiditatea diafragmei pe durată acțiunilor supraterane, acesteia corespunzîndu-i o forță egală cu forța maximă de inerție pentru care se proiectează structura (forța seismică maximă pe care o admitem) în valoare absolută egală sau mai mare cu valoarea maximă probabilă a rezultantei acțiunilor exterioare. În momentul în care o acțiune pro-

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 3, 1980, P. 349–357

duce o forță care tinde să depășească valoarea corespunzătoare rigidității K_i, aceasta se reduce teoretic la valoarea zero, diafragma adaptîndu-se la șocul seismic descris de zona 0.

Rigiditatea K_0 corespunde zonei delimitată de poziția de echilibru și deplasarea Δ_0 corespunzătoare limitei de răspuns elastic liniar. Pe zona 1 caracteristica de răspuns devine elastic neliniară, de tip rigid, zona carac terizîndu-se prin amortizarea rapidă a deplasărilor pînă la valoarea maximă Δ_c cînd rigiditatea diafragmei devine practic egală cu rigiditatea diafragmei continue din beton armat. Pentru simplificarea calculului, zona de neliniaritate se poate aproxima printr-un segment de dreaptă cu panta $\alpha_1 > \alpha_0$ diagrama devenind de tip biliniar cu deformații limitate [3].

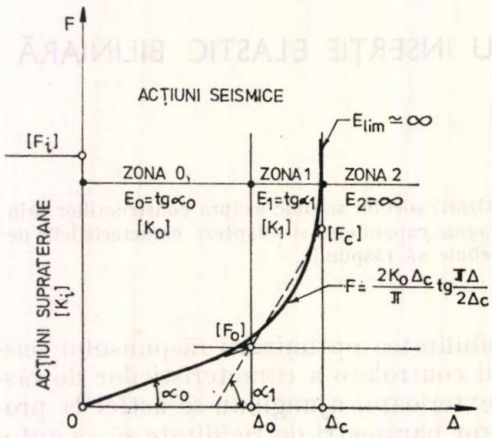


Fig. 1

2. Un panou de diafragmă de lățime B, înălțime $2h$ și grosime c (fig. 2) se taie pe verticală în fîșii de lățime b. În rosturile astfel create se introduc benzi din neopren, de grosime t_v pe întreaga înălțime, sau local, îmbinate prin adeziune de canturile fîșiilor din beton armat. Între fețele de contact diafragmă-fundație și diafragmă planșeu se prevăd benzi din neopren de lățime c și grosime t_0. Asamblarea se realizează atît pe

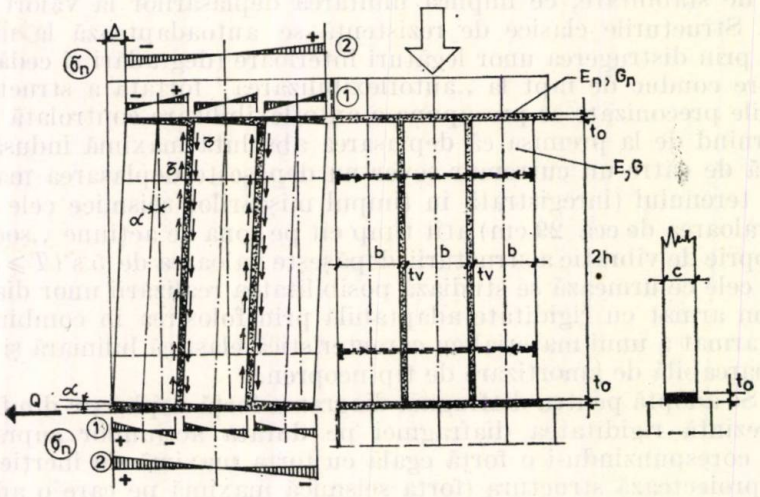


Fig. 2

orizontală, cît și pe verticală, între panourile etajelor ce alcătuiesc diafragma, prin bare pretensionate din oțel superior, obținîndu-se astfel un element structural care combină caracteristicile celor două materiale.

Pe înălțimea construcției, panourile cu inserție se pot localiza la parter sau pe mai multe niveluri (fig. 4), rigiditatea la nivel putînd fi variabilă, de exemplu crescătoare cu înălțimea.

2.2. În evaluarea rigidității unui panou se ține seama de caracteristica forța-deformație din figura 1, avînd în vedere următoarele ipoteze:

— deformațiile neoprenului pe zona de liniaritate reprezintă maxim 40% din grosimea inițială a neoprenului ($\delta_0 \leqslant 40\%\, t$);

— se neglijează energia de deformație prin încovoiere și forțe tăietoare a fîșiilor din beton armat. Aceasta presupune că în acest stadiu sînt indeformabile, ele rotindu-se rigid față de centrele instantanee de rotație;

— pe zona de liniaritate se ia în considerare și energia de deformație prin încovoiere a fîșiilor din beton.

2.2.1. *Rigiditatea pe zona 0* corespunzătoare deplasării bazei se evaluează din echilibrul energetic:

$$L_e = L_i. \tag{1}$$

Lucrul mecanic interior este reprezentat de energia înmagazinată prin deformarea neoprenului la încovoiere, L_i^i, și prin energia dată de deformarea fîșiilor de neopren din rosturi datorită lunecărilor relative dintre fîșii, L_i^l,

$$L_i^i = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_{(x)}^2 \, dv. \tag{2}$$

Din figura 3*a* rezultă

$$\varepsilon_{(x)} = \frac{2\Delta V}{bt_0} x. \tag{3}$$

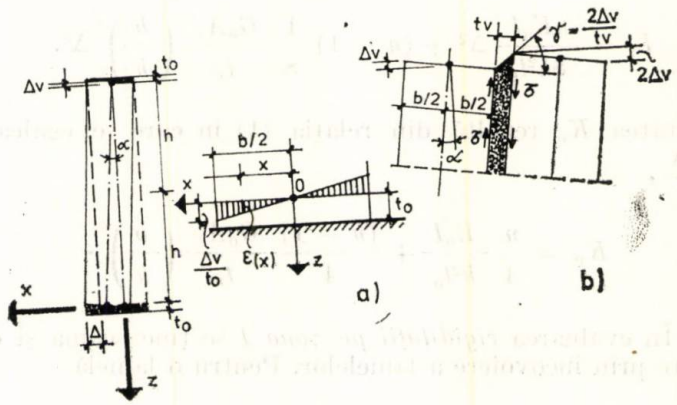


Fig. 3

Deformația din încovoiere ΔV se exprimă funcție de deplasarea Δ a bazei:

$$\operatorname{tg} \alpha \simeq \alpha = \frac{\Delta}{2h} = \frac{\Delta V}{b/2}; \qquad \Delta V = \frac{b}{4h} \Delta, \tag{4}$$

$$\varepsilon_{(x)} = \frac{\Delta}{2h\,t_0}\,x,$$

$$L_i^i = \frac{2E_0}{2}\int_0^{t_0} \mathrm{d}z \int_0^{c} \mathrm{d}y \int_0^{b/2} \left(\frac{\Delta x}{2ht_0}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{E_0 I}{8h^2 t_0}\,\Delta^2, \tag{5}$$

unde

$$I = \frac{cb^3}{12}.$$

Energia înmagazinată prin lunecări într-un rost vertical este

$$L_i^l = \frac{1}{2}\int_v \frac{\tau^2}{G_0}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2G_0}\iint \tau^2\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}A. \tag{6}$$

Din figura 3*b* rezultă

$$\tau = \gamma G_0 = \frac{2\Delta_v}{t_v} G_0 = \frac{b}{2ht_v}\,\Delta G_0, \tag{7}$$

$$L_i^l = \frac{1}{2G_0}\int_0^{t_v} \left(\frac{b\Delta G_0}{2h\,t_v}\right)^2 2h\,c\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\,\frac{G_0 A_l}{t_v}\left(\frac{b}{h}\right)^2 \Delta^2, \tag{8}$$

unde,

$$A_l = 2hc.$$

Notînd cu n numărul de lamele în care se fragmentează diafragma, avem

$$L_i = \frac{nE_0 I}{8h^2 t_0}\,\Delta^2 + (n-1)\,\frac{1}{8}\,\frac{G_0 A_l}{t_v}\left(\frac{b}{h}\right)^2 \Delta^2. \tag{9}$$

Rigiditatea K_0 rezultă din relația (1) în care se egalează $\Delta = 1$ și $L_e = \dfrac{Q\Delta}{2}$,

$$K_0 = \frac{n}{4}\,\frac{E_0 I}{h^2 t_0} + \frac{(n-1)}{4}\,\frac{G_0 A_l}{t_v}\left(\frac{b}{h}\right)^2. \tag{10}$$

2.2.2. În evaluarea *rigidității pe zona 1* se ține seama și de energia de deformare prin încovoiere a lamelelor. Pentru o lamelă

$$L_i^i = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{EI}\,\mathrm{d}s = \frac{2}{2E_b I}\int_0^{h-t_0} (Qx)^2\,\mathrm{d}x + \frac{2}{2E_1 I}\int_0^{t_0} Q^2(h-t_0)^2\,\mathrm{d}x,$$

$$L_i^i = \frac{Q^2}{3E_b I}(h-t_0)^3 + \frac{Q^2}{E_1 I}(h-t_0)^2\,t_0 =$$

$$= \frac{Q^2}{3E_bI}(h - t_0)^2(h + 3n_bt_0) \tag{11}$$

$$n_b = \frac{E_b}{E_1}.$$

Pentru n lamele rigiditatea la încovoiere și lunecare în rosturi rezultă din relația (1)

$$K_1 = \frac{3nE_bI}{4(h - t_0)^2(h + 3n_bt_0)} + \frac{n-1}{4}\frac{G_0A_l}{t_v}\left(\frac{b}{h}\right)^2. \tag{12}$$

2.2.3. La capătul zonei 1, deformațiile interioare în rosturi ating valorile limită, neoprenul devenind rigid. Rigiditatea panoului este dată de suma rigidităților la forfecare a lamelelor din beton armat,

$$L_i = \frac{\varkappa}{2}\int \frac{T^2}{G_bA_b}\,ds = \frac{\varkappa Q^2h}{G_bA_b} \text{ și}$$

$$K_1^T = \frac{G_bA_b}{2h\varkappa}, \tag{13}$$

unde $A_b = nbc$.

2.3. În evaluarea rigidității diafragmelor cu inserție continue pe mai multe niveluri, se presupune că la nivelul planșeelor nodurile execută numai mișcări de translație. Cu notațiile din figura 4 și considerînd deplasările de nivel invers proporționale cu rigiditatea la încovoiere a lamelelor nivelelor respective,

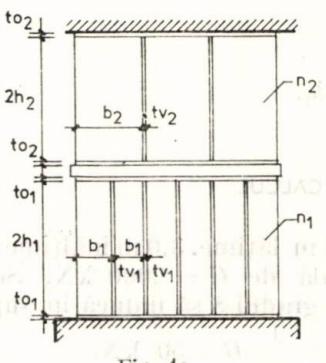


Fig. 4a

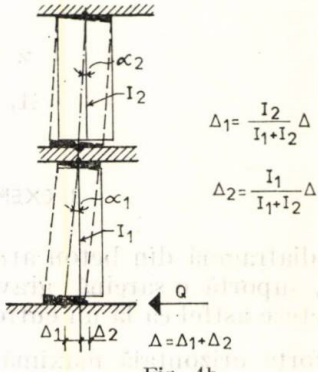


Fig. 4b

$$\Delta_1 = k_2, \qquad k_2 = \frac{I_2}{I_1 + I_2},$$

$$\Delta_2 = k_1, \qquad k_1 = \frac{I_1}{I_1 + I_2},$$

rigiditatea structurii din figură pe zona 0 se deduce conform §2.2.1,

$$K_0 = \frac{E_0}{4}\left[\frac{n_1 I_1 k_2^2}{h_1^2 t_1} + \frac{n_2 I_2 k_1^2}{h_2^2 t_2}\right] + \frac{G_0}{4}\left[\frac{(n_1 - 1) A_1 k_2^2}{t_1}\left(\frac{b_1}{h_1}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{(n_2 - 1) A_2 k_1^2}{t_2}\left(\frac{b_2}{h_2}\right)^2\right]. \tag{14}$$

Cu aceleaşi consideraţiuni de la §2.2.2 rezultă rigiditatea pe zona 1 :

$$K_1 = \frac{1{,}5\, n_1 E_b I_1}{(h_1 - t_{01})^3 + \alpha(h_2 - t_{02})^3 + 3n_b t_{01}(h_1 - t_{01})^2 + 3n_b \alpha t_{02}(h_2 - t_{02})} +$$

$$+ \frac{n_1 - 1}{4}\frac{G_1 A_{l_1}}{t_{v_1}}\left(\frac{b_1}{h_1}\right)^2 + \frac{n_2 - 1}{4}\frac{G_2 A_{l_2}}{t_{v_2}}\left(\frac{b_2}{h_2}\right)^2, \tag{15}$$

unde s-a notat

$$\alpha = \frac{n_1}{n_2}\frac{I_1}{I_2},$$

$$n_b = \frac{E_b}{E_1}.$$

La limita intervalului 1, rigiditatea totală este dată de relaţia

$$K_1^T = \frac{G_b A_t}{\varkappa 2(h_1 + h_2)}, \tag{16}$$

unde

$$\varkappa = 1,\ 2$$

$$A_t = c\ n_1\ b_1.$$

3. EXEMPLU DE CALCUL

O diafragmă din beton armat de 4 m lăţime, 3,0 m înălţime şi 15 cm grosime, suportă o sarcină gravitaţională de $G = 2000$ kN. Se cere să se proiecteze astfel ca la un cutremur de gradul 8 să inducă în suprastructură o forţă orizontală maximă de $F = \frac{1}{40} G = 50$ kN.

Deplasarea maximă a mişcării terenului corespunzătoare unui cutremur de gradul nouă este de 29 cm. Deplasarea maximă indusă de către un cutremur de gradul opt este

$$\Delta = \frac{k_s^8}{k_s^9} \cdot \Delta_9 = \frac{0{,}20}{0{,}32} \cdot 29 = 18 \text{ cm}.$$

Pentru neoprenul uzual, zona 0 a curbei caracteristice deformației elasto-liniare se desfășoară pe circa 40% din grosimea inițială a piesei, zona 1 pe circa 40%, iar 20% reprezintă grosimea la care devine incompresibil [4]. Deci

$$\Delta_c = 18 + \frac{20.18}{100} \simeq 22 \text{ cm}.$$

Grosimea t_0 a benzilor de neopren orizontale se calculează din condiția de mai sus, împărțind diafragma în 12 lamele cu lățimea de 30 cm

$$\Delta_{v0} = \frac{b}{4h}\Delta_0 = \frac{0{,}3}{4 \cdot 1{,}5} - 0{,}4 \cdot 18 = 0{,}36 \text{ cm},$$

$$t_0 = 2\,\Delta_{v0} + 0{,}2 \cdot t_0\,; \quad t_0 = 1{,}0 \text{ cm}.$$

Deformata neoprenului sub sarcina gravitațională se calculează conform [4]

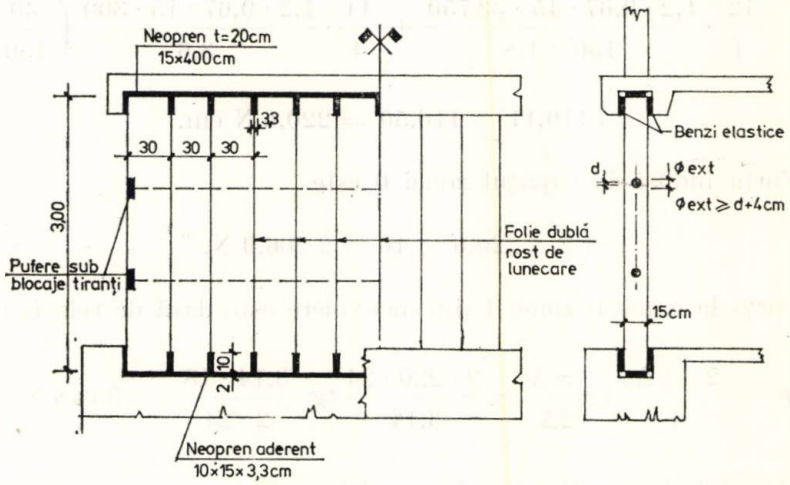


Fig. 5

$$\delta_v = 3K^2 \frac{G}{a\,b} \frac{t}{E_\infty},$$

$$E_0 = 45 \text{ daN/cm}^2, \qquad K = \frac{t}{b}\frac{d}{a},$$

$$E_\infty = 0{,}67\,E_0, \qquad d = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{15^2 + 400^2} = 400{,}3 \text{ cm},$$

$$G_0 = 15 \text{ daN/cm}^2, \qquad K = \frac{1{,}8 \cdot 400{,}3}{15 \cdot 400} = 0{,}120,$$

$$E_d = 1{,}2\, E_0,$$

$$\delta_v = 3 \cdot 0{,}12^2 \frac{200\,000}{400 \cdot 15} \frac{1{,}8}{0{,}67 \cdot 45} = 0{,}1 \text{ cm}.$$

Alegem grosimea stratului de neopren $t_0 = 1{,}8$ cm. Grosimea stratului de inserție verticală rezultă de 3,60 cm.

Rigiditatea pe zona 0, legăturile de lunecare le realizăm la capetele lamelelor pe lungimi de 10 cm :

$$A_l = 15 \times 20 = 300 \text{ cm}^2,$$

$$I = \frac{15 \cdot 30^3}{12} = 33 \cdot 750 \text{ cm}^4,$$

$$n = 12,$$

$$K_0 = \frac{12}{4} \cdot \frac{1{,}2 \cdot 0{,}67 \cdot 45 \cdot 33\,750}{150^2 \cdot 1{,}8} + \frac{11}{4} \cdot \frac{1{,}2 \cdot 0{,}67 \cdot 15 \cdot 300}{3{,}6} \left(\frac{30}{150}\right)^2 =$$

$$= 110{,}11 + 110{,}50 = 220{,}6 \text{ N/cm}.$$

Forța indusă la capătul zonei 0 este

$$F_0 = 220{,}6 \times 10 = 2\,206{,}0 \text{ N}.$$

Forța la capătul zonei 1 din încovoiere este dată de relația :

$$F_1^i = \frac{2\, K_0^i\, \Delta_c}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi\, \Delta}{2\Delta_c} = \frac{2 \cdot 220 \cdot 24}{3{,}14} \operatorname{tg} \frac{3{,}14 \cdot 18}{2 \cdot 24} = 3\,048 \text{ N}.$$

Modulul de elasticitate E_1 rezultă :

$$E_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{F_1 - F_0}{\Delta_c - \Delta_0} = \frac{3\,048 - 1\,101}{14} = 139 \text{ daN/cm}^2.$$

Rigiditatea pe intervalul I rezultă :

$$K_1 = \frac{3 \cdot 12 \cdot 300\,000 \cdot 33\,750}{4(150)^2 \cdot (150 + 3 \cdot 3\,221 \cdot 18)} + 110 = 231 + 110 = 341 \text{ N/cm},$$

cu aproximația introdusă de suprapunerea de efecte. Forța finală este de $2\,206 + 341 \cdot 8 = 4\,934 < 5\,000$ N.

Perioada proprie de vibrație este (pe intervalul „zona 0")

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{220{,}6}{204}} = 1{,}04 \text{ rad/s},$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 6{,}038 \text{ s} > 5\text{s}.$$

Accelerația masei la capătul zonei 0 este

$$\ddot{x} = \omega_0^2 \Delta_0 = 1{,}04 \cdot 10 = 10{,}81 \text{ cm/s}^2.$$

Forța de inerție la capătul intervalului 0 este

$$F_0 = m \cdot \ddot{x} = 2\,203 \text{ daN}.$$

Primită la redacție la 13 decembrie, 1979

BIBLIOGRAFIE

1. A. Pocanschi, *Cîteva observații privind optimizarea răspunsului seismic al structurilor*, St. cerc. mec. apl., **37**, 5 (1978).
2. J. A. Blume, N. Newmark, L. H. Corning, *Design of Multistorey Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions*, Published by the Portland Cement Association, Skokie Illinois.
3. M. Fintel, F. Khan, *Shock Absorbing Soft Story Concept for Multistorey Earthquake structures*, ACI Journal, May, 1969.
4. E. Bassler, E. Witta, *Verbindungen in der Vorfabrication*, Beton Verlag GmbH, Düsseldorf, 1967.
5. G. M. Haris, C. E. Creede, *Șocuri și Vibrații*, Vol. I, II, III, Traducere din limba engleză, București, Edit. tehnică, 1969.

ALGORITMI DE GENERARE AUTOMATĂ DE ELEMENTE FINITE CONFORME ŞI DE ÎNALTĂ PRECIZIE PENTRU PROBLEMELE LA LIMITĂ ALE TEORIEI ELASTICITĂŢII. II*)

de TRAIAN BĂDOIU
INCREST — Bucureşti

Această a doua parte a lucrării se ocupă de generarea automată de elemente finite bidimensionale şi tridimensionale, pentru orice condiţii de racordare la interfaţă cerute funcţiilor de către problema la limită.
Se prezintă elemente pentru principalele probleme bidimensionale ale elasticităţii liniare, accentuîndu-se pe modalitatea de îmbunătăţire a preciziei şi avantajele acestor elemente faţă de cele clasice.

§ 4. GENERAREA AUTOMATĂ A MATRICEI CARACTERISTICE PENTRU PROBLEME BIDIMENSIONALE

Fie elementul bidimensional $e_k = [0, a] \times [0, b]$ (fig. 4) şi $z(x,y)$ o ie necunoscută a problemei. Presupunem că funcţia $z(x,y)$ are de ndeplinit următoarele condiţii:

1) $\{\partial^k z/\partial x^k\}_0^{r_1-1}$ — continue la interfaţa $x = 0$,
2) $\{\partial^k z/\partial x^k\}_0^{r_s-1}$ — continue la interfaţa $x = a$,
3) gradul restricţiei polinomiale în x să fie $m_1 - 1 \geqslant r_1 + r_s - 1$,

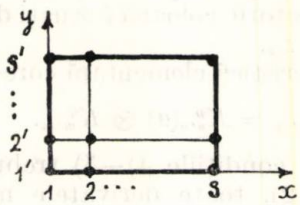


Fig. 4

4) $\{\partial^k z/\partial y^k\}_0^{r_{1'}-1}$ — continue la interfaţa $y = 0$,
5) $\{\partial^k z/\partial y^k\}_0^{r_{s'}-1}$ — continue la interfaţa $y = b$,
6) gradul restricţiei polinomiale în y să fie $m_2 - 1 \geqslant r_{1'} + r_{s'} - 1$.

*) Indicaţiile bibliografice şi formulele (1)—(11) sînt cuprinse în partea I a lucrării, publicată în Studii şi cercetări de mecanică aplicată, p. 167, 1979.

Interpolarea Hermite (2) cu condițiile 1)—3) pentru $y \in [0, b]$ fixat, ne dă

$$z(x, y) = x^{i-1} \mathrm{d}_i^j z_j(y), \tag{12}$$

unde în secțiunile $x = x_2, \ldots, x = x_{s-1}$ sînt considerați $r_2, \ldots, r_{s-1}$ parametri (funcții de y) astfel ca $\sum_{i=1}^{s_1} r_i = m_1$.

Ținînd seama de faptul că $z(x, y)$ trebuie să îndeplinească și condițiile 4)—6), aceste condiții revin asupra componentelor $z_j(y)$, și astfel avem

$$z_j(y) = y^{k-1} \bar{d}_k^l z_{jl}. \tag{13}$$

Cu notațiile (13), (12) devine :

$$z(x, y) = x^{i-1} d_i^j y^{k-1} \bar{d}_k^l z_{jl}. \tag{14}$$

Pentru condiții analoge asupra lui $w(x, y)$, avem

$$w(x, y) = x^{i'-1} \tilde{d}_{i'}^{j'} y^{k'-1} \bar{\tilde{d}}_{k'}^{l'} w_{j'l'}. \tag{15}$$

Expresiile (14) și (15) (pentru $z(x, y)$ și $w(x, y)$) ne dau pentru

$$I(w, z) = \int_{e_k} x^p y^q \frac{\partial^{n'+m'} w}{\partial x^{n'} \partial y^{m'}} \frac{\partial^{n+m} z}{\partial x^n \partial y^m} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= w_{j'l'} \int_0^a \tilde{d}_{i'}^{j'} (x^{i'-1})^{(n')} (x^{i-1})^{(n)} x^p d_i^j \mathrm{d}x \int_0^b \bar{\tilde{d}}_{k'}^{l'} (y^{k'-1})^{(m')} (y^{k-1})^{(m)} y^q \bar{d}_k^l \mathrm{d}y z_{jl} =$$

$$= W^T K_{n'n}^p(a) \otimes K_{m'm}^q(b) Z, \tag{16}$$

unde

$K_{n'n}^p(a), K_{m'm}^q(b)$ — matricele caracteristice unidimensionale (7) ;
$\otimes$ — operația de produs tensorial ;
W, Z — vectorii coloană formați din liniile matricelor $w_{j'l'}$ și z_{jl}.

Deci matricea caracteristică elementară corespunzătoare lui (16) este

$$K_{n'n\,m'm}^{pq} = K_{n'n}^p(a) \otimes K_{m'm}^q. \tag{17}$$

Datorită faptului că condițiile 4)—5) trebuie îndeplinite de toate componentele $z_j(y)$ din (12), toate derivatele mixte

$$\frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}}^{\substack{i=0,\ r_1-1\\j=0,\ r_{1'}-1}}, \quad \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=b}}^{\substack{i=0,\ r_1-1\\j=0.\ r_{s'}-1}},$$

$$\frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j}\Bigg|_{\substack{x=a\\y=0}}^{\substack{i=0,\ r_s-1\\j=0,\ r_{1'}-1}}, \quad \frac{\partial^{i+j} z}{\partial x^i \partial y^j}\Bigg|_{\substack{x=a\\y=b}}^{\substack{i=0,\ r_s-1\\j=0,\ r_{s'}-1}}; \tag{18}$$

rezultă continue și cerute ca grade de libertate.

Mai mult decît atît, întrucît pe latura $x = 0$ restricțiile polinomiale în y de gradul $m_2 - 1$ ale funcției împreună cu toate derivatele parțiale în raport cu x pînă la ordinul $r_1 - 1$ inclusiv se exprimă numai cu parametrii din nodurile acestei laturi (m_2 pentru fiecare funcție), toate aceste derivate sînt continue împreună cu toate derivatele lor în raport cu y. Condiții analoge se trag și pentru celelalte laturi (restul frontierei elementului).

Ținînd seamă de cele de mai sus, dacă

$$\alpha = \min\{r_1, r_s\},$$
$$\beta = \min\{r_{1'}, r_{s'}\}, \tag{19}$$

atunci toate derivatele mixte

$$\left.\frac{\partial^{i+j} z(x, y)}{\partial x^i \partial y^j}\right|_{\substack{i=0,1\ldots,\alpha-1 \\ j=0,1,..,\beta-1}} \tag{20}$$

sînt continue la interfața elementului cu toate celelalte elemente.

În ceea ce privește numărul parametrilor pe tot elementul, implicat în interpolarea (14), acesta este $m_1 \cdot m_2$, parametri distribuiți astfel : pe latura $x = x_1 = 0$ avem $r_1 \cdot m_2$, pe latura $x = x_s$ avem $r_s \cdot m_2$. Pe colțuri rezultă : $r_1 \cdot r_1$, $r_1 \cdot r_{s'}$, $r_s r_1$, $r_s r_{s'}$ parametri.

În baza matricelor caracteristice elementare de la I și ținînd seama de (17), calculăm primele două frecvențe pentru o placă plană pătrată de latură l, grosime h, densitate ρ, rigiditate D și încastrată pe contur, pentru care energia internă este dată de

$$\frac{D}{2}\int_\Omega \left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 + \right. \tag{21}$$
$$\left. + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right\} dx\,dy, \quad \Omega = [0, l] \times [0, l]$$

(modelul Love-Kirchhoff).

Pentru idealizarea cu un singur element (figura 5) și ținînd seamă de (21) + (16) avem pentru matricea maselor și de rigiditate :

$$M = \rho h\, K_{00}^0 \otimes K_{00}^0, \quad K = D\{K_{22}^0 \otimes K_{00}^0 + K_{00}^0 \otimes K_{22}^0 + 2(1-\nu)\, K_{11}^0 \otimes$$
$$\otimes K_{11}^0 + 2\nu\, K_{20}^0 \otimes K_{02}^0\},$$

care cu $\nu = 0{,}3$ și condițiile limită de încastrare ne dau :

$$\omega_1 = \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \cdot 35{,}999, \qquad \omega_2 = \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\, 74{,}29.$$

Ţinînd seamă de faptul că alţi autori [11] dau ca primele două pulsaţii $\omega_1 = \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \cdot 35{,}999$, $\omega_2 = \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}} \cdot 73{,}41$ (pagina 253) şi $\omega_1 = \frac{1}{l^2}\sqrt{\frac{D}{\rho h}}\, 36{,}026$, $\omega_2 = \frac{1}{l^2}\sqrt{D/\rho h} \cdot 73{,}47$ (pagina 26), valorile obţinute

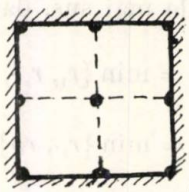


Fig. 5

de noi cu un singur element sînt mai mult decît foarte bune, reprezentînd o eroare mai mică de 0,07% pentru prima, respectiv 1,2% pentru a doua, faţă de ambele.

Programul de calcul realizat special pentru probleme bidimensionale cu domeniu dreptunghiular conţine următoarele probleme (elemente) :

1°. Problema lui Poisson :

$$\min_{w} \left\{ \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \mathrm{d}s - \int_{\Omega} wf \, \mathrm{d}s \right\}$$

2°. Problema plană a elasticităţii :

$$\min_{u,v} \left\{ \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{2\nu}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \mathrm{d}s - \int_{\Omega} (uf_1 + vf_2) \, \mathrm{d}s \right\}.$$

3°. Problema încovoierii plăcilor plane (modelul Love-Kirschhoff) :

$$\min_{w} \left\{ \frac{D}{2} \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} \mathrm{d}s - \int_{\Omega} wf \, \mathrm{d}s \right\}.$$

4°. Problema încovoierii plăcilor sandwich anizotrope [6]:

$$\min_{\alpha,\beta,w}\left\{\frac{1}{2}\int_{\Omega}\{D_x\alpha_x^2+(D_{xy}+D_{yx})\,\alpha_x\beta_y+D_y\beta_y^2+D_s(\alpha_y+\beta_y)^2+\right.$$

$$\left.+A_{xz}(w_x-\alpha)^2+A_{yz}(w_y-\beta)^2\}\,ds-\int_{\Omega}wq\,ds\right\}$$

$\overline{m}=(m_x,\ m_y)$ — vectorul moment exterior, $(\beta,\ -\alpha)$ — vectorul rotație.

De remarcat că în cadrul oricărei probleme (element) de mai sus se poate considera orice grad de continuitate cu respectarea oricăror discontinuități.

Pentru problemele de mai sus s-au făcut multe teste de convergență și îmbunătățire a preciziei. Dintre acestea prezentăm unul mai evident în ceea ce privește convergența și precizia și anume acela al încovoierii plăcilor sandwich anizotrope.

Exemplul considerat are ca scop și testarea modelului teoretic. În acest sens se consideră o placă sandwich la care inima este făcută din același material, omogen și izotrop, cu fețele, problemă pentru care soluția trebuie să fie relativ aceeași cu aceea dată de modelul Love-Kirchhoff (făcînd abstracție de lunecările transversale).

S-a considerat pentru placă geometria din figura 6, cu materialul:

$$E_{xc}=E_{yc}=E_{xs}=735000,$$

$$G_{xyc}=G_{xzc}=G_{yzc}=G_{xys}=G_{xzs}=G_{yzs}=280000,$$

$$\nu_{xyc}=\nu_{yxc}=\nu_{xys}=\nu_{yxs}=0{,}3,$$

(c — indice pentru inimă, s — indice pentru fețe) și încărcată cu o sarcină uniform distribuită $q(x,\ y)=1$.

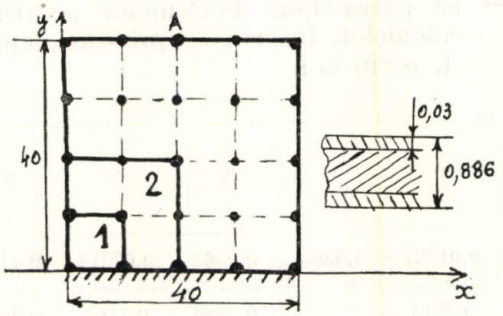


Fig. 6

Ținînd seamă de faptul că atît $q(x,\ y)$, cît și $\overline{m}(x,\ y)$ pot să fie cu discontinuități cel mult de tipul funcției generalizate a lui Dirak, peste tot (întrucît nu avem discontinuități de material de tipul articulație) clasa

minimă de continuitate atît pentru $w(x, y)$, cît și pentru $(\beta, -\alpha)$ este $C^0[\Omega]$. Cu idealizarea de noduri din figura 5 și cu 16 elemente de tip 1, unde s-au considerat ca parametri pe nod w, α, β (asigurînd clasa de continuitate minimă $C^0[\Omega]$), s-a obținut în punctul A

$$w = 0{,}1546, \quad \beta = -0{,}0052, \quad \alpha = 0.$$

Cu modelul Love-Kirchhoff (problema 3°) și idealizarea cu 16 elemente tip 1, respectiv patru elemente tip 2 s-a obținut în punctul A (cu considerarea pe nod a lui w, w_x, w_y, w_{xy})

$w = 7{,}002$, respectiv $w = 6{,}837$ (soluția exactă).

Din datele de mai sus se observă două lucruri :

1) rezultatul foarte prost obținut cu modelul 4°, aproximativ de 46 ori mai mic) ;

2) îmbunătățirea preciziei pentru modelul $L-K$ prin trecerea de la elementul 1 la 2.

Referitor la rezultatul foarte prost de la 1) s-a luat apoi pentru $w(x)$ clasa de continuitate $C^1[\Omega]$ și pe același exemplu s-a obținut

$$w = 7{,}004,$$

lucru care a dovedit că modelul teoretic este bun și a pus sub semnul întrebării clasa minimă de continuitate a lui w. Este elementul ce asigură pentru w pe tot Ω clasa $C^0[\Omega]$ conform ?

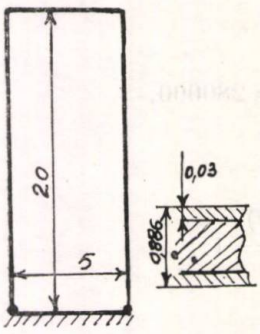
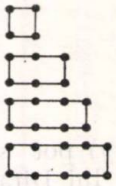


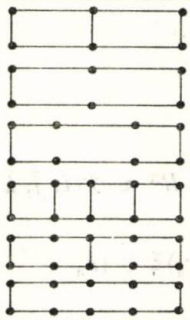
Fig. 7

Răspunsul este afirmativ, dar convergența este slabă în acest caz. În acest scop s-a considerat structura din figura 7, cu același material și aceeași încărcare $q = 1$, la care s-a procedat la o divizare din ce în ce mai fină, după direcția de încovoiere, începînd de la 3 noduri pînă la 11 noduri. Idealizarea cu 11 noduri este destul de fină, ținînd seama de faptul că elementul tip 1 (fig. 6) prezintă raportul dintre latură și grosime de 2,2.

Pe idealizările de noduri considerate s-au folosit patru tipuri de elemente pentru care rezultatele calculelor, în ceea ce privește deplasarea capătului A, revin la :

Noduri / Element	3	4	5	7	9	11
	0,01027	0,0203	0,0363	0,07314	0,1146	0,2843
	0,2914		0,3986	0,4165	0,4248	0,4276
		0,4306		0,4308		0,4309
			0,4307		0,4309	

De remarcat că precizia se îmbunătățește pe măsura creșterii raportului între coeficienții D și A în modelul 4°. Astfel, pentru structura 7 la care s-a considerat rigiditatea transversală a fețelor zero ($G_{xzc} = G_{yzc} = 0$) și la care rigiditatea miezului s-a micșorat de 10, 10^2, 10^3, 10^4 ori (toate componentele sale), pentru o idealizare cu 3, 4 și 5 noduri, în direcția de încovoiere, s-au obținut următoarele rezultate privind deplasarea capătului A :

Idealizarea	R_c	$R_c/10$	$R_c/10^2$	$R_c/10^3$	$R_c/10^4$
	0,01027	0,1061	0,795	2,784	10,96
	0,2914	1,118	1,87	3,11	11,02
	0,4306	1,61	2,347	3,257	11,06
	0,0363	0,3382	1,549	3,125	11.04
	0,3986	1,511	2,295	3,252	11,06
	0,4307	1,612	2,355	3,272	11,06

R_c — rigiditatea inimii formată din E_{xc}, E_{yc}, G_{xyc}, G_{xzc}, G_{yzc}, ν_{xyc}, ν_{yxc}, date la exemplul din figura 6.

Tabelele de mai sus pot servi la alegerea elementelor, pentru o idealizare a nodurilor dată.

Pentru cazurile în care domeniul nu este simplu, se poate căuta o transformare așa fel încît să fie transformat în domeniu simplu și pregătit elementul pentru problema transformată. Dacă o astfel de transformare complică foarte mult problema la limită, sau nu poate fi găsită, atunci se recomandă idealizarea domeniului cu elemente patrulatere, figura 8, și căutată o transformare mai simplă.

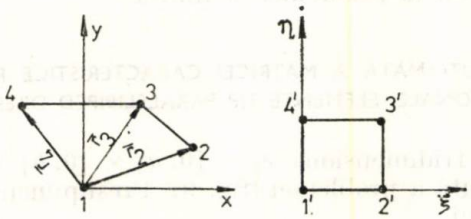


Fig. 8

Pentru transformarea :

$$x = a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\xi\eta,$$

$$y = a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\xi\eta,$$

cu baza de reprezentare a vectorilor

$$\bar{e}_1 = (a_{11} + a_{13}\eta)\bar{i} + (a_{21} + a_{23}\eta)\,\bar{j},$$

$$\bar{e}_2 = (a_{12} + a_{13}\xi)\bar{i} + (a_{22} + a_{23}\xi)\bar{j},$$

condiția ca patrulaterul 1234 să se transforme în pătratul cu latura unitară 1′ 2′ 3′ 4′, conduce la

$$x = x_2\xi + x_4\eta + (x_3 - x_2 - x_4)\xi\eta,$$

$$y = y_2\xi + y_4\eta + (y_3 - y_2 - y_4)\,\xi\eta$$

sau vectorial

$$\bar{r} = \bar{r}_2\xi + \bar{r}_4\eta + (\bar{r}_3 - \bar{r}_2 - \bar{r}_4)\,\xi\eta.$$

Jacobianul acestei transformări (unde s-a considerat $R^2 \subset R^3 \approx \mathscr{X}(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$)

$$\mathscr{J} = \begin{vmatrix} \bar{r}_2 + (\bar{r}_3 - \bar{r}_2 - \bar{r}_4)\eta \\ \bar{r}_4 + (\bar{r}_3 - \bar{r}_2 - \bar{r}_4)\xi \end{vmatrix} = \bar{k}[\bar{r}_2 \times \bar{r}_4 + \bar{r}_2 \times (\bar{r}_3 - \bar{r}_4)\xi + (\bar{r}_3 -$$

$$- \bar{r}_2) \times \bar{r}_4\eta] = C + B\xi + A\eta,$$

și păstrează semnul atîta vreme cît diagonalele patrulaterului sînt interioare (demonstrația evidentă).

De remarcat că în cazul paralelogramului $\mathscr{J} = \bar{r}_2 \times \bar{r}_4 \cdot \bar{k} = \text{const.}$ În aceste condiții

$$\int_{1234} H(x, y\,;\, u, v)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{1'2'3'4'} H(\xi,\ \eta\,;\, u(\xi,\ \eta),\ V(\xi,\ \eta)\,\mathscr{J}\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

unde H este integrantul problemei la limită.

§5. GENERAREA AUTOMATĂ A MATRICEI CARACTERISTICE FENTRU PROBLEMELE TRIDIMENSIONALE. ELEMENTE TIP PARALELIPIPED DREPTUNGHIC

Fie elementul tridimensional $e_k = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ și $u(x, y, z)$ o funcție necunoscută a problemei (fig. 9). Presupunem pentru $u(x, y, z)$ următoarele condiții :

1) la interfața $x = 0$, continuă, împreună cu primele $r_1 - 1$ derivate în raport cu x ;

2) la interfața $x = a$, continuă, împreună cu $r_s - 1$ derivate în raport cu x ;

3) gradul restricției polinomiale în x să fie $m_1 - 1 \geqslant r_1 + r_s - 1$; în celelalte secțiuni $x = x_2, \ldots, x = x_{s-1}$ numărul parametrilor pe sec-

ţiune $r_2, \ldots, r_s$ (funcţiilor de (y, z)) consideraţi să îndeplinească $\sum_{i=1}^{s} r_i = m_1$.

4) la interfaţa $y = 0$, continuă, împreună cu primele $r_{1'} - 1$ derivate în raport cu y;

5) la interfaţa $y = b$, continuă, împreună cu primele $r'_s - 1$ derivate în raport cu y;

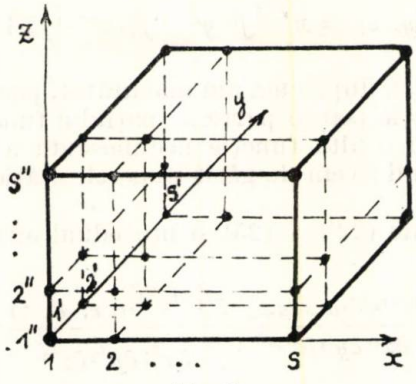


Fig. 9

6) gradul restricţiei polinomiale în y să fie $m_2 - 1 \geqslant r_{1'} + r_{s'} - 1$; în celelalte secţiuni $y = y_2, \ldots, y = y_{s'-1}$ numărul parametrilor pe secţiune $r_{2'}, \ldots, r_{s'}$ (funcţiilor de (z)), aşa încît $\sum_{i'=1}^{s'} r_{i'} = m_2$.

7) la interfaţa $z = 0$, continuă, împreună cu primele $r_{1''} - 1$ derivate în raport cu z;

8) la interfaţa $z = c$, continuă împreună cu primele $r_{s''} - 1$ derivate în raport cu z;

9) gradul restricţiei polinomiale în z să fie $m_3 - 1 \geqslant r_{1''} + r_{s''} - 1$; în celelalte secţiuni $z = z_{2''}, \ldots, z = z_{s''-1}$ numărul parametrilor pe secţiune îndeplinesc relaţia $\sum_{i''=1''}^{s''} r_{i''} = m_3$.

Pentru $(y, z) \in [0, b] \times [0, c]$ fixat, restricţia polinomială $u(x, y, z)$ ce îndeplineşte condiţiile 1) + 2) + 3) este interpolarea Hermite (2)

$$u(x, y, z) = x^{i-1} d_i^j U_j(y, z). \tag{22}$$

Condiţiile 4) + 5) + 6) (ţinînd seamă de (22)) revin fiecărei componente $U_j(y, z)$. Acest lucru cere pe fiecare din cele două interfeţe $y = 0$, $y = b$, derivatele în raport cu y pînă la ordinul $r_{1'} - 1$, respectiv $r_{s'} - 1$ în interpolarea Hermite în raport cu y.

$$U_j(y, z) = y^{k-1} \bar{d}_k^l U_{jl}^{(z)}(z). \tag{23}$$

Analog, pentru ca condiţiile 7) + 8) + 9) să fie satisfăcute, avem

$$U_{jl}(z) = z^{m-1} \bar{d}_m^n U_{jln}. \tag{24}$$

Relaţiile (23) şi (24) ne dau pentru (22) :

$$u(x, y, z) = x^{i-1} d_i^j y^{k-1} \bar{d}_k^l z^{m-1} \tilde{\tilde{d}}_m^n U_{jln} \tag{22'}$$

Considerînd acum că pentru funcţia $v(x, y, z)$ avem condiţii de acelaşi gen, rezultă

$$v(x, y, z) = x^{i'-1} f_{i'}^{j'} y^{k'-1} \bar{f}_{k'}^{l'} z^{m'-1} \tilde{\tilde{f}}_{m'}^{n'} V_{j'l'n'}. \tag{25}$$

Funcţia $v(x, y, z)$, după cum am mai arătat, poate să însemne o parte din spaţiul de proiecţie (sau o parte a spaţiului fundamental al distribuţiilor problemei) sau o altă funcţie necunoscută a problemei sau chiar $u(x, y, z)$ în cazul cînd avem de găsit punctele staţionare pentru funcţionale pătratice.

Ţinînd seamă de (22') + (25) şi procedînd analog ca la §3, avem :

$$\int_{e_k} x^p y^q z^r \frac{\partial^{t_1+t_2+t_3} u(x,y,z)}{\partial x^{t_1} \partial y^{t_2} \partial z^{t_3}} \frac{\partial^{t'_1+t'_2+t'_3} v(x, y, z)}{\partial x^{t'_1} \partial y^{t'_2} \partial z^{t'_3}} \, dx dy dz = \tag{26}$$

$$= V^T K^p_{t'_1 t_1}(a) \otimes K^q_{t'_2 t_2}(b) \otimes K^r_{t'_3 t_3}(c) \, U$$

unde U, V — vectori coloană formaţi din mărimile $\{U_{jln}\}$, $\{V_{jln}\}$

$K^p_{t'_1 t_1}, K^q_{t'_2 t_2}, K^r_{t'_3 t_3}$ — matricele caracteristice unidimensionale (7),

$\otimes$ — operaţia de produs tensorial.

Din (26) deducem că matricea caracteristică elementată corespunzătoare indicilor $\{p, q, r ; t'_1, t_1, t'_2, t_2, t'_3, t_3\}$ este

$$K^{pqr}_{\{t'_i t_i\}_1^3} = K^p_{t'_1 t_1}(a) \otimes K^q_{t'_2 t_2}(b) \otimes K^r_{t'_3 t_3}(c). \tag{27}$$

Concluzii similare se trag şi aici, ca la §4, în ceea ce priveşte continuitatea derivatelor mixte la interfaţa cu celelalte elemente (frontiera elementului) ;

Astfel, rezultă că toate derivatele mixte

$$\left. \frac{\partial^{i+j+k} u(x, y, z)}{\partial x^i \partial y^j \partial z^k} \right|_{\substack{i=0,\,1,\,..\,,\,\alpha-1 \\ j=0,\,1,\,..\,,\,\beta-1 \\ k=0,\,1,\,..\,,\,\gamma-1}} \tag{28}$$

sînt continue la interfaţa cu celelalte elemente, unde

$$\begin{aligned} \alpha &= \min \{r_1, r_s\}, \\ \beta &= \min \{r_{1'}, r_{s'}\}, \\ \gamma &= \min \{r_{1''}, r_{s''}\}. \end{aligned} \tag{29}$$

Numărul total al parametrilor pe element (reiese din însăși construcția polinomului de interpolare) este $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$, care sînt distribuiți astfel :

— pe fața $x = x_1 = 0$ avem $r_1 \cdot (m_2 + m_3)$ parametri ;

— pe fața $x = x_2$ avem $r_2 \cdot (m_2 + m_3)$ parametri ;

. . . . . .

— pe fața $x = x_s$ avem $r_s\ (m_2 + m_3)$ parametri.

Cei $m_2 + m_3$ de pe fața $x = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, s$ sînt distribuiți ca la §3.

Pe colțul 1 rezultă $r_1 \cdot r_{1'} \cdot r_{1''}$ parametri, și analog se determină și pe celelalte colțuri.

Primită la redacție la 10 iulie 1979

MIŞCAREA PRINTR-UN SPAŢIU INELAR PERMEABIL

de ALECSANDRU D. STAN
Institutul de petrol şi gaze Ploieşti

În tehnică sînt situaţii cînd un fluid vîscos se mişcă printr-un spaţiu inelar permeabil. Un asemenea caz poate fi întîlnit la cimentarea sondelor de petrol şi gaze unde, de obicei, numai suprafaţa cilindrică exterioară a spaţiului inelar este permeabilă. În lucrare, pentru cazul general al spaţiului inelar cu ambele suprafeţe cilindrice permeabile, se stabilesc relaţiile pierderii de presiune şi vitezele de filtrare prin suprafeţele cilindrice. Pierderea de presiune într-un spaţiu inelar permeabil este mai mică decît în spaţiul nepermeabil dacă în ambele spaţii există aceeaşi viteză medie la intrare. Viteza de filtrare depinde, în afară de valoarea acesteia la începutul spaţiului inelar, şi de pierderea de presiune între cele două puncte considerate.

1. INTRODUCERE

În tehnică sînt situaţii cînd fluidul se mişcă printr-un spaţiu inelar.

La cimentarea sondelor de petrol şi gaze se pot întîlni şi spaţii inelare cu suprafeţele cilindrice permeabile. În general în asemenea situaţii, numai suprafaţa cilindrică exterioară obţinută în urma forării sondei este permeabilă, iar suprafaţa cilindrică interioară, formată din coloana de exploatare sau celelalte coloane care urmează a fi cimentate, este impermeabilă.

Pentru fisurile rectilinii [1] sau circulare cu feţele permeabile [2] şi pentru tubul permeabil [3] sînt cunoscute elementele principale necesare în calculele tehnice (pierderea de presiune, variaţia vitezei de filtrare). În lucrările indicate s-a dovedit că pierderile de presiune sînt mai mici la fisurile şi la tubul permeabil faţă de cazul cînd acestea ar fi impermeabile.

Viteza de filtrare dintr-un anumit punct depinde de valoarea vitezei de filtrare de la începutul fisurii sau al tubului permeabil şi de pierderea de presiune care are loc între cele două puncte.

2. INTEGRAREA ECUAŢIILOR DE MIŞCARE PENTRU SPAŢIUL INELAR PERMEABIL

Se poate alege un sistem de axe astfel ca direcţia Oz să coincidă cu axul comun al cilindrilor de raze r_c şi r_s (fig. 1.), care se presupun că sînt coaxiali. Probabil că în tehnica de şantier din cauza deviaţiei sondelor, cea mai frecventă situaţie este aceea în care cilindrii sînt dezaxaţi. Pentru

spațiul inelar nepermeabil s-au obținut elementele mișcării laminare în lucrarea [5], unde s-a arătat că pierderea de presiune este mai mică în spațiul inelar excentric față de cel fără excentricitate.

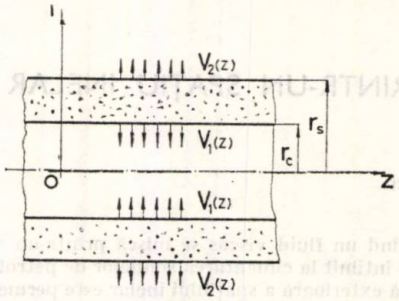


Fig. 1

Ecuațiile de mișcare Navier-Stokes în sistemul de axe ales au forma

$$\frac{dv_r}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{\tilde{p}}}{\partial r} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{\tilde{p}}}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right), \tag{1}$$

iar ecuația de continuitate pentru un fluid incompresibil

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

unde v_r și v_z sînt componentele vitezei pe axele r și z, ρ densitatea fluidului, ν — vîscozitatea cinematică, iar prin $\tilde{\tilde{p}}$ s-a notat $p - \rho g z$, g fiind accelerația gravitațională, iar p presiunea.

Condițiile pe care le îndeplinesc ecuațiile (1) sînt

$$v_r = -V_1(z) \text{ și } v_z = 0 \text{ la } r = r_c,$$
$$v_r = V_2(z) \text{ și } v_z = 0 \text{ la } r = r_s. \tag{3}$$

Se pot introduce variabilele $\bar{r}$, $\bar{z}$, $\bar{v}_r$, $\bar{v}_z$, $\bar{p}$, $\bar{t}$ prin relațiile

$$\bar{r} = \frac{r}{r_c}; \quad \bar{z} = \frac{z}{r_c}; \quad \bar{r}_s = \frac{r_s}{r_c},$$

$$\bar{v}_r = \frac{v_r}{U}; \quad \bar{v}_z = \frac{v_z}{U}, \tag{4}$$

$$\bar{p} = \frac{\tilde{\tilde{p}}}{\rho U^2}; \quad \bar{t} = \frac{\nu t}{U^2},$$

U — fiind o viteză de referinţă pentru componenta v_z. Cu aceste variabile, ecuaţiile (1) şi (2) se scriu sub forma :

$$\frac{dv_r}{dt} = -\mathscr{R}e\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\mathscr{R}e\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}; \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

unde s-a omis, pentru simplificarea scrierii, barele la toate variabilele iar prin $\mathscr{R}e$ s-a notat numărul lui Reynolds definit cu viteza U şi lungimea r_c. Condiţiile (3) devin, în urma introducerii variabilelor adimensionale,

$$v_r = -\bar{V}_1(z) \text{ şi } v_z = 0 \text{ la } r = 1,$$
$$v_r = \bar{V}_2(z) \text{ şi } v_z = 0 \text{ la } r = \bar{r}_s, \tag{7}$$

unde prin $\bar{V}_1(z)$ şi $\bar{V}_2(z)$ s-au notat $V_1(z)/U$ şi, respectiv, $V_2(z)/U$. Pentru o mişcare staţionară se poate neglija membrul stîng al ecuaţiilor (5) şi din acestea, asemănător ca în lucrarea [3], se elimină presiunea obţinîndu-se relaţia

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) = 0. \tag{8}$$

Se poate introduce funcţia $\psi(r, z)$ prin relaţiile

$$v_r = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \text{ şi } v_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\psi). \tag{9}$$

Funcţia $\psi = \psi(r, z)$ satisface ecuaţia de continuitate (6).
Prin introducerea componentelor v_r şi v_z, ecuaţia (8) capătă forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + D^2\right)^2 \psi = 0, \tag{10}$$

unde prin D^2 s-a introdus operatorul

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}.$$

Ca și în alte lucrări [1, 3], se introduce funcția $\Phi(r, k)$ transformata Fourier a lui $\psi(r, z)$, în raport cu variabila z și parametrul k [4]

$$\Phi(r, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikz} \psi(r, z)\, dz, \tag{11}$$

precum și funcțiile $W_1(k)$ și $W_2(k)$ care sînt transformatele Fourier ale lui $\bar{V}_1(z)$ și, respectiv, $\bar{V}_2(z)$ tot în raport cu variabila z și parametrul k

$$W_1(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}_1(z)\, e^{ikz} dz \quad \text{și} \quad W_2(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{V}_2(z)\, e^{ikz} dz. \tag{12}$$

Ecuația (10) devine, în urma transformării Fourier, la forma

$$(L^2 - k^2)^2 \Phi(r, k) = 0 \tag{13}$$

și, tot prin aceeași transformare, condițiile la limită (7), avînd în vedere și relațiile (9), se scriu

$$ik\, \Phi(r, k) = -\, W_1(k) \text{ și } \Phi(r, k) + r \frac{d\Phi(r, k)}{dr} = 0 \text{ la } r = 1, \tag{14}$$

$$ik\, \Phi(r, k) = W_2(k) \text{ și } \Phi(r, k) + r \frac{d\Phi(r, k)}{dr} = 0 \text{ la } r = \bar{r}_s, \tag{15}$$

prin L^2 s-a notat operatorul.

$$L^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2}.$$

Așa cum s-a arătat în lucrarea [3], soluția ecuației (13) s-a scris sub forma :

$$\Phi(r, k) = AI_1(kr) + BrI_0(kr), \tag{16}$$

A și B sînt coeficienți dependenți de parametrul k, iar I_0 și I_1 sînt funcțiile Bessel modificate de specia întîia de ordinul zero și unu.
În această lucrare se presupune că funcția $\Phi(r, k)$ este dată de relația

$$\Phi(r, k) = \Phi_1(r, k) + \Phi_2(r, k). \tag{17}$$

Soluțiile funcțiilor $\Phi_1(r, k)$ și $\Phi_2(r, k)$ sînt identice cu cele ale funcție $\Phi(r, k)$.

$$\begin{aligned} \Phi_1(r, k) &= A_1 I_1(kr) + B_1 r I_0(kr), \\ \Phi_2(r, k) &= A_2 I_1(kr) + B_2 r I_0(kr), \end{aligned} \tag{18}$$

A_1, A_2, B_1, B_2 fiind constante de integrare dependente de parametrul k. Funcţia $\Phi_1(r, k)$ precum şi derivatele acesteia se anulează pe cilindrul de rază $\bar{r}_s$, iar $\Phi_2(r, k)$ este nulă ca şi derivatele acesteia pe cilindrul cu raza egală cu unitatea. În plus, condiţiile pe care le satisfac funcţiile $\Phi_1(r, k)$ şi $\Phi_2(r, k)$ sînt

$$ik\Phi_1(r, k) = -W_1(k) \text{ şi } \Phi_1(r, k) + r\frac{d\Phi_1(r, k)}{dr} = 0 \text{ la } r = 1 \qquad (19)$$

şi

$$ik\Phi_2(r, k) = W_2(k) \text{ şi } \Phi_2(r, k) + r\frac{d\Phi_2(r, k)}{dr} = 0 \text{ la } r = \bar{r}_s. \qquad (20)$$

Pentru rezolvarea sistemului format de ecuaţiile (19) se găsesc constantele A_1 şi B_1.

$$A_1 = \frac{W_1(k)}{ik} \cdot \frac{2I_0(k) + kI_1(k)}{k[I_0^2(k) - I_1^2(k)] - 2I_0(k)\, I_1(k)},$$

$$B_1 = -\frac{W_1(k)}{ik} \cdot \frac{kI_0(k)}{k[I_0^2(k) - I_1^2(k)] - 2I_0(k) \cdot I_1(k)},$$

iar constantele A_2 şi B_2 au valorile

$$A_2 = -\frac{W_2(k)}{ik} \cdot \frac{2I_0(k\bar{r}_s) + k\bar{r}_s I_1(k\bar{r}_s)}{k[I_0^2(k\bar{r}_s) - I_1^2(k\bar{r}_s)] - 2I_0(k\bar{r}_s)I_1(k\bar{r}_s)},$$

$$B_2 = \frac{W_2(k)}{ik} \cdot \frac{kI_0(k\bar{r}_s)}{k[I_0^2(k\bar{r}_s) - I_1^2(k\bar{r}_s)] - 2I_0(k\bar{r}_s)I_1(k\bar{r}_s)}.$$

Funcţiile $\psi(r, z)$, $\bar{V}_1(z)$ şi $\bar{V}_2(z)$ se obţin din relaţiile

$$\psi(r, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz}\, \Phi(r, k)\, dk, \qquad (21)$$

$$\bar{V}_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz}\, W_1(k)\, dk \quad \text{şi} \quad \bar{V}_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz}\, W_2(k)\, dk. \qquad (22)$$

Calculul acestor mărimi presupune cunoaşterea lui $W_1(k)$ şi $W_2(k)$, ceea ce înseamnă fixarea legilor de variaţie a lui $V_1(z)$ şi $V_2(z)$.

Ca şi în alte lucrări [1, 2, 3], în cele ce urmează, se stabilesc formulele de calcul pentru viteza medie de filtrare şi pierderea de presiune care se produce într-un spaţiu inelar permeabil. Debitul care se filtrează prin peretele spaţiului inelar cu raza $r = \bar{r}_s$ va fi

$$Q_e = 2\pi\bar{r}_s[\psi(\bar{r}_s, -z) - \psi(\bar{r}_s, z)] = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ikz} - e^{-ikz})\, \Phi_2(\bar{r}_s, k)\, dk$$

sau

$$Q_e = 2\sqrt{2\pi}\,\bar{r}_s \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W_2(k)}{k} \sin kz \, dk \tag{23}$$

şi prin peretele cilindrului cu raza $r = 1$

$$Q_1 = 2\pi\,[\psi(1, -z) - \psi(1, z)] = \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} (e^{ikz} - e^{-ikz})\,\Phi_1(1, k)\,dk,$$

relaţie care se mai scrie şi sub forma :

$$Q_1 = -\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W_1(k)}{k} \sin kz \, dk. \tag{24}$$

Debitul filtrat prin cei doi cilindri va fi Q_f,

$$Q_f = 2\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W_1(k) + \bar{r}_s W_2(k)}{k} \sin kz \, dk. \tag{25}$$

La expresia lui Q_1 s-a ales semnul negativ pentru că acesta se filtrează ca şi debitul Q_e.
Pe de altă parte se poate scrie că acelaşi debit este dat de relaţia

$$Q_f = 4\pi z\,[V_1(\xi) + \bar{r}_s V_2(\xi)], \tag{26}$$

cu $\xi \in [-z, z]$.
Cele două relaţii ale lui Q_f dau posibilitatea scrierii expresiei

$$z[\bar{V}_1(\xi) + \bar{r}_s \bar{V}_2(\xi)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{W_1(k) + \bar{r}_s W_2(k)}{k} \sin kz \, dk. \tag{27}$$

Într-o secţiune transversală a spaţiului inelar viteza medie $U_{med}\,(z)$ are expresia

$$U_{med}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2}{(\bar{r}_s^2 - 1)} \left[\bar{r}_s \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz}\Phi_2(\bar{r}_s, k)\,dk - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikz}\Phi_1(1, k)\,dk\right] \tag{28}$$

Dacă se scrie în acelaşi mod şi viteza medie în secţiunea $-z$ şi prin scăderea din acest rezultat pe cel obţinut mai înainte pentru secţiunea z, se găseşte

$$U_{med}(-z) - U_{med}(z) = \frac{4}{\sqrt{2\pi}(\bar{r}_s^2 - 1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{r}_s W_2(k) + W_1(k)}{k} \sin kz \, dk. \tag{29}$$

Comparind acest rezultat cu cel dat de ecuație (27) rezultă imediat

$$U_{med}(-z) - U_{med}(z) = \frac{4}{\bar{r}_s^2 - 1} z[V_1(\xi) + \bar{r}_s V_2(\xi)]. \tag{30}$$

Această relație se poate scrie și între secțiunea 0 și z sub forma

$$U_{med}(0) - U_{med}(z) = \frac{2z}{\bar{r}_s^2 - 1} [V_1(\xi) + \bar{r}_s V_2(\xi)], \tag{31}$$

acum $\xi \in [0, z]$
În ceea ce privește pierderea de presiune pe o lungime elementară dz, aceasta are expresia [5]

$$dp = -8\mu \frac{U_{med}(z)}{r_s^2(1 - \varepsilon)} \cdot \frac{dz}{E}, \tag{32}$$

unde s-a notat $\varepsilon = \frac{r_c}{r_s}$, iar E are mărimea

$$E = \frac{1 + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon} + \frac{1 + \varepsilon}{\ln \varepsilon}.$$

Relația (32) scrisă sub forma adimensională are forma

$$dp = -\frac{8F(\varepsilon)}{\mathcal{R}e\, \bar{r}_s^2} \cdot U_{med}(z)\, dz, \tag{33}$$

în care

$$F(\varepsilon) = \frac{1}{(1 - \varepsilon)E}.$$

Dacă se înlocuiește $U_{med}(z)$ și se integrează între 0 și z se găsește

$$p(0) - p(z) = \frac{8F(\varepsilon)}{\mathcal{R}e\, \bar{r}_s^2} z \left[U_{med}(0) - \frac{z}{\bar{r}_s^2 - 1} V(\xi) \right], \tag{34}$$

unde s-a notat

$$V(\xi) = V_1(\xi) + \bar{r}_s V_2(\xi).$$

Prin trecerea mărimilor la forma dimensională se găsește

$$\Delta p = \frac{8\mu z}{r_s^2} F(\varepsilon) \left[U_{med}(0) - \frac{z r_c}{r_s^2 - r_c^2} V_{med}(\xi) \right], \tag{35}$$

cu Δp s-a notat diferența dintre $p(0)$ și $p(z)$, iar viteza medie de filtrare $V_{med}(\xi)$ are forma

$$V_{med}(\xi) = \frac{V_1(\xi) \cdot r_c + V_2(\xi) r_s}{r_c},$$

μ fiind vîscozitatea dinamică a fluidului.
Pentru a stabili cum variază viteza de filtrare în lungul pereților se ia ca punct de plecare expresia eforturilor de forfecare [2]

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \tag{36}$$

Acest efort scris sub formă adimensională are expresia

$$\bar{\tau} = \frac{1}{\mathcal{R}e} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right). \tag{37}$$

La această ultimă formă s-a ajuns folosind aceleași mărimi adimensionale pentru v_r, v_z, r și z, iar $\bar{\tau}$ este raportul dintre efortul de forfecare τ și ρU^2. Valoarea efortului $\bar{\tau}$ pe cilindrul de rază $\bar{r}_s$ va fi $\bar{\tau}_s$, iar pe cel de rază $r = 1$, $\bar{\tau}_1$. Expresiile acestor eforturi vor fi

$$\bar{\tau}_s = \frac{1}{\mathcal{R}e} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=\bar{r}_s} \text{ și } \bar{\tau}_1 = \frac{1}{\mathcal{R}e} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \Bigg|_{r=1}. \tag{38}$$

Avînd în vedere expresiile lui v_r și v_z, relațiile (9), se poate calcula termenul

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \tag{39}$$

Termenul drept al egalității obținute are expresia :

$$\frac{2}{\mathcal{R}e} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ k^2 [\Phi_1(r, k) + \Phi_2(r, k)] - \frac{W_1(k)}{\mathrm{i}} g(k) + \frac{W_2(k)}{\mathrm{i}} g(k\bar{r}_s) \right\} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} \mathrm{d}k,$$

unde prin $g(k)$ s-a notat

$$g(k) = \frac{k I_0(k) I_1(k)}{k[I_0^2(k) - I_1^2(k)] - 2 I_0(k) I_1(k)},$$

iar $g(k\bar{r}_s)$ este o notație asemănătoare cu $g(k)$, variabila k din aceasta fiind înlocuită cu $k\bar{r}_s$.

Între pierderea de presiune elementară $\mathrm{d}p$ și eforturile $\bar{\tau}_1$ și $\bar{\tau}_s$ există relația

$$\mathrm{d}p = \frac{2}{\mathcal{R}e(\bar{r}_s^2 - 1)} (\bar{\tau}_1 + \bar{r}_s \bar{\tau}_s). \tag{40}$$

Prin integrarea acestei expresii între $-z$ și z se găsește

$$p(r, -z) - p(r, z) = \frac{4}{\mathcal{R}e(\bar{r}_s^2 - 1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ -\frac{k}{\mathrm{i}} [\Phi_1(r, k) + \bar{r}_s \Phi_2(r, k)] - \right.$$

$$\left. - \frac{W_1(k)}{\mathrm{i}} \frac{g(k)}{k} + \frac{W_2(k)}{\mathrm{i}} \bar{r}_s \frac{g(k\bar{r}_s)}{k} \right\} (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}kz})\, \mathrm{d}k. \tag{41}$$

Se poate admite că pe cilindrul de rază $\bar{r}_s$, $W_1(k) = 0$ deoarece pe acest cilindru și $V_1(z) = 0$, iar pe cilindrul de rază 1, $W_2(k) = 0$ datorită faptului că $V_2(z) = 0$. Funcția

$$\frac{g(k)}{k} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz}) = 2\mathrm{i} \frac{k(g)}{k} \sin kz$$

este impară în raport cu variabila k, ceea ce face să se scrie

$$2\mathrm{i} \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(k) \frac{g(k)}{k} \sin kz \mathrm{d}k = W_1(\eta) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(k)}{k} \sin kz \mathrm{d}k, \tag{42}$$

cu $\eta \in (-\infty, +\infty)$.

Un rezultat asemănător se scrie și pentru integrala corespunzătoare funcției $W_2(k)$.

Pentru cilindrul de rază $\bar{r}_s$ se poate scrie

$$p(\bar{r}_s, -z) - p(\bar{r}_s, z) = \frac{4}{\mathcal{R}e(\bar{r}_s^2 - 1)} \int_{-\infty}^{+\infty} W_2(k) (\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz})\, \mathrm{d}k \tag{43}$$

și pentru cilindrul de rază $r = 1$ se găsește imediat relația

$$p(1, -z) - p(1, z) = \frac{4}{\mathcal{R}e(\bar{r}_s^2 - 1)} \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(k) (\mathrm{e}^{\mathrm{i}kz} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kz})\, \mathrm{d}k. \tag{44}$$

Dacă sînt comparate aceste mărimi cu relațiile (22) se observă imediat că se pot scrie egalitățile

$$p(\bar{r}_s, -z) - p(\bar{r}_s, z) = \frac{4}{\mathcal{R}e(\bar{r}_s^2 - 1)} [\bar{V}_2(-z) - \bar{V}_2(z)]$$

și

$$p(1, -z) - p(1, z) = \frac{4}{\mathcal{R}e(\bar{r}_s^2 - 1)}[\bar{V}_1(-z) - \bar{V}_1(z)]. \tag{45}$$

Prin trecerea la formă dimensională a tuturor mărimilor, formulele fiind scrise între punctele 0 și z, se obțin relațiile

$$\Delta p(r_s) = \frac{2\mu r_c}{r_s^2 - r_c^2}[V_2(0) - V_2(z)],$$
$$\Delta p(1) = \frac{2\mu r_c}{r_s^2 - r_c^2}[V_1(0) - V_1(z)], \tag{46}$$

unde s-a notat cu $\Delta p(r_s)$ diferența $p(r_s, 0) - p(r_s, z)$ și prin $\Delta p(1)$ diferența $p(1, 0) - p(1, z)$. Se observă că pentru viteza de filtrare, de exemplu acea de pe suprafața cilindrului exterioară a spațiului inelar, există relația

$$V_2(z) = V_2(0) - \frac{r_s^2 - r_c^2}{r_c} \cdot \frac{1}{2\mu} \Delta p(r_s). \tag{47}$$

O expresie asemănătoare se poate scrie și între variația vitezei de filtrare pe suprafața cilindrică interioară a spațiului inelar. Relațiile obținute pentru vitezele de filtrare nu au presupus anumite legi de filtrare pentru acestea. Ca și la fisura rectilinie [1], fisura circulară [2] sau tubul permeabil [3], viteza de filtrare dintr-un punct depinde de valoarea acesteia din punctul inițial și de pierderea de presiune care are loc între cele două puncte considerate.

La cimentarea sondelor de țiței și gaze se pot întîlni spații inelare care au numai suprafețele cilindrice permeabile. Relațiile obținute în lucrare rămîn valabile și pentru această situație.

Pierderea de presiune pentru spațiul inelar care are numai suprafața cilindrică exterioară permeabilă se obține din relația (35), prin introducerea în această formulă $V_1(\xi) = 0$, și se găsește

$$\Delta p = \frac{8\mu z}{r_s^2} F(\varepsilon)\left[U_{med}(0) - \frac{z r_c}{r_s^2 - r_c^2} V_2(\xi)\right], \tag{48}$$

$V_2(\xi)$ fiind viteza medie de filtrare prin suprafața cilindrică exterioară a spațiului inelar. Viteza de filtrare prin suprafața cilindrică exterioară este dată de relația (47).

3. APLICAȚIILE ÎN TEHNICA DE ȘANTIER A RELAȚIILOR OBȚINUTE

Așa cum s-a menționat anterior, spațiul inelar permeabil frecvent întîlnit este acela de la cimentarea sondelor de petrol și gaze. Aproape în toate cazurile aceste spații au numai suprafața cilindrică exterioară

permeabilă. În majoritatea situațiilor cimentarea se face pe la partea de jos a coloanei de exploatare sau a coloanei intermediare ce trebuie cimentată. Din acest motiv, pe măsură ce fluidul se ridică prin spațiul inelar presiunea lui scade, coloana de fluid avînd partea superioară liberă, în partea de jos a coloanei se produc infiltrări mai mari ale fluidului în teren ceea ce presupune o mai bună cimentare a coloanei în această parte. Raportul dintre pierderea de presiune printr-un spațiu inelar permeabil și prin cel nepermeabil are valoarea

$$\frac{(\Delta p)_{permeabil}}{(\Delta p)_{nepermeabil}} = 1 - \frac{zr_c}{r_s^2 - r_c^2} \cdot \frac{V_2(\xi)}{U_{med}(0)} \cdot \tag{49}$$

Se observă că la viteze mari de filtrare pierderea de presiune în spațiul inelar permeabil este mică. Se poate efectua un raționament și asupra efectului pe care-l are raportul $\varepsilon = r_c/r_s$ asupra pierderii de presiune dintr-un spațiu inelar permeabil. Aceasta se face analizînd raportul

$$\frac{z}{r_s + r_c} \cdot \frac{r_c}{r_s - r_c} = \frac{z}{r_s + r_c} \cdot \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \cdot \tag{50}$$

Pentru cîteva valori ale lui E în tabelul 1, se dau mărimea raportului $\varepsilon/(1 - \varepsilon)$

Tabelul 1

ε	0,20	0,40	0,60	0,80
$\varepsilon/(1 - \varepsilon)$	0,25	0,66	1,50	4,00

Se observă că la acest spațiu inelar permeabil cu secțiunea de curgere mică, ε fiind mic în acest caz, pierderea de presiune este comparabilă cu pierderea de presiune de la spațiul inelar nepermeabil cu aceeași distanță între suprafețele cilindrice. La spațiul inelar cu ε mare are loc o pierdere de presiune mult mai mică decît la spațiul inelar nepermeabil ambele avînd aceleași dimensiuni.

4. CONCLUZII

Mișcarea printr-un spațiu inelar, ambele arii ale spațiului fiind permeabile, poate fi întîlnită în multe aplicații în tehnica de șantier. Un asemenea caz, numai cu suprafața cilindrică exterioară a spațiului inelar permeabilă, poate fi întîlnit la cimentarea sondelor de petrol și gaze.

Vitezele de filtrare pe fețele laterale ale spațiului inelar sînt funcții de pierderile de presiune care au loc pe cele două fețe. Pierderea de presiune dintr-un spațiu inelar cu una sau cu ambele suprafețe cilindrice permeabile este mai mică decît pierderea de presiune într-un spațiu nepermeabil pentru aceeași viteză medie de intrare în secțiunile tran-

sversale ale celor două spații considerate. Este de notat că la spațiul inelar permeabil pierderea de presiune față de aceea de la spațiul inelar nepermeabil depinde și de raportul razelor suprafețelor cilindrice care formează spațiul inelar.

Primită la redacție la 24 decembrie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. T. Oroveanu, Al. D. Stan, *Mișcarea lentă a unui fluid incompresibil printr-o fisură permeabilă*, St. cerc. mec. apl., **37**, *1*, 33—44 (1978).
2. T. Oroveanu, Al. D. Stan, *Sur les écoulements dans les fissures circulaires á parois perméables*, Rev. roum. sci. techn. — Méc. appl., **24**, *2*, p. 175—189.
3. T. Oroveanu, Al. D. Stan, *Mișcarea unui fluid printr-un tub cu pereți permeabili*, St. cerc. mec. apl., **38**, 29—39 (1979).
4. I. N. Sneddon, *Fourier Transforms*, McGraw Hill Book Comp. Inc., New—York, Toronto, London 1951, p. 283—291.
5. Al. D. Stan, *Curgerea laminară a fluidelor în spații inelare*, St. Cerc. mec. apl., **38**, *5*, 637—648 (1979).

ASPECTE MATEMATICE ALE SINTEZEI MECANISMELOR CE UTILIZEAZĂ APROXIMAREA ÎN SENSUL LUI CEBÎȘEV

de D. LARIONESCU
Institutul politehnic București

Pornind de la considerentul că sinteza mecanismelor reprezintă o problemă de aproximare a funcțiilor, se studiază condițiile pe care le implică sinteza ce folosește aproximarea în sensul lui Cebîșev. Se dau condiții de existență și unicitate a soluției problemei de sinteză atît în cazul aproximării liniare, cît și neliniare.
Se prezintă, de asemenea, un criteriu pentru calitatea aproximării și un algoritm de calcul.

Sinteza mecanismelor reprezintă, matematic, o problemă de aproximare a funcțiilor.

ntr-adevăr, fie problema de sinteză a mecanismelor de ghidare ce constă În reproducerea unei traiectorii date prin funcția

$$y = f(x), \tag{1}$$

cu traiectoria descrisă de un punct din planul bielei unui mecanism plan, patrulater. Această ultimă traiectorie este caracterizată de o funcție de forma

$$y = F(a_1, a_2, \ldots, a_9, x), \tag{2}$$

unde cei nouă parametri a_k reprezintă elementele mecanismului, care servesc la poziționarea punctului din planul bielei și a mecanismului patrulater în raport cu sistemul de coordonate. Sinteza mecanismelor de transmitere impune, de asemenea, aproximarea unei funcții date, cu funcția ce reprezintă legea de mișcare a elementului condus a mecanismului, pentru o anumită lege de mișcare a elementului conducător.

Într-un cadru generalizat, problemele de sinteză impun aproximarea funcțiilor de tipul f, considerate „puncte" ale unui spațiu vectorial normat E, prin puncte ale subspațiului $G \subset E$, ce definesc funcții $F(\bar{a}, x)$ ce depind nu numai de x, de parametrii $a_1, a_2, \ldots, a_n$, componente ale unui vector $\bar{a} \in A$, unde $A \subset R^n$. Cazul liniar al aproximării rezultă cînd A este un spațiu vectorial și funcțiile $F(\bar{a}, x)$ sînt funcționale liniare pe A pentru fiecare x fix. În caz contrar problema de aproximare este neliniară [1]. Pentru un punct $f \in E$ dat (adică pentru o anumită funcție f repre-

zentînd o lege de mișcare impusă de tema de sinteză), problema de aproximare revine la a găsi un punct $F_0 \in G \subset E$ care să fie „cel mai aproape" de f dintre toate punctele subspațiului G, adică astfel ca

$$d(f, F_0) = \inf_{F \in G} d(f, F), \tag{3}$$

unde prin d se notează distanța din spațiul E definită de normă, adică

$$d(f, F) = \| f - F \|, \ (f, F \in E). \tag{4}$$

Dacă E este organizat ca spațiul $L^2[\alpha, \beta]$ al funcțiilor reale $f(x)$, de pătrat integrabil pe intervalul $[\alpha, \beta]$, cu norma

$$\| f \| = \int_\alpha^\beta f^2(x)\, dx, \tag{5}$$

atunci aproximarea funcțiilor va fi în sensul aproximării medii pătratice. Dacă E este organizat ca spațiul $C[\alpha, \beta]$ al funcțiilor $f(x)$, reale și continue pe intervalul $[\alpha, \beta]$, cu norma

$$\| f \| = \max_{x \in [\alpha, \beta]} | f(x) |, \tag{6}$$

aproximarea funcțiilor va fi în sensul lui Cebîșev.

Anumite caracteristici particularizează sinteza mecanismelor ca problemă de aproximare. Astfel, funcțiile $f(x)$ impuse de tema de sinteză sînt în majoritatea cazurilor continue și adesea periodice. Pe de altă parte, funcțiile aparținînd mulțimii G sînt de obicei aproximări convenabile (ponderate) ale legilor de mișcare reale ale mecanismelor, fiind de asemenea continue (datorită condiției continuității mișcării) și aproape întotdeauna periodice.

Din cele de mai sus rezultă că organizarea spațiului E drept spațiul $C[\alpha, \beta]$ este posibilă în marea majoritate a temelor de sinteză. Din această cauză, cazul aproximării în sensul lui Cebîșev are o deosebită importanță pentru sinteza mecanismelor.

În plus, acest tip de aproximare este în mod special util în sinteza mecanismelor deoarece dă posibilitatea controlării mărimii abatere în fiecare punct al intervalului de aproximare (abaterea este mai mică decît o valoare limită).

În cele ce urmează se studiază diferite aspecte ale aproximării în sensul lui Cebîșev.

Se definește abaterea minimă $d_G(f)$, astfel:

$$d_G(f) = \inf_{\bar{a} \in A} \| f(x) - F(\bar{a}, x) \|, \quad f \in C[\alpha, \beta]. \tag{7}$$

a) EXISTENȚĂ ȘI UNICITATE

Există un vector $\bar{a} \in A$ astfel ca să existe $d_G(f)$?

Funcția $F(\bar{a}, x)$ cu proprietatea de mai sus se numește aproximarea lui $f(x)$ referitoare la mulțimea G, în sensul lui Cebîșev.

În cazul liniar finit dimensional, existența aproximării în sensul lui Cebîșev pentru orice $f(x) \in C[\alpha, \beta]$ este garantată.

În cazul aproximării liniare un rol important o are condiția lui Haar [3].

Un subspațiu liniar G al lui $C[\alpha, \beta]$ de dimensiune finită n se spune că satisface condiția lui Haar dacă are proprietatea că orice funcție în G, care nu este identic nulă, se anulează în cel mult $n - 1$ puncte pe $[\alpha, \beta]$. O condiție echivalentă este aceea că pentru orice mulțime de puncte $x_k \in [\alpha, \beta]$, $k = 1, 2, \ldots, n$ și pentru orice mulțime de valori prescrise $y_1, y_2, \ldots, y_n$ există un $h(x) \in G$ unic, astfel ca

$$h(x_k) = y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Cu alte cuvinte, problema de interpolare este unic rezolvabilă. Se presupune deci că subspațiul liniar G al spațiului E satisface condiția lui Haar. În acest caz, pentru orice $f \in C[\alpha, \beta]$, se poate afirma că există în mod sigur o aproximare în sensul lui Cebîșev referitoare la G.

În cazul aproximării neliniare se întîlnesc dificultăți mari pentru existența unei astfel de aproximări chiar în cele mai simple cazuri. Foarte adesea de fapt nu există o aproximare în sensul lui Cebîșev. În anumite condiții acest lucru este posibil.

Aceste condiții reprezintă de fapt generalizarea condiției lui Haar din cazul aproximării liniare. Se postulează deci existența și unicitatea interpolării neliniare a funcțiilor din G. Adică, dată fiind mulțimea de valori prescrise $y_1, y_2, \ldots, y_n$ și punctele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfăcînd condiția

$$\alpha \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n \leqslant \beta, \tag{9}$$

există un vector unic $\bar{a} \in A$ astfel ca

$$F(\bar{a}, x_k) = y_k \tag{10}$$

pentru $k = 1, 2, \ldots, n$. Mulțimea G a funcțiilor $F(\bar{a}, x)$, cu proprietatea de mai sus, se numește unic rezolvabilă.

Rezultă deci că dacă mulțimea G a funcțiilor $F(\bar{a}, x)$ este unic rezolvabilă, atunci :

— există o aproximare în sensul lui Cebîșev în G ;

— această aproximare este unică.

În cazul aproximării neliniare, o importanță specială o are condiția lui Haar locală.

Fie vectorul $\bar{a}$

$$\bar{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n). \tag{11}$$

Presupunem că derivatele

$$\frac{\partial F(\bar{a}, x)}{\partial \alpha_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{12}$$

există și sînt continue pentru $\bar{a} \in A$ și $x \in [\alpha, \beta]$. Să notăm în continuare

$$H(\bar{a}, x, \bar{b}) = (\bar{b}, \operatorname{grad} F(\bar{a}, x)), \tag{13}$$

unde operația gradient trebuie înțeleasă întotdeauna referitor la vectorul parametru. Să notăm prin $W(\bar{a})$ spațiul liniar constînd din toate combinațiile liniare de forma

$$(\bar{b}, \operatorname{grad} F(\bar{a}, x)) \tag{14}$$

a derivatelor $\dfrac{\partial F}{\partial \alpha_k}$ de mai sus.

Dimensiunea lui, $d(\bar{a})$, depinde de $\bar{a}$ și, evident, $d(\bar{a}) \leqslant n$. Se spune că mulțimea V satisface condiția lui Haar locală dacă pentru orice $\bar{a} \in A$ spațiul liniar $W(\bar{a})$ satisface condiția lui Haar pentru cazul liniar, adică orice funcție neidentic nulă din $W(\bar{a})$ are cel mult $d(\bar{a}) - 1$ zerouri în $[\alpha, \beta]$.

Această condiție este echivalentă cu aceea ca problema interpolării liniare în $W(\bar{a})$ să fie unic rezolvabilă, așa cum s-a arătat mai sus. Fie intervalul $[\alpha, \beta]$ cu $\beta > \alpha$.

Se presupune că mulțimea G satisface condiția lui Haar locală și că pentru orice $\bar{a}, \bar{b} \in A$, funcția $F(\bar{a}, x) - F(\bar{b}, x)$ are cel mult $d(\bar{a}) - 1$ zerouri în $[\alpha, \beta]$ sau este identic nulă.

Se poate demonstra atunci că pentru orice funcție $f(x) \in C[\alpha, \beta]$ există cel mult o aproximare în sensul lui Cebîșev, referitoare la mulțimea G. Se impune astfel o condiție asupra numărului de zerouri pentru diferența dintre două funcții oarecare de aproximare F aparținînd mulțimii G, în vederea unicității aproximării.

b) CARACTERISTICI ALE FUNCȚIEI F(a, x)

Se pune problema găsirii unor condiții care să asigure că o funcție $F(\bar{a}, x) \in G$ este aproximarea în sensul lui Cebîșev a lui $f(x)$. Aceste condiții implică noțiunea de alternant după cum rezultă din cele ce urmează.

Fie $[\alpha, \beta]$ un interval real, așa ca $\beta > \alpha$. Se presupune că mulțimea G satisface condiția lui Haar locală și că pentru orice $\bar{a}, \bar{b} \in A$, funcția $F(\bar{a}, x) - F(\bar{b}, x)$ ori are cel mult $d(\bar{a}) - 1$ zerouri în $[\alpha, \beta]$, ori este identic nulă.

Atunci funcția $F(\bar{a}, x)$ este aproximarea lui $f(x) \in C[\alpha, \beta]$ în raport cu mulțimea G dacă și numai dacă există un alternant de lungime $d(\bar{a})+1$, adică dacă și numai dacă există o mulțime de puncte

$$x_k \in [\alpha, \beta], \; k = 1, 2, \ldots d(\bar{a}) + 1, \tag{15}$$

$$\alpha \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_{d(\bar{a})+1} \leqslant \beta,$$

astfel ca funcţia $\varepsilon(x) = f(x) - F(\bar{a}, x)$ să satisfacă condiţiile :

$$|\varepsilon(x_k)| = d_G(f), \; k = 1, 2, \ldots d(\bar{a}) + 1,$$
$$\varepsilon(x_k) + \varepsilon(x_{k+1}) = 0, \; k = 1, 2, \ldots d(\bar{a}). \tag{16}$$

Cu alte cuvinte, condiţia ca $F(\bar{a}, x)$ să fie aproximarea în sensul lui Cebîşev a funcţiei $f(x) \in C[\alpha, \beta]$ este ca valorile maxime şi minime ale funcţiei abatere $\varepsilon(x)$ să fie alternante şi egale în mărime ca în cazul polinoamelor lui Cebîşev.

c) CRITERIU PENTRU CALITATEA APROXIMĂRII

În cazul liniar, în care condiţiile lui Haar sînt satisfăcute, se poate determina o margine inferioară pentru mărimea lui $d_G(f)$ în forma unei funcţionale liniare. Dar în cazul aproximării neliniare? Aceasta rezultă din următoarele :

Se presupune că mulţimea G este astfel că pentru orice $\bar{a}$, $\bar{b} \in A$, funcţia $F(\bar{a}, x) - F(\bar{b}, x)$ fie că are cel mult $d(\bar{a}) - 1$ zerouri pe intervalul $[\alpha, \beta]$, fie că este identic nulă.

Se presupune, de asemenea, că funcţia $F(\bar{a}, x)$ are proprietatea că există $d(\bar{a}) + 1$ puncte $\xi_k \in [\alpha, \beta]$, aranjate în ordine crescătoare, astfel ca

$$f(\xi_k) - F(\bar{a}, \xi_k) \neq 0, \; k = 1, 2, \ldots d(\bar{a}) + 1,$$
$$\operatorname{sgn}[f(\xi_k) - F(\bar{a}, \xi_k)] = -\operatorname{sgn}[f(\xi_{k+1}) - F(\bar{a}, \xi_{k+1})], \; k = 1, 2, \ldots d(\bar{a}). \tag{17}$$

Atunci

$$d_G(f) \geqslant \min_{1 \leqslant k \leqslant d(\bar{a})+1} |f(\xi_k) - F(\bar{a}, \xi_k)|. \tag{18}$$

d) DETERMINAREA UNUI ALGORITM DE CALCUL

În cazul aproximării liniare, unde condiţiile lui Haar sînt satisfăcute, aproximarea în sensul lui Cebîşev referitoare la mulţimea G poate fi construită iterativ conform algoritmului de calcul al lui Remez [4]. Determinarea unui algoritm de calcul în cazul aproximării neliniare este cu mult mai complicată. Acest lucru se datorează faptului că numărul de puncte ale abaterii maxime care formează alternantul depinde nu numai de numărul parametrilor, ci şi de valorile acestora. Totuşi, în unele cazuri un algoritm de calcul poate fi construit, după cum rezultă din cele ce urmează.

Se presupune mai întîi că funcţia $f(x)$, ce urmează să fie aproximată pe intervalul $[\alpha, \beta]$ prin funcţia $F(\bar{a}, x) \in G$, este continuă şi că sînt satisfăcute condiţiile de la punctul *a*. Atunci aproximarea în sensul lui Cebîşev, $F(\bar{a}^*, x)$, există, este unică şi este caracterizată de un alternant de lungime $d(\bar{a}) + 1$.

Presupunem că $d(\bar{a}) = n$, pentru orice vector $\bar{a}$ într-o vecinătate convenabilă a lui $\bar{a}^*$.
Atunci există $n + 1$ puncte ale abaterii maxime x_k, $k = 1, 2, \ldots n + 1$, cu

$$\alpha \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1} \leqslant \beta, \tag{19}$$

astfel ca

$$F(\bar{a}^*, x_k) + (-1)^k \lambda = f(x_k) \tag{20}$$

pentru $k = 1, 2, \ldots n + 1$, unde

$$|\lambda| = d_G(f). \tag{21}$$

Dacă $F(\bar{a}_0, x)$ este o aproximare inițială pentru $F(\bar{a}^*, x)$ și dacă există $n + 1$ puncte $x_k^{(1)}$, $k = 1, 2, \ldots n + 1$, în intervalul $[\alpha, \beta]$, aranjate în ordine crescătoare astfel ca funcția

$$F(\bar{a}_0, x) - f(x) \tag{22}$$

să aibă semne alternante în aceste puncte, atunci este natural să se caute un vector $\bar{a}_1$ pentru care

$$L_k(\bar{a}_1, \lambda_1) = F(\bar{a}_1, x_k^{(1)}) + (-1)^k \lambda_1 = f(x_k^{(1)}), \quad k = 1, 2, \ldots, n + 1. \tag{23}$$

Sistemul de ecuații neliniare (23) poate fi rezolvat aplicînd metoda iterativă a lui Newton-Raphson [2].

Astfel, considerînd relațiile

$$\frac{\partial L_k(\bar{a}_1, \lambda_1)}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial F(\bar{a}_1, x_k^{(1)})}{\partial \alpha_r}, \qquad \begin{matrix} \bar{a}_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n), \\ r = 1, 2, \ldots\ldots, n, \end{matrix} \tag{24}$$

și

$$\frac{\partial L_k(\bar{a}_1, \lambda_1)}{\partial \lambda_1} = (-1)^k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n + 1 \tag{25}$$

se ajunge la sistemul de ecuații liniare :

$$(\bar{a}_1 - \bar{a}_0, \text{ grad } F(\bar{a}_0, x_k^{(1)})) + (-1)^k \lambda_1 = f(x_k^{(1)}) - F(\bar{a}_0, x_k^{(1)}) \tag{26}$$

pentru vectorul diferență $\bar{a}_1 - \bar{a}_0$ și numărul λ_1. Adunînd succesiv ecuațiile sistemului (26), necunoscuta λ_1 poate fi eliminată. Dacă dimensiunea lui $W(\bar{a}_0)$ este n, adică dacă „$\bar{a}_0$ este lîngă $\bar{a}^*$", atunci, în virtutea condițiilor lui Haar, sistemul (26) are soluție unică. Procedura continuă. Convergența metodei este asigurată numai în condiții foarte restrictive, care, în general, nu pot fi verificate „apriori". Adică trebuie să se cunoască dacă derivata secundă a funcției abatere există, este continuă și este diferită de zero în punctele abaterii maxime ce cad în interiorul intervalului.

În plus, prima derivată nu se poate anula la capetele intervalului, ori de cîte ori aceste puncte aparţin alternantului. Însuşi alternantul trebuie să fie unic. În general, metodele numerice pentru rezolvarea problemelor de aproximare neliniară implică un mare neajuns : nu există o garanţie a convergenţei. Iar sinteza mecanismelor, aşa cum s-a arătat la începutul lucrării, conduce cu predilecţie la probleme de aproximare neliniară.

Primită la redacţie la 28 noiembrie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. R. C. Bogdan, D. Larionescu, *Aprecieri asupra sintezei mecanismelor interpretată ca o problemă neliniară de aproximare*, St. cerc. mec. apl., **34**, 3 (1975).
2. R. C. Bogdan, D. Larionescu, S. Cononovici, *Sinteza mecanismelor plane articulate*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1977.
3. G. Meinardus, *Approximation of function theory and numerical methods*, Springer-Verlag, 1967.
4. E. Ja. Remez, *Sur le calcul effectiv des polynomes d'aproximation de Tchebyscheff*, Compt. rend., **199**, 337–340, 1934.

STUDII

CONTRIBUȚII LA SINTEZA SISTEMELOR ÎN LANȚ ȘI RAMIFICATE CE EXECUTĂ VIBRAȚII DE TORSIUNE. I

de IOAN CRĂCIUN
Institutul de învățămînt superior Baia Mare

În lucrare se studiază sinteza, pe baza valorilor pulsațiilor proprii, a sistemelor în lanț și ramificate ce execută vibrații de torsiune.
În partea I a lucrării se discută sinteza avînd ca punct de plecare relațiile dintre coeficienții și rădăcinile ecuației pulsațiilor proprii. Partea a II-a a lucrării este dedicată sintezei concepută ca studiul modificărilor ce trebuie aduse unui sistem oscilant cu parametri cunoscuți în scopul obținerii unui sistem posedînd valori impuse ale uneia sau mai multora dintre pulsațiile proprii.
Pentru stabilirea expresiilor coeficienților ecuației pulsațiilor proprii se utilizează metoda grafelor de fluență.

1. INTRODUCERE

În lucrările prezentate la bibliografie * s-a fundamentat o nouă metodă de calcul al vibrațiilor, în particular al vibrațiilor de torsiune, bazată pe utilizarea grafelor de fluență. În cadrul acestor lucrări s-au definit trei categorii de sisteme executînd vibrații de torsiune și anume sistemele în lanț, ramificate și închise. Studiul s-a limitat mai ales la analiza acestor sisteme.

De remarcat că problemele de sinteză a sistemelor vibrante sînt abordate, în general, în cadrul metodelor cunoscute de calcul, într-o măsură mult mai restrînsă decît cele de analiză. Această situație se explică mai ales prin aspectele multiple și prin dificultățile de calcul specifice problemelor de sinteză, fiind întîlnită și în alte domenii, de exemplu în teoria mecanismelor.

Lucrarea de față constituie o contribuție la sinteza, pe baza valorilor pulsațiilor proprii, a sistemelor în lanț și ramificate ce execută vibrații de torsiune.

În partea I a lucrării se discută cazul general de sinteză a sistemelor ramificate, sinteză avînd ca punct de plecare relațiile dintre coeficienții și rădăcinile ecuației pulsațiilor proprii precum și expresiile coeficienților acestei ecuații, deduse prin metoda grafurelor de fluență. Se particularizează relațiile obținute pentru cazul sistemelor în lanț și se studiază în detaliu sinteza unui sistem în lanț cu trei grade de libertate, stabilindu-se unele caracteristici ale sintezei sistemelor cu 4,5 și 6 grade de libertate.

* Bibliografia va fi dată la finele părții a doua a lucrării

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 3, 1980, P. 391–414

Partea a II-a a lucrării este dedicată sintezei sistemelor în lanţ şi ramificate concepută ca studiul modificărilor ce trebuie aduse unui sistem oscilant cu parametri cunoscuţi, în scopul obţinerii unui sistem posedînd valori impuse ale uneia sau mai multora dintre pulsaţiile proprii. Metoda elaborată utilizează dezvoltările în serii Taylor ale pătratelor pulsaţiilor proprii corespunzătoare sistemului oscilant iniţial. Se ia în considerare cazul particular al sistemelor în lanţ. Remarcîndu-se că, în general, numărul de parametri ce caracterizează sistemul este mai mare decît numărul de condiţii de legătură stabilite între aceştia, se studiază sinteza sistemului în cazul optimizării modificărilor parametrilor săi.

Ultimul paragraf al lucrării conţine exemple numerice de sinteză a unor sisteme ce execută vibraţii de torsiune.

Pe parcursul lucrării se fac referiri la conceptele definite anterior în cadrul metodei grafelor de fluenţă; cititorul este astfel solicitat să consulte lucrările de la bibliografie, în special [1, 2, 5, 6, 8].

2. SINTEZA PE BAZA RELAŢIILOR DINTRE COEFICIENŢII ŞI RĂDĂCINILE ECUAŢIEI PULSAŢIILOR PROPRII

2.1. CAZUL GENERAL

Se consideră cazul general al unui sistem ramificat cu n rotori şi se notează:

k — numărul de ordine al rotorilor sistemului vibrant;

j — numărul de ordine al rotorilor sistemului vibrant legaţi elastic de rotorul cu numărul k; pentru cazul particular al sistemelor în lanţ, j ia valorile $k-1$ şi $k+1$;

J_k, J_j — momentul de inerţie mecanic axial al rotorului $k(j)$ în raport cu axa de rotaţie a arborelui; pentru sisteme ramificate reprezintă momentul de inerţie echivalent;

$C_{k,j}$ — constanta elastică la torsiune în jurul axei de rotaţie a porţiunii de arbore cuprinsă între rotorii k, j; pentru sisteme ramificate reprezintă constanta elastică echivalentă;

ω_q — pulsaţia proprie de gradul q a sistemului vibrant; $q = 1, 2, \ldots, n-1$;

$\psi_{k,q}$ — amplitudinea unghiulară a vibraţiilor libere de gradul q ale rotorului k;

$\delta\psi_{k,j,q}$ — notaţie cu semnificaţia $\delta\psi_{k,j,q} = \psi_{k,q} - \psi_{j,k}$;

$t_{b,h}$ — transmitanţa buclei h a grafului vibraţiilor libere ale sistemului $(h = 1, 2, \ldots, 2n-2)$;

$\tau_{b,h}$ — notaţie cu semnificaţia $\tau_{b,h} = \omega_q^2 t_{b,h}$;

$T_v(Z)$ — termenul v al determinantului grafului vibraţiilor libere ale sistemului;

$\mathcal{T}_v(Z)$ — notaţie cu semnificaţia $\mathcal{T}_v(Z) = (\omega_q^2)^{v-1} T_v(Z)$;

a_v — coeficientul termenului în $(\omega_q^2)^{n-v-1}$ al ecuaţiei pulsaţiilor proprii;

Amplitudinile și diferențele amplitudinilor oscilațiilor libere de torsiune corespunzătoare pulsațiilor proprii ω_q satisfac [8] sistemul de ecuații.

$$\psi_{k,q} = \frac{1}{J_k \omega_q^2} \sum_j C_{k,j}\, \delta\psi_{k,j,q};$$
$$\delta\psi_{k,j,q} = \psi_{k,q} - \psi_{j,q}\,, \tag{1}$$
$$(\delta\psi_{k,j,q} = -\,\delta\psi_{j,k,q}\,;\ k,j=1,2,\ldots,n;\ k<j).$$

Prin transformări elementare ce elimină necunoscutele $\delta\psi_{k,j,q}$, sistemul (1) poate fi pus sub forma

$$\psi_{k,q}\left(\omega_q^2 - \sum_j \frac{C_{k,j}}{J_k}\right) + \sum_j \frac{C_{k,j}}{J_k}\,\psi_{j,q} = 0, \tag{2}$$
$$(q = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\,;\ k,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\,;\ k < j).$$

Avînd în vedere modul cum se obțin mărimile $\tau_{b,h}$ [1, 2, 8] și notînd

$$\sum(\tau_{b,h})_{Ak} = \sum_j \frac{C_{k,j}}{J_k} \tag{3}$$

suma mărimilor $\tau_{b,h}$ aferente buclelor adiacente vîrfului $\psi_{k,q}$ al grafului vibrațiilor libere, relațiile (2) pot fi puse sub forma

$$\psi_{k,q}\,(\omega_q^2 - \sum(\tau_{b,h})_{Ak}) + \sum_j \frac{C_{k,j}}{J_k}\,\psi_{j,q} = 0, \tag{4}$$
$$(q = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\,;\ k,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\,;\ k < j).$$

Anulînd determinantul grafului vibrațiilor libere construit pe baza sistemului de ecuații (1), se obține ecuația pulsațiilor proprii de forma

$$\sum_{v=0}^{n-1} (-1)^v\, a_v\, (\omega_q^2)^{n-v-1} = 0, \tag{5}$$

unde $a_0 = 1$, iar coeficienții a_v ($v = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1$), dați de relația

$$a_v = \mathcal{T}_{v+1}(Z), \tag{6}$$

sînt funcții de cele $2n-2$ mărimi $\tau_{b,h}$ care intră, în baza regulii lui Mason aplicată grafului vibrațiilor libere, în componența termenilor $T_v(Z)$ ai determinantului acestui graf. Prin urmare,

$$a_v = a_v\,(\tau_{b,1},\ \tau_{b,2},\ \ldots,\ \tau_{b.h},\ \ldots,\ \tau_{b,2n-2}), \tag{7}$$
$$(v = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

Dat fiind modul în care se obțin mărimile $\tau_{b,h}$ ca rapoarte de tipul $C_{k,j}/J_k$ [8] și semnificațiile mărimilor $C_{k,j}$, J_k, există relațiile evidente

$$\tau_{b,h} > 0, \tag{8}$$
$$(h = 1, 2, \ldots, 2n - 2).$$

Este cunoscută proprietatea rădăcinilor ecuației (5) de a fi strict pozitive și se presupune, în continuare, că ele sînt distincte, deci

$$0 < \omega_1^2 < \omega_2^2 < \ldots < \omega_{n-1}^2. \tag{9}$$

Pentru ca sistemul de ecuații (4) echivalent cu (2) să permită determinarea amplitudinilor $\psi_{k,q}$ este, evident, necesar ca

$$\omega_q^2 \neq \sum(\tau_{b,h})_{A_k}, \tag{10}$$
$$(q = 1, 2, \ldots, n-1, \; k = 1, 2, \ldots, n).$$

Aplicînd relațiile lui Viète, coeficienții ecuației (5) pot fi scriși sub forma

$$\begin{aligned}
a_1(\tau_{b,1}, \tau_{b,2}, \ldots, \tau_{b,2n-2}) &= \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_{n-1}^2,\\
a_2(\tau_{b,1}, \tau_{b,2}, \ldots, \tau_{b,2n-2}) &= \omega_1^2\omega_2^2 + \omega_1^2\omega_3^2 + \ldots + \omega_{n-2}^2\omega_{n-1}^2,\\
a_3(\tau_{b,1}, \tau_{b,2}, \ldots, \tau_{b,2n-2}) &= \omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2 + \ldots + \omega_{n-3}^2\omega_{n-2}^2\omega_{n-1}^2,\\
&\vdots \qquad\qquad \vdots\\
a_{n-2}(\tau_{b,1}, \tau_{b,2} \ldots, \tau_{b,2n-2}) &= \omega_1^2\omega_2^2 \ldots \omega_{n-2}^2 + \ldots + \omega_2^2\omega_3^2 \ldots \omega_{n-1}^2\\
a_{n-1}(\tau_{b,1}, \tau_{b,2}, \ldots, \tau_{b,2n-2}) &= \omega_1^2\omega_2^2 \ldots \omega_{n-1}^2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Relațiile (11) constituie un sistem de $n - 1$ condiții de legătură între $3n - 3$ parametri: ω_q^2 $(q = 1, 2, \ldots, n-1)$ și $\tau_{b,h}(h = 1, 2, \ldots, 2n - 2)$. Se deduce că $2n - 2$ dintre acești parametri pot lua valori oarecare, cu respectarea condițiilor (8), (9), (10), valorile celorlalți $n - 1$ parametri rezultînd prin rezolvarea sistemului de ecuații (11). Aceste ultime valori trebuie, de asemenea, să respecte condițiile (8)—(10), situație care, în general, nu se realizează fără adoptarea unor precauții suplimentare la alegerea valorilor primilor $2n - 2$ parametri.

Cazul în care se cunosc valorile $\tau_{b,h}(h = 1, 2, \ldots, 2n - 2)$ conduce la problema analizei sistemului oscilant.

În cazul *sistemelor în lanț* mărimile $\tau_{b,h}$ au expresiile

$$\tau_{b,h} = \frac{C_{\frac{h+1}{2}, \frac{h+1}{2}+1}}{J_{\frac{h+1}{2}}}, \; (h\text{—impar}),$$
$$\tau_{b,h} = \frac{C_{\frac{h}{2}, \frac{h}{2}+1}}{J_{\frac{h}{2}+1}}, \; (h\text{—par}) \tag{12}$$

sistemul (2) ia forma

$$\psi_{k,q}\left(\omega_q^2 - \frac{C_{k-1,\,k}}{J_k} - \frac{C_{k,\,k+1}}{J_k}\right) + \left(\frac{C_{k-1,\,k}}{J_k}\,\psi_{k-1,\,q} + \frac{C_{k,\,k+1}}{J_k}\,\psi_{k+1,\,q}\right) = 0,$$

$$(q = 1, 2, \ldots, n-1\,;\; k = 1, 2, \ldots, n), \tag{13}$$

sistemul (4) ia forma

$$\psi_{k,q}(\omega_q^2 - \tau_{b,2\,k-2} - \tau_{b,2\,k-1}) + \left(\frac{C_{k-1,\,k}}{J_k}\,\psi_{k-1,\,q} + \frac{C_{k,\,k+1}}{J_k}\,\psi_{k+1,\,q}\right) = 0,$$

$$(q = 1, 2, \ldots, n-1\,;\; k = 1, 2, \ldots, n), \tag{14}$$

iar condiția (10) devine

$$\omega_q^2 \neq \tau_{b,2\,k-2} + \tau_{b,2\,k-1}, \tag{15}$$

$$(q = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\,;\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\,;\ \tau_{b,0} = \tau_{b,\,2n-1} = 0),$$

2.2. SINTEZA UNUI SISTEM ÎN LANȚ CU TREI GRADE DE LIBERTATE

2.2.1. Generalități

În cazul $n = 3$, $Z = 4$, expresiile $\tau_{b,h}$ $(h = 1, 2, 3, 4)$, sînt, în baza relațiilor (12),

$$\tau_{b,1} = \frac{C_{1,2}}{J_1}, \tag{16}$$

$$\tau_{b,2} = \frac{C_{1,2}}{J_2}, \tag{17}$$

$$\tau_{b,3} = \frac{C_{2,3}}{J_2}, \tag{18}$$

$$\tau_{b,4} = \frac{C_{2,3}}{J_3}, \tag{19}$$

iar mărimile $\mathscr{T}_{v+1}(4)$, obținute prin aplicarea regulii lui Mason și coeficienții ecuației pulsațiilor proprii, obținuți conform relației (6), au expresiile

$$a_1 = \tau_{b,1} + \tau_{b,2} + \tau_{b,3} + \tau_{b,4},$$

$$a_2 = \tau_{b,1}\,\tau_{b,3} + \tau_{b,1}\,\tau_{b,4} + \tau_{b,2}\tau_{b,4}.$$

Relaţiile (8) iau forma

$$\tau_{b,1} > 0, \tag{20}$$

$$\tau_{b,2} > 0, \tag{21}$$

$$\tau_{b,3} > 0, \tag{22}$$

$$\tau_{b,4} > 0, \tag{23}$$

relaţiile (9) se scriu

$$0 < \omega_1^2, \tag{24}$$

$$\omega_1^2 < \omega_2^2, \tag{25}$$

condiţiile (10) se scriu detaliat

$$\omega_1^2 \neq \tau_{b,1}, \tag{26}$$

$$\omega_1^2 \neq \tau_{b,2} + \tau_{b,3}, \tag{27}$$

$$\omega_1^2 \neq \tau_{b,4}, \tag{28}$$

$$\omega_2^2 \neq \tau_{b,1}, \tag{29}$$

$$\omega_2^2 \neq \tau_{b,2} + \tau_{b,3}, \tag{30}$$

$$\omega_2^2 \neq \tau_{b,4}, \tag{31}$$

iar sistemul (11) capătă forma

$$a_1 = \tau_{b,1} + \tau_{b,2} + \tau_{b,3} + \tau_{b,4} = \omega_1^2 + \omega_2^2, \tag{32}$$

$$a_2 = \tau_{b,1}\tau_{b,3} + \tau_{b,1}\tau_{b,4} + \tau_{b,2}\tau_{b,4} = \omega_1^2\omega_2^2. \tag{33}$$

2.2.2. Clasificarea cazurilor de sinteză

În cele ce urmează se întreprinde o clasificare a cazurilor de sinteză a sistemelor cu trei grade de libertate din punctul de vedere al mărimilor cunoscute şi al celor ce urmează a fi determinate. Pentru a epuiza toate posibilităţile se va considera printre aceste cazuri şi analiza sistemului, cînd mărimile ce urmează a fi determinate sînt ω_1^2 şi ω_2^2.

Se iau în discuţie două variante de clasificare notate I şi II. În cadrul variantei I se consideră mărimile $\tau_{b,1}$, $\tau_{b,2}$, $\tau_{b,3}$, $\tau_{b,4}$, ω_1^2, ω_2^2 între care există relaţiile (32), (33). În cadrul variantei a II-a se consideră mărimile $C_{1,2}$, $C_{2,3}$, J_1, J_2, J_3, ω_1^2, ω_2^2 legate prin aceleaşi relaţii (32), (33) dar prin intermediul relaţiilor (16)—(19). În ambele variante numărul de necunoscute, care pot fi determinate cu ajutorul relaţiilor (32), (33), este de două.

În varianta I cei şase parametri pot fi combinaţi cîte doi în 15 moduri, obţinîndu-se deci 15 cazuri de sinteză. Avînd însă în vedere simetria centrală a grafului vibraţiilor libere [1, 8], adică posibilitatea de numerotare a buclelor sale şi deci a mărimilor $\tau_{b,h}$ începînd de la oricare din extremităţile sale fără ca relaţiile (20)—(33) să se modifice, numai nouă din aceste cazuri sînt distincte (tabelul 1).

Tabelul 1

Varianta I Cazul	Mărimi		Cazul echivalent Mărimi		Observații
	cunoscute	necunoscute	cunoscute	necunoscute	
a	$\tau_{b,1}$, $\tau_{b,2}$, $\tau_{b,3}$, $\tau_{b,4}$	ω_1^2, ω_2^2			Analiză
b	$\tau_{b,1}$, $\tau_{b,2}$, ω_1^2, ω_2^2	$\tau_{b,3}$, $\tau_{b,4}$,	$\tau_{b,3}$, $\tau_{b,4}$, ω_1^2, ω_2^2	$\tau_{b,1}$, $\tau_{b,2}$,	
c	$\tau_{b,1}$, $\tau_{b,3}$, ω_1^2, ω_2^2	$\tau_{b,2}$, $\tau_{b,4}$,	$\tau_{b,2}$, $\tau_{b,4}$, ω_1^2, ω_2^2	$\tau_{b,1}$, $\tau_{b,3}$,	
d	$\tau_{b,1}$, $\tau_{b,4}$, ω_1^2, ω_2^2	$\tau_{b,2}$, $\tau_{b,3}$,			
e	$\tau_{b,2}$, $\tau_{b,3}$, ω_1^2, ω_2^2	$\tau_{b,1}$, $\tau_{b,4}$,			
f	$\tau_{b,1}$, $\tau_{b,2}$, $\tau_{b,3}$, ω_1^2	$\tau_{b,4}$, ω_2^2	$\tau_{b,2}$, $\tau_{b,3}$, $\tau_{b,4}$, ω_1^2	$\tau_{b,1}$, ω_2^2	
g	$\tau_{b,1}$, $\tau_{b,2}$, $\tau_{b,3}$, ω_2^2	$\tau_{b,4}$, ω_1^2	$\tau_{b,2}$, $\tau_{b,3}$, $\tau_{b,4}$, ω_2^2	$\tau_{b,1}$, ω_1^2	
h	$\tau_{b,1}$, $\tau_{b,2}$, $\tau_{b,4}$, ω_1^2	$\tau_{b,3}$, ω_2^2	$\tau_{b,1}$, $\tau_{b,3}$, $\tau_{b,4}$, ω_1^2	$\tau_{b,2}$, ω_2^2	
i	$\tau_{b,1}$, $\tau_{b,2}$, $\tau_{b,4}$, ω_2^2	$\tau_{b,3}$, ω_1^2	$\tau_{b,1}$, $\tau_{b,3}$, $\tau_{b,4}$, ω_2^2	$\tau_{b,2}$, ω_1^2	

În varianta a II-a cele 21 combinații ce pot fi obținute cu cei șapte parametri grupați cîte doi, conduc la numai 13 cazuri distincte (tabelul 2). Dintre acestea, cazurile II A, II C, II D, II H, II I sînt echivalente, respectiv, cu cazurile Ia, Ie, Ib, If, Ig, așa cum se pune în evidență în cadrul studiului efectuat mai departe. Rămîn în cadrul variantei a II-a un număr de opt cazuri distincte între ele și diferite de cazurile analizate în cadrul variantei I.

2.2.3. Studiul cazurilor de sinteză

Cazul I a (analiză). Prin eliminarea între ecuațiile (32), (33) a uneia dintre necunoscutele ω_1^2 sau ω_2^2, se obține ecuația pulsațiilor proprii

$$(\omega_q^2)^2-(\tau_{b,1}+\tau_{b,2}+\tau_{b,3}+\tau_{b,4})\,\omega_q^2+\tau_{b,1}\tau_{b,3}+\tau_{b,1}\tau_{b,4}+\tau_{b;2}\tau_{b,4}=0, \tag{34}$$

având rădăcinile

$$\omega_{1,2}^2=\frac{1}{2}\{\tau_{b,1}+\tau_{b,2}+\tau_{b,3}+\tau_{b,4}\pm[(\tau_{b;1}+\tau_{b,2}+\tau_{b;3}+\tau_{b,4})^2-$$

$$-4(\tau_{b,1}\,\tau_{b,3}+\tau_{b,1}\,\tau_{b;4}+\tau_{b;2}\,\tau_{b,4})]^{1/2}\}. \tag{35}$$

Cazul I b. Sistemul de ecuații (32), (33) se pune sub forma

$$\begin{aligned}\tau_{b,3}+\tau_{b,4}&=\omega_1^2+\omega_2^2-(\tau_{b,1}+\tau_{b,2}),\\ \tau_{b,1}\,\tau_{b,3}+(\tau_{b,1}+\tau_{b,2})\,\tau_{b,4}&=\omega_1^2\,\omega_2^2,\end{aligned} \tag{36}$$

cu soluțiile

$$\tau_{b,3}=-\frac{[(\tau_{b,1}+\tau_{b,2})-\omega_1^2][(\tau_{b,1}+\tau_{b,2})-\omega_2^2]}{\tau_{b,2}}, \tag{37}$$

$$\tau_{b,4}=\tau_{b,1}+\frac{(\tau_{b,1}-\omega_1^2)\,(\tau_{b,1}-\omega_2^2)}{\tau_{b,2}}. \tag{38}$$

Avînd în vedere relația (25) și punînd condiția (22), se constată că ea este îndeplinită dacă

$$\omega_1^2<\tau_{b,1}+\tau_{b,2}, \tag{39}$$

$$\omega_2^2>\tau_{b,1}+\tau_{b,2}. \tag{40}$$

Condiția (23) este îndeplinită dacă

$$(\tau_{b,1}-\omega_1^2)\,(\omega_2^2-\tau_{b,1})<\tau_{b,1}\,\tau_{b;2}, \tag{41}$$

condiția (27) este îndeplinită dacă

$$(\omega_2^2-\tau_{b,1})\,(\tau_{b,1}+\tau_{b,2}-\omega_1^2)<\tau_{b,1}\,\tau_{b;2}, \tag{42}$$

Tabelul 2

Varianta II Cazul	Mărimi		Cazul echivalent Mărimi		Observaţii
	cunoscute	necunoscute	cunoscute	necunoscute	
A	$C_{1,2}$, $C_{2,3}$, J_1, J_2, J_3	ω_1^2, ω_2^2			Analiză. Echiv. cu Ia
B	$C_{1,2}$, $C_{2,3}$, J_1, ω_1^2, ω_2^2	J_2, J_3	$C_{1,2}$, $C_{2,3}$, J_3, ω_1^2, ω_2^2	J_1, J_2	
C	$C_{1,2}$, $C_{2,3}$, J_2, ω_1^2, ω_2^2	J_1, J_3			Echivalent cu Ie
D	$C_{1,2}$, J_1, J_2, ω_1^2, ω_2^2	$C_{2,3}$, J_3	$C_{2,3}$, J_2, J_3, ω_1^2, ω_2^2	$C_{1,2}$, J_1	Echivalent cu Ib
E	$C_{1,2}$, J_1, J_3, ω_1^2, ω_2^2	$C_{2,3}$, J_2	$C_{2,3}$, J_1, J_3, ω_1^2, ω_2^2	$C_{1\,2}$, J_2	
F	$C_{1\cdot2}$, J_2, J_3, $\omega_{1,}^2$ ω_2^2	$C_{2,3}$, J_1	$C_{2,3}$, J_1, J_2, ω_1^2, ω_2^2	$C_{1\,2}$, J_3	
G	J_1, J_2, J_3, $\omega_{1,}^2$ ω_2^2	$C_{1,2}$, $C_{2,3}$			
H	$C_{1,2}$, $C_{2,3}$, J_1, J_2, ω_1^2	J_3, ω_2^2	$C_{1,2}$, $C_{2,3}$, J_2, J_3, ω_1^2	J_1, ω_2^2	Echivalent cu If
I	$C_{1,2}$, $C_{2,3}$, J_1, J_2, ω_2^2	J_3, ω_1^2	$C_{1.2}$, $C_{2,3}$, J_2, J_3, ω_2^2	J_1, ω_1^2	Echivalent cu Ig
J	$C_{1,2}$, $C_{2,3}$, J_1, J_3, ω_1^2	J_2, ω_2^2			
K	$C_{1,2}$, $C_{2,3}$, J_1, J_3, ω_2^2	J_2, ω_1^2			
L	$C_{1,2}$, J_1, J_2, J_3, ω_1^2	$C_{2,3}$, ω_2^2	$C_{2,3}$, J_1, J_2, J_3, ω_1^2	$C_{1,2}$, ω_2^2	
M	$C_{1.2}$, J_1, J_2, J_3, ω_2^2	$C_{2,3}$, ω_1^2	$C_{2.3}$, J_1, J_2, J_3, ω_2^2	$C_{1,2}$, ω_1^2	

iar condiția (30) este îndeplinită dacă

$$(\omega_1^2 - \tau_{b,1})(\tau_{b,1} + \tau_{b,2} - \omega_2^2) \neq \tau_{b,1}\,\tau_{b,2}. \tag{43}$$

Condițiile (28) și (31) sînt automat îndeplinite dacă sînt satisfăcute condițiile (39) și (40).

Demonstrarea relațiilor (39)—(43) se face fără dificultate, pornind de la expresiile (37) și (38).

Cazul I c. Sistemul de ecuații (32), (33) se pune sub forma

$$\begin{aligned} \tau_{b,2} + \tau_{b,4} &= a_1 - (\tau_{b,1} + \tau_{b,3}), \\ \tau_{b,2}\,\tau_{b,4} + \tau_{b,1}\,\tau_{b,4} &= a_2 - \tau_{b,1}\,\tau_{b,3}. \end{aligned} \tag{44}$$

Explicitînd pe rînd $\tau_{b,4}$ și $\tau_{b,2}$ din prima ecuație (44) și introducînd expresiile respective în cea de-a doua, se obțin ecuațiile de gradul doi în $\tau_{b,2}$, respectiv în $\tau_{b,4}$

$$\begin{aligned} \tau_{b,2}^2 - (a_1 - 2\tau_{b,1} - \tau_{b,3})\,\tau_{b,2} + (\tau_{b,1}^2 - a_1\,\tau_{b,1} + a_2) &= 0, \\ \tau_{b,4}^2 - (a_1 - \tau_{b,3})\,\tau_{b,4} + (a_2 - \tau_{b,1}\,\tau_{b,3}) &= 0, \end{aligned} \tag{45}$$

cu rădăcinile

$$\begin{aligned} \tau'_{b,2} &= \frac{1}{2}(a_1 - 2\tau_{b,1} - \tau_{b,3} - \sqrt{\Delta'}), \\ \tau''_{b,2} &= \frac{1}{2}(a_1 - 2\tau_{b,1} - \tau_{b,3} + \sqrt{\Delta'}), \\ \tau''_{b,4} &= \frac{1}{2}(a_1 - \tau_{b,3} - \sqrt{\Delta'}), \\ \tau'_{b,4} &= \frac{1}{2}(a_1 - \tau_{b,3} + \sqrt{\Delta'}), \end{aligned} \tag{46}$$

unde

$$\Delta' = (a_1 - \tau_{b,3})^2 - 4(a_2 - \tau_{b,1}\,\tau_{b,3}), \tag{47}$$

rădăcinile în corespondență fiind $\tau'_{b,2}$, $\tau'_{b,4}$, respectiv $\tau''_{b,2}$, $\tau''_{b,4}$.

Se obțin rădăcini *reale și distincte* dacă $\Delta' > 0$, adică dacă

$$(a_1 - \tau_{b,3})^2 > 4(a_2 - \tau_{b,1}\,\tau_{b,3}). \tag{48}$$

Punînd condiția

$$0 < \tau'_{b,2} < \tau''_{b,2}, \tag{49}$$

se obțin condițiile necesare

$$\tau_{b,1}^2 - a_1\tau_{b,1} + a_2 > 0, \tag{50}$$

$$a_1 - 2\tau_{b,1} - \tau_{b,3} > 0. \tag{51}$$

Punînd condiția

$$0 < \tau''_{b,4} < \tau'_{b,4}, \tag{52}$$

se obțin condițiile necesare

$$a_2 - \tau_{b;1}\,\tau_{b;3} > 0, \tag{53}$$

$$a_1 - \tau_{b;3} > 0. \tag{54}$$

Condițiile (53) și (54) sînt automat îndeplinite dacă sînt îndeplinite condițiile (50) și (51). Deci se obțin valori reale, distincte și pozitive $\tau'_{b,2}$, $\tau''_{b,2}$, $\tau''_{b,4}$, $\tau'_{b,4}$ dacă sînt îndeplinite condițiile (48), (50) și (51).

Punînd condiția

$$\tau'_{b,2} < 0 < \tau''_{b,2}, \tag{55}$$

se obține condiția necesară

$$\tau_{b,1}^2 - a_1\tau'_{b,1} + a_2 < 0. \tag{56}$$

Avînd în vedere corespondența rădăcinilor ecuațiilor (45), condiția (55) implică condiția (52), realizată dacă sînt îndeplinite condițiile (53), (54). Deci se obține o soluție pozitivă $\tau''_{b,2}$ în corespondență cu soluția pozitivă $\tau''_{b,4}$ dacă sînt îndeplinite condițiile (56), (53), (54).

Condiția

$$\tau''_{b,4} < 0 < \tau'_{b,4} \tag{57}$$

iese din discuție întrucît ea implică condiția $a_2 - \tau_{b,1}\tau_{b,3} < 0$, adică $\tau_{b,4}(\tau_{b,1} + \tau_{b,2}) < 0$.

Condițiile (28), (31) sînt îndeplinite automat pentru ambele valori $\tau'_{b,4}$, $\tau''_{b,4}$, fiind îndeplinite de la început condițiile (26), (29).

Condiția (27) este îndeplinită pentru ambele valori $\tau'_{b,2}$, $\tau''_{b,2}$ dacă este îndeplinită condiția

$$\frac{\omega_1^2 - \tau_{b,3}}{\omega_2^2 - \tau_{b;1}} \neq 1 - \frac{\tau_{b,3}}{\tau_{b;1}}. \tag{58}$$

Se obțin *rădăcini confundate* dacă $\Delta' = 0$, adică dacă

$$(a_1 - \tau_{b;3})^2 = 4(a_2 - \tau_{b,1}\tau_{b;3}). \tag{59}$$

În acest caz

$$\tau'_{b,2} = \tau''_{b,2} = \frac{1}{2}(a_1 - 2\tau_{b;2} - \tau_{b,3}), \tag{60}$$

$$\tau'_{b;4} = \tau''_{b;4} = \frac{1}{2}(a_1 - \tau_{b,3}). \tag{61}$$

Ambele rădăcini sînt pozitive dacă este îndeplinită condiţia (51). Condiţia (28) este îndeplinită dacă

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 \neq \tau_{b,3}. \tag{62}$$

Condiţia (27) este îndeplinită dacă

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 \neq 2\tau_{b,1} + \tau_{b,3}. \tag{63}$$

Condiţiile (30) şi (31) sînt automat îndeplinite întrucît s-a presupus, de la început, că este îndeplinită condiţia (25).

Cazul I d. Sistemul de ecuaţii (32), (33) se pune sub forma

$$\begin{aligned} \tau_{b,2} + \tau_{b,3} &= a_1 - (\tau_{b,1} + \tau_{b,4}), \\ \tau_{b,4}\tau_{b,2} + \tau_{b,1}\tau_{b,3} &= a_2 - \tau_{b,1}\tau_{b,4}, \end{aligned} \tag{64}$$

cu soluţiile

$$\tau_{b,2} = \frac{-\tau_{b,1}^2 + a_1\tau_{b,1} - a_2}{\tau_{b,1} - \tau_{b,4}} = -\frac{(\tau_{b,1} - \omega_1^2)(\tau_{b,1} - \omega_2^2)}{\tau_{b;1} - \tau_{b,4}}, \tag{65}$$

$$\tau_{b,3} = \frac{\tau_{b,4}^2 - a_1\tau_{b,4} + a_2}{\tau_{b,1} - \tau_{b,4}} = \frac{(\tau_{b,4} - \omega_1^2)(\tau_{b,4} - \omega_2^2)}{\tau_{b,1} - \tau_{b,4}}. \tag{66}$$

În ipoteza $\tau_{b,1} < \tau_{b,4}$, condiţiile (21) şi (22) sînt îndeplinite dacă

$$\tau_{b,1} < \omega_1^2 < \tau_{b,4} < \omega_2^2. \tag{67}$$

În ipoteza $\tau_{b,4} < \tau_{b,1}$, condiţiile (21) şi (22) sînt îndeplinite dacă

$$\tau_{b,4} < \omega_1^2 < \tau_{b;1} < \omega_2^2. \tag{68}$$

Condiţiile (27) şi (30) sînt îndeplinite dacă sînt îndeplinite condiţiile

$$\omega_1^2 \neq \tau_{b,1} + \tau_{b,4}, \tag{69}$$

$$\omega_2^2 \neq \tau_{b,1} + \tau_{b,4}. \tag{70}$$

Cazul I e. Sistemul de ecuaţii (32), (33) se pune sub forma

$$\begin{aligned} \tau_{b,1} + \tau_{b,4} &= a_1 - (\tau_{b,2} + \tau_{b,3}), \\ \tau_{b,1}\tau_{b,4} + \tau_{b,3}\tau_{b,1} + \tau_{b,2}\tau_{b,4} &= a_2, \end{aligned} \tag{71}$$

din care rezultă ecuaţiile de gradul doi în $\tau_{b,1}$ şi $\tau_{b,4}$,

$$\begin{aligned} \tau_{b,1}^2 - (a_1 - 2\tau_{b,2})\,\tau_{b,1} + (\tau_{b,2}^2 + \tau_{b;2}\tau_{b;3} - a_1\tau_{b,2} + a_2) &= 0, \\ \tau_{b,4}^2 - (a_1 - 2\tau_{b;3})\,\tau_{b,4} + (\tau_{b,3}^2 + \tau_{b,2}\tau_{b,3} - a_1\tau_{b;3} + a_2) &= 0, \end{aligned} \tag{72}$$

cu rădăcinile

$$\tau'_{b,1} = \frac{1}{2}(a_1 - 2\tau_{b,2} - \sqrt{\Delta''}),$$

$$\tau''_{b,1} = \frac{1}{2}(a_1 - 2\tau_{b,2} + \sqrt{\Delta''}),$$

$$\tau''_{b,4} = \frac{1}{2}(a_1 - 2\tau_{b,3} - \sqrt{\Delta''}), \tag{73}$$

$$\tau'_{b,4} = \frac{1}{2}(a_1 - 2\tau_{b,3} + \sqrt{\Delta''}),$$

unde

$$\Delta'' = a_1^2 - 4(\tau_{b,2}\tau_{b,3} + a_2), \tag{74}$$

rădăcinile în corespondență fiind $\tau'_{b,1}$, $\tau'_{b,4}$, respectiv $\tau''_{b,1}$, $\tau''_{b,4}$. Se obțin rădăcinile *reale și distincte* dacă $\Delta'' > 0$, adică dacă

$$\tau_{b,2}\,\tau_{b,3} < \frac{a_1^2 - 4a_2}{4}. \tag{75}$$

Se presupune, deocamdată, $\tau_{b,2} \neq \tau_{b,3}$.

Punînd condiția

$$0 < \tau'_{b,1} < \tau''_{b,1}, \tag{76}$$

se obțin condițiile necesare,

$$\tau_{b,2}^2 + \tau_{b,2}\tau_{b,3} - a_1\tau_{b,2} + a_2 > 0, \tag{77}$$

$$a_1 - 2\tau_{b,2} > 0. \tag{78}$$

Punînd condiția

$$0 < \tau''_{b,4} < \tau'_{b,4}, \tag{79}$$

se obțin condițiile necesare

$$\tau_{b,3}^2 + \tau_{b,2}\tau_{b,3} - a_1\tau_{b,3} + a_2 > 0, \tag{80}$$

$$a_1 - 2\tau_{b,3} > 0. \tag{81}$$

Condițiile

$$0 < \tau'_{b,1} < \tau''_{b,1},$$

$$\tau''_{b,4} < 0 < \tau'_{b,4}, \tag{82}$$

se realizează simultan dacă sînt îndeplinite condițiile (77), (78) și condiția

$$\tau_{b,3}^2 + \tau_{b,2}\tau_{b,3} - a_1\tau_{b,3} + a_2 < 0. \tag{83}$$

Condiţiile

$$\tau'_{b,1} < 0 < \tau''_{b,1},$$
$$0 < \tau''_{b,4} < \tau'_{b,4}, \tag{84}$$

se realizează simultan dacă sînt îndeplinite condiţiile (80), (81) şi condiţia

$$\tau^2_{b,2} + \tau_{b,2}\,\tau_{b,3} - a_1\,\tau_{b,2} + a_2 < 0. \tag{85}$$

Condiţia (26), pentru ambele valori $\tau'_{b,1}$, $\tau''_{b,1}$, se realizează dacă este îndeplinită condiţia

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 \neq \tau_{b,2} - \tau_{b,3}. \tag{86}$$

Condiţia (28), pentru ambele valori $\tau'_{b,4}$, $\tau''_{b,4}$, se realizează dacă este îndeplinită condiţia

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 \neq \tau_{b,3} - \tau_{b,2}. \tag{87}$$

Condiţia (29) pentru ambele valori $\tau'_{b,1}$, $\tau''_{b,1}$ şi condiţia (31) pentru ambele valori $\tau'_{b,4}$ $\tau''_{b,4}$ se realizează întotdeauna. Într-adevăr, aceste condiţii sînt îndeplinite dacă $\omega_2^2 - \omega_1^2 \neq (\tau_{b,2} + \tau_{b,3})$, relaţie satisfăcută în orice caz, date fiind condiţiile (25), (21), (22).

Dacă $\tau_{b,2} = \tau_{b,3}$, se obţine $\omega_1^2 = \omega_2^2$, deci condiţia (25) nu este îndeplinită.

Se obţin *rădăcini confundate* dacă $\Delta'' = 0$, adică dacă

$$a_1^2 = 4(\tau_{b,2}\,\tau_{b,3} + a_2). \tag{88}$$

În acest caz

$$\tau'_{b,1} = \tau''_{b,1} = \frac{1}{2}\,(a_1 - 2\tau_{b,2}),$$
$$\tau'_{b,4} = \tau''_{b,4} = \frac{1}{2}\,(a_1 - 2\tau'_{b,3}). \tag{89}$$

Ambele rădăcini sînt pozitive dacă sînt îndeplinite condiţiile (78) şi (81).

Condiţia (26) este îndeplinită dacă

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 \neq 2\tau_{b,2}. \tag{90}$$

Condiţia (28) este îndeplinită dacă

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 \neq 2\tau_{b,3}. \tag{91}$$

Condițiile (29) și (31) se realizează întotdeauna. Într-adevăr, se demonstrează că aceste condiții sînt satisfăcute dacă $\omega_1^2 - \omega_2^2 \neq 2\tau_{b.2}$, respectiv $\omega_1^2 - \omega_2^2 \neq 2\tau_{b.3}$, relații îndeplinite în orice caz avînd în vedere (25), (21) și (22).

Cazul I f. Sistemul de ecuații (32), (33) se pune sub forma

$$\begin{aligned} \omega_2^2 - \tau_{b.4} &= \tau_{b.1} + \tau_{b.2} + \tau_{b.3} - \omega_1^2, \\ \omega_1^2\,\omega_2^2 - (\tau_{b.1} + \tau_{b.2})\,\tau_{b.4} &= \tau_{b.1}\tau_{b.3}, \end{aligned} \tag{92}$$

cu soluțiile

$$\omega_2^2 = \frac{-(\tau_{b.1} + \tau_{b.2})^2 + \omega_1^2(\tau_{b.1} + \tau_{b.2}) - \tau_{b.2}\,\tau_{b.3}}{\omega_1^2 - (\tau_{b.1} + \tau_{b.2})}, \tag{93}$$

$$\tau_{b.4} = \frac{(\omega_1^2)^2 - \omega_1^2(\tau_{b.1} + \tau_{b.2} + \tau_{b.3}) + \tau_{b.1}\,\tau_{b.3}}{\omega_1^2 - (\tau_{b.1} + \tau_{b.2})}. \tag{94}$$

Condiția (25) este îndeplinită dacă

$$\omega_1^2 < \tau_{b.1} + \tau_{b.2}. \tag{95}$$

Condiția (23) este îndeplinită, avînd în vedere (95), dacă numărătorul expresiei (94) este negativ, deci dacă

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \in \Big(&\frac{1}{2}\,[\tau_{b.1} + \tau_{b.2} + \tau_{b.3} - \sqrt{(\tau_{b.1} + \tau_{b.2} + \tau_{b.3})^2 - 4\tau_{b.1}\tau_{b.3}}], \\ &\frac{1}{2}[\tau_{b.1} + \tau_{b.2} + \tau_{b.3} + \sqrt{(\tau_{b.1} + \tau_{b.2} + \tau_{b.3})^2 - 4\tau_{b.1}\tau_{b.3}}]\Big). \end{aligned} \tag{96}$$

Condiția (28) este automat îndeplinită, avînd în vedere că s-a presupus satisfăcută condiția (26).

Condiția (29) este îndeplinită dacă este satisfăcută relația

$$\omega_1^2 \neq \tau_{b.1} + \tau_{b.2} + \tau_{b.3}. \tag{97}$$

Condiția (31) este îndeplinită dacă sînt îndeplinite condițiile (95) și (97).

Condiția (27) este satisfăcută dacă este îndeplinită condiția

$$\omega_1^2 \neq \tau_{b.1} + \frac{\tau_{b.1}\,\tau_{b.2}}{\tau_{b.1} - \tau_{b.3}}. \tag{98}$$

Cazul Ig. Sistemul de ecuații (32), (33) se pune sub forma

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - \tau_{b.4} &= \tau_{b.1} + \tau_{b.2} + \tau_{b.3} - \omega_2^2, \\ \omega_2^2\omega_1^2 - (\tau_{b.1} + \tau_{b.2})\,\tau_{b.4} &= \tau_{b.1}\tau_{b.3}, \end{aligned} \tag{99}$$

ale cărui soluţii sînt

$$\omega_1^2 = \frac{-(\tau_{b,1} + \tau_{b,2})^2 + \omega_2^2(\tau_{b,1} + \tau_{b,2}) - \tau_{b,2}\tau_{b,3}}{\omega_2^2 - (\tau_{b,1} + \tau_{b,2})}, \tag{100}$$

$$\tau_{b,4} = \frac{(\omega_2^2)^2 - \omega_2^2(\tau_{b,1} + \tau_{b,2} + \tau_{b,3}) + \tau_{b,1}\tau_{b,3}}{\omega_2^2 - (\tau_{b,1} + \tau_{b,2})}. \tag{101}$$

Condiţia (24) este îndeplinită dacă

$$\omega_2^2 > \tau_{b,1} + \tau_{b,2} + \frac{\tau_{b,2}\tau_{b,3}}{\tau_{b,1} + \tau_{b,2}}, \tag{102}$$

relaţie care asigură pozitivitatea numărătorului şi numitorului expresiei (100).

Condiţia (25) este îndeplinită dacă este satisfăcută relaţia

$$\omega_2^2 - \omega_1^2 = \frac{[\omega_2^2 - (\tau_{b,1} + \tau_{b,2})]^2 + \tau_{b,2}\tau_{b,3}}{\omega_2^2 - (\tau_{b,1} + \tau_{b,2})} > 0.$$

Numărătorul acestei expresii este, evident, pozitiv, iar numitorul este de asemenea pozitiv, dacă este îndeplinită condiţia (102). Deci condiţia (25) în ipoteza (102) este, în orice caz, satisfăcută.

Condiţia (23) este îndeplinită dacă numărătorul expresiei (101) este pozitiv, situaţie care se obţine, simultan cu îndeplinirea condiţiei (25), numai dacă

$$\omega_2^2 > \frac{1}{2}[\tau_{b,1} + \tau_{b,2} + \tau_{b,3} + \sqrt{(\tau_{b,1} + \tau_{b,2} + \tau_{b,3})^2 - 4\tau_{b,1}\tau_{b,3}}]. \tag{103}$$

Condiţia (26) se obţine dacă

$$\omega_2^2 \neq \tau_{b,1} + \tau_{b,2} + \tau_{b,3}, \tag{104}$$

iar condiţia (27) se obţine dacă

$$\omega_2^2 \neq \tau_{b,1} + \frac{\tau_{b,1}\tau_{b,2}}{\tau_{b,1} - \tau_{b,3}}. \tag{105}$$

Condiţia (28) se realizează automat dacă sînt îndeplinite condiţiile (102) şi (104), iar condiţia (31) este îndeplinită dat fiind că, de la început, se presupune îndeplinită condiţia (29).

Cazul Ih. Sistemul de ecuaţii (32), (33) se scrie

$$\begin{aligned} \omega_2^2 - \tau_{b,3} &= \tau_{b,1} + \tau_{b,2} + \tau_{b,4} - \omega_1^2, \\ \omega_1^2\omega_2^2 - \tau_{b,1}\tau_{b,3} &= \tau_{b,1}\tau_{b,4} + \tau_{b,2}\tau_{b,4}, \end{aligned} \tag{106}$$

obținîndu-se expresiile necunoscutelor,

$$\omega_2^2 = \tau_{b,1} + \frac{\tau_{b,2}(\tau_{b,4} - \tau_{b,1})}{\omega_1^2 - \tau_{b,1}}, \tag{107}$$

$$\tau_{b,3} = \frac{(\omega_1^2 - \tau_{b,4})\,[\omega_1^2 - (\tau_{b,1} + \tau_{b,2})]}{\omega_1^2 - \tau_{b,1}}. \tag{108}$$

Condiția (22) este satisfăcută cu condiția îndeplinirii relațiilor

$$\omega_1^2 < \tau_{b,1} + \tau_{b,2}, \tag{109}$$

$$\tau_{b,1} < \omega_1^2 < \tau_{b,4}. \tag{110}$$

Condiția (25) este îndeplinită dacă sînt îndeplinite condițiile precedente, cu excepția cazului

$$\omega_1^2 < \tau_{b,4} < \tau_{b,1} + \tau_{b,2}. \tag{111}$$

În acest din urmă caz, condiția (25) este îndeplinită numai dacă este satisfăcută relația

$$\omega_1^2 < \tau_{b,1} + \sqrt{\tau_{b,2}\,(\tau_{b,4} - \tau_{b,1})}. \tag{112}$$

Condițiile (29) și (31) sînt automat îndeplinite în ipotezele (109), (110).

Condiția (27) este îndeplinită dacă este satisfăcută relația

$$\omega_1^2 \neq \tau_{b,1} + \tau_{b,2} - \frac{\tau_{b,1}\,\tau_{b,2}}{\tau_{b,4}}, \tag{113}$$

ar condiția (30) este îndeplinită dacă este satisfăcută relația

$$\omega_1^2 \neq \tau_{b,1} + \tau_{b,4}. \tag{114}$$

Cazul I i. Sistemul de ecuații (32), (33) ia forma

$$\begin{aligned} \omega_1^2 - \tau_{b,3} &= \tau_{b,1} + \tau_{b,2} + \tau_{b,4} - \omega_2^2, \\ \omega_2^2\omega_1^2 - \tau_{b,1}\tau_{b,3} &= \tau_{b,1}\tau_{b,4} + \tau_{b,2}\tau_{b,4}, \end{aligned} \tag{115}$$

cu soluțiile

$$\omega_1^2 = \tau_{b,1} + \frac{\tau_{b,2}(\tau_{b,4} - \tau_{b,1})}{\omega^2 - \tau_{b,1}}, \tag{116}$$

$$\tau_{b,3} = \frac{(\omega_2^2 - \tau_{b,4})\,[\omega_2^2 - (\tau_{b,1} + \tau_{b,2})]}{\omega_2^2 - \tau_{b,1}}. \tag{117}$$

Condiția (22) se obține dacă sînt îndeplinite condițiile

$$\omega_2^2 > \tau_{b.1} + \tau_{b.2}, \tag{118}$$

$$\omega_2^2 > \tau_{b.4}. \tag{119}$$

Îndeplinirea condiției (24) este asigurată de îndeplinirea condițiilor (118) și (119). Aceleași două condiții asigură îndeplinirea condiției (25) cu excepția cazului

$$\tau_{b.4} > \tau_{b.1} + \tau_{b.2}, \tag{120}$$

caz în care mai este necesară îndeplinirea condiției

$$\omega_2^2 > \tau_{b.1} + \sqrt{\tau_{b.2}(\tau_{b.4} - \tau_{b.1})}, \tag{121}$$

și, evident, a condiției

$$\tau_{b.4} > \tau_{b.1}. \tag{122}$$

Condițiile (26) și (28) sînt îndeplinite cu siguranță dacă sînt îndeplinite condițiile (118), (119), (122).

Condiția (27) este îndeplinită în cazul în care este îndeplinită relația

$$\omega_2^2 \neq \tau_{b.1} + \tau_{b.4}. \tag{123}$$

Condiția (30) este îndeplinită automat, odată ce este satisfăcută condiția (118).

Cazul II A. Se calculează cu ajutorul relațiilor (16)—(19) valorile $\tau_{b.1}$, $\tau_{b.2}$, $\tau_{b.3}$, $\tau_{b.4}$ și se obține o problemă *în cazul I a.*

Cazul II B. Se calculează $\tau_{b.1}$ în baza relației (16) și se notează

$$\alpha_{3/2} = \frac{C_{2.3}}{C_{1.2}} = \frac{\tau_{b.3}}{\tau_{b.2}}. \tag{124}$$

Explicitînd din relația de mai sus $\tau_{b.3}$ și substituind această expresie în relația (37) se obține ecuația de gradul doi în $\tau_{b.2}$.

$$(\alpha_{3/2} + 1)\,\tau_{b.2}^2 - (a_1 - 2\tau_{b.1})\,\tau_{b.2} + (\tau_{b.1}^2 - a_1\tau_{b.1} + a_2) = 0 \tag{125}$$

cu rădăcinile

$$\tau'_{b.2} = \frac{1}{2(\alpha_{3/2} + 1)}(a_1 - 2\tau_{b.1} - \sqrt{\Delta'''}), \tag{126}$$

$$\tau''_{b.2} = \frac{1}{2(\alpha_{3/2} + 1)}(a_1 - 2\tau_{b.1} + \sqrt{\Delta'''}). \tag{127}$$

unde

$$\Delta''' = a_1^2 - 4a_2 - 4\alpha_{3/2}(\tau_{b.1}^2 - a_1\tau_{b.1} + a_2). \tag{128}$$

Se obțin *rădăcini reale și distincte* dacă $\Delta''' > 0$, adică dacă

$$a_1^2 - 4a_2 > 4\alpha_{3/2}(\tau_{b.1}^2 - a_1\tau_{b.1} + a_2). \tag{129}$$

Condiția (21) este automat îndeplinită pentru ambele valori $\tau'_{b.2} < \tau''_{b.2}$ în ipoteza, evident valabilă, $\alpha_{3/2} > 0$.

Se obțin *rădăcini confundate* dacă $\Delta''' = 0$, adică dacă

$$a_1^2 - 4a_2 = 4\alpha_{3/2}(\tau_{b.1}^2 - a_1\tau_{b.1} + a_2). \tag{130}$$

Condiția (21) este îndeplinită pentru $\tau'_{b.2} = \tau''_{b.2}$ dacă

$$a_1 > 2\tau_{b.1}. \tag{131}$$

Valorile $\tau'_{b.2}$, $\tau''_{b.2}$ odată determinate, se obțin valorile

$$\tau'_{b.3} = \alpha_{3/2}\ \tau'_{b.2}, \tag{132}$$

$$\tau''_{b.3} = \alpha_{3/2}\ \tau_{b.2}, \tag{133}$$

$$\tau'_{b.4} = a_1 - (\tau_{b.1} + \tau'_{b.2} + \tau'_{b.3}), \tag{134}$$

$$\tau''_{b.4} = a_1 - (\tau_{b.1} + \tau''_{b.2} + \tau''_{b.3}). \tag{135}$$

Condițiile pentru ca aceste valori să satisfacă relațiile corespunzătoare (20)—(31) sînt cele stabilite la cazul Ib.

Cazul II C. Se calculează cu ajutorul relațiilor (17), (18) valorile $\tau_{b.2}$, $\tau_{b.3}$ și se obține o problemă în *cazul Ie.*

Cazul II D. Se calculează cu ajutorul relațiilor (16), (17) valorile $\tau_{b.1}$, $\tau_{b.2}$, și se obține o problemă în *cazul Ib.*

Cazul II E. Se calculează $\tau_{b.1}$ cu ajutorul relației (16) și se introduce notația

$$\alpha_{24/3} = \frac{C_{1.2}}{J_3} = \frac{\tau_{b.2}\ \tau_{b.4}}{\tau_{b.3}}. \tag{136}$$

Se consideră expresiile $\tau_{b.3}$ și $\tau_{b.4}$ date de relațiile (37) și (38) și se substituie în relația (136), obținîndu-se ecuația de gradul doi în $\tau_{b.2}$

$$(\tau_{b.1} + \alpha_{24/3})\tau_{b.2}^2 - [\alpha_{24/3}(a_1 - 2\tau_{b.1}) - (\tau_{b.1}^2 - a_1\tau_{b.1} + a_2)]\tau_{b.2} +$$

$$+ \alpha_{24/3}(\tau_{b.1}^2 - a_1\tau_{b.1} + a_2) = 0, \tag{137}$$

cu rădăcinile

$$\tau'_{b.2} = \frac{1}{2(\tau_{b.1} + \alpha_{24/3})}\,[(a_1 - 2\tau_{b.1})\alpha_{24/3} - (\tau_{b.1}^2 - a_1\tau_{b.1} + a_2) - \sqrt{\Delta^{IV}}], \tag{138}$$

$$\tau''_{b.2} = \frac{1}{2(\tau_{b.1} + \alpha_{24/3})}\,[(a_1 - 2\tau_{b.1})\,\alpha_{24/3} - (\tau_{b.1}^2 - a_1\tau_{b.1} + a_2) + \sqrt{\Delta^{IV}}], \tag{139}$$

unde

$$\Delta^{IV} = \alpha_{24/3}^2(a_1^2 - 4a_2) - 2\alpha_{24/3}a_1(\tau_{b,1}^2 - a_1\tau_{b,1} + a_2) + \\ + (\tau_{b,1}^2 - a_1\tau_{b,1} + a_2)^2. \tag{140}$$

Se obţin *rădăcini reale şi distincte* dacă $\Delta^{IV} > 0$, condiţie ce necesită

$$\alpha_{24/3} > \frac{\tau_{b,1}^2 - a_1\tau_{b,1} + a_2}{a_1 - 2\sqrt{a_2}}. \tag{141}$$

Condiţia (21) este îndeplinită pentru ambele valori $\tau'_{b,2}$, $\tau''_{b,2}$ în ipoteza, evident valabilă $\alpha_{24/3} > 0$.

Se obţin rădăcini *confundate* dacă $\Delta^{IV} = 0$, situaţie care are loc în cazul în care este îndeplinită condiţia

$$\alpha_{24/3} = \frac{\tau_{b,1}^2 - a_1\tau_{b,1} + a_2}{a_1 - 2\sqrt{a_2}}. \tag{142}$$

Condiţia (21) este îndeplinită pentru $\tau'_{b,2} = \tau''_{b,2}$ dacă

$$a_2 > \tau_{b,1}^2. \tag{143}$$

După determinarea valorilor $\tau'_{b,2}$, $\tau''_{b,2}$ se face apel la relaţiile (37) şi (38) pentru obţinerea valorilor $\tau'_{b,3}$, $\tau''_{b,3}$, $\tau'_{b,4}$, $\tau''_{b,4}$. Condiţiile pentru ca aceste valori să satisfacă relaţiile aferente (20)—(31) sînt cele stabilite la cazul Ib.

Cazul II F. Se calculează $\tau_{b,2}$ cu relaţia (17) şi se introduce notaţia (136). Se consideră expresiile $\tau_{b,3}$ şi $\tau_{b,4}$ date de relaţiile (37) şi (38) şi se substituie în relaţia (136), obţinîndu-se ecuaţia de gradul doi în $\tau_{b,1}$

$$(\tau_{b,2} + \alpha_{24/3})\tau_{b,1}^2 - [\alpha_{24/3}(a_1 - 2\tau_{b,2}) - (\tau_{b,2}^2 - a_1\tau_{b,2})]\tau_{b,1} + \\ + [\alpha_{24/3}(\tau_{b,2}^2 - a_1\tau_{b,2} + a_2) + a_2\tau_{b;2}] = 0, \tag{144}$$

cu rădăcinile

$$\tau'_{b,1} = \frac{1}{2(\tau_{b,2} + \alpha_{24/3})}[(a_1 - 2\tau_{b;2})\,\alpha_{24/3} - \tau_{b,2}(\tau_{b,2} - a_1) - \sqrt{\Delta^V}], \tag{145}$$

$$\tau''_{b,1} = \frac{1}{2(\tau_{b,2} + \alpha_{24/3})}[(a_1 - 2\tau_{b,2})\,\alpha_{24/3} - \tau_{b;2}(\tau_{b,2} - a_1) + \sqrt{\Delta^V}], \tag{146}$$

unde

$$\Delta^V = \alpha_{24/3}^2(a_1^2 - 4a_2) - 2\alpha_{24/3}(a_1\tau_{b,2}^2 - a_1^2\tau_{b,2} + 4a_2\tau_{b,2}) + \\ + \tau_{b,2}^2(\tau_{b,2}^2 + a_1^2 - 2a_1\tau_{b,2} - 4a_2). \tag{147}$$

Se obțin *rădăcini reale și distincte* dacă $\Delta^V > 0$, situație care se realizează dacă

$$\alpha_{24/3} > \tau_{b,2}\left(\frac{\tau_{b,2}}{a_1 - 2\sqrt{a_2}} - 1\right). \tag{148}$$

Condiția (20) este îndeplinită pentru ambele valori, $\tau'_{b,1}$ și $\tau''_{b,1}$ dacă este satisfăcută condiția

$$\alpha_{24/3} > \frac{a_2\tau_{b,2}}{-\tau^2_{b,2} + a_1\tau_{b,2} - a_2}. \tag{149}$$

Se obține $\tau'_{b,1} < 0 < \tau''_{b,1}$ (150)
dacă

$$\alpha_{24/3} < \frac{a_2\tau_{b,2}}{-\tau^2_{b,2} + a_1\tau_{b,2} - a_2}. \tag{151}$$

Se obțin *rădăcini confundate* dacă

$$\alpha_{24/3} = \tau_{b,2}\left(\frac{\tau_{b,2}}{a_1 - 2\sqrt{a_2}} - 1\right). \tag{152}$$

După determinarea valorilor $\tau'_{b,1}$, $\tau''_{b,1}$ se verifică dacă acestea îndeplinesc condițiile (26) și (29), iar apoi se face apel la relațiile (37) și (38) pentru obținerea valorilor $\tau'_{b,3}$, $\tau''_{b,3}$, $\tau'_{b,4}$, $\tau''_{b,4}$. Condițiile pentru ca aceste valori să satisfacă relațiile corespunzătoare (20)—(31) sînt cele stabilite la cazul Ib.

Cazul II G. Se introduc notațiile

$$\alpha_{2/1} = \frac{I_1}{I_2} = \frac{\tau_{b,2}}{\tau_{b,1}}, \tag{153}$$

$$\alpha_{4/3} = \frac{I_2}{I_3} = \frac{\tau_{b,4}}{\tau_{b,3}}. \tag{154}$$

Explicitînd din relațiile de mai sus $\tau_{b,2}$ și $\tau_{b,4}$ și substituind aceste expresii în sistemul (32), (33) se obține

$$\tau_{b,1}(1 + \alpha_{2/1}) + \tau_{b,3}(1 + \alpha_{4/3}) = a_1, \tag{155}$$

$$\tau_{b,1}\tau_{b,3}(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3}) = a_2. \tag{156}$$

Explicitînd $\tau_{b,1}$ din ecuația (155) și substituind această expresie în (156) se obține ecuația de gradul doi în $\tau_{b,3}$

$$(1 + \alpha_{4/3})(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3})\,\tau^2_{b,3} - a_1(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3})\,\tau_{b,3} + a_2(1 + \alpha_{2/1}) = 0, \tag{157}$$

avînd rădăcinile

$$\tau'_{b,3} = \frac{a_1(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3}) - \sqrt{\Delta^{VI}}}{2(1 + \alpha_{4/3})(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3})}, \tag{158}$$

$$\tau''_{b,3} = \frac{a_1(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3}) + \sqrt{\Delta^{VI}}}{2(1 + \alpha_{4/3})(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3})}, \tag{159}$$

unde

$$\Delta^{VI} = a_1^2(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3})^2 - 4a_2(1 + \alpha_{2/1})(1 + \alpha_{4/3})(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3}). \tag{160}$$

Substituind $\tau'_{b,3}$ și $\tau''_{b,3}$, pe rînd, în relația (155) se obțin expresiile

$$\tau'_{b,1} = \frac{a_1(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3}) + \sqrt{\Delta^{VI}}}{2(1 + \alpha_{2/1})(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3})}, \tag{161}$$

$$\tau''_{b,1} = \frac{a_1(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3}) - \sqrt{\Delta^{VI}}}{2(1 + \alpha_{2/1})(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3})}. \tag{162}$$

Se obțin valori $\tau'_{b,1}$, $\tau''_{b,1}$, $\tau'_{b,3}$, $\tau''_{b,3}$ *reale și distincte* dacă este îndeplinită condiția

$$\frac{a_1^2}{4a_2} > \frac{(1 + \alpha_{2/1})(1 + \alpha_{4/3})(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3})}{(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3})^2}. \tag{163}$$

Se obțin valori $\tau'_{b,1} = \tau''_{b,1}$, $\tau'_{b,3} = \tau''_{b,3}$ deci *confundate* două cîte două dacă este îndeplinită condiția

$$\frac{a_1^2}{4a_2} = \frac{(1 + \alpha_{2/1})(1 + \alpha_{4/3})(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3})}{(1 + \alpha_{4/3} + \alpha_{2/1}\alpha_{4/3})^2}. \tag{164}$$

Relațiile (20) și (22) sînt întotdeauna satisfăcute, pentru ambele valori $\tau_{b,1}$, $\tau_{b,3}$, condițiile necesare fiind $\alpha_{2/1} > 0$, $\alpha_{4/3} > 0$, evident îndeplinite.

Este necesar ca după obținerea valorilor (161) și (162) să se verifice îndeplinirea condițiilor (26), (29).

Valorile $\tau_{b,2}(\tau'_{b,2}, \tau''_{b,2})$ și $\tau_{b,4}(\tau'_{b,4}, \tau''_{b,4})$ se determină explicitînd aceste mărimi din relațiile (153) și (154). Se verifică apoi îndeplinirea condițiilor corespunzătoare (20)—(31).

Cazul II H. Se calculează cu ajutorul relațiilor (16)—(18) valorile $\tau_{b,1}$, $\tau_{b,2}$, $\tau_{b,3}$ și se obține o problemă *în cazul I f.*

Cazul II I. Se calculează în baza relațiilor (16)—(18) valorile $\tau_{b,1}$, $\tau_{b,2}$, $\tau_{b,3}$, obținînd o problemă în *cazul I g.*

Cazul II J. Se calculează $\tau_{b,1}$ și $\tau_{b,4}$ cu ajutorul relațiilor (16), (19) și se introduce notația (124). Se consideră expresia (108) în care se substituie expresia lui $\tau_{b,3}$ rezultînd din (124) și se obține

$$\tau_{b,2} = \frac{(\omega_1^2 - \tau_{b,4})(\omega_1^2 - \tau_{b,1})}{\alpha_{3/2}(\omega_1^2 - \tau_{b,1}) + (\omega_1^2 - \tau_{b,4})}. \tag{165}$$

În ipoteza $\tau_{b,1} < \omega_1^2 < \tau_{b,4}$, condiția (21) este satisfăcută dacă

$$\alpha_{3/2} < \frac{\tau_{b,4} - \omega_1^2}{\omega_1^2 - \tau_{b,1}}. \tag{166}$$

În ipoteza $\tau_{b,4} < \omega_1^2 < \tau_{b,1}$, condiția (21) este satisfăcută dacă

$$\alpha_{3/2} > \frac{\omega_1^2 - \tau_{b,4}}{\tau_{b,1} - \omega_1^2}. \tag{167}$$

Se determină ω_2^2 cu relația (107) și se continuă calculele ca în cazul I h, urmărind respectarea condițiilor corespunzătoare.

Cazul II K. Ca și în cazul precedent se calculează $\tau_{b,1}$ și $\tau_{b,4}$ cu ajutorul relațiilor (16), (19) și se introduce notația (124). Se consideră expresia (117) în care se substituie expresia lui $\tau_{b,3}$ rezultînd din (124) și se obține

$$\tau_{b,2} = \frac{(\omega_2^2 - \tau_{b,4})(\omega_2^2 - \tau_{b,1})}{\alpha_{3/2}(\omega_2^2 - \tau_{b,1}) + (\omega_2^2 - \tau_{b,4})}. \tag{168}$$

Condiția (21) este îndeplinită dacă sînt satisfăcute condițiile (118) și (119). Se determină ω_1^2 cu relația (116) și se continuă calculele ca în cazul Ii, urmărind respectarea condițiilor corespunzătoare.

Cazul II L. Se calculează $\tau_{b,1}$ și $\tau_{b,2}$ cu relațiile (16), (17) și se introduce notația (154). Se consideră expresia (108) în care se substituie expresia lui $\tau_{b,3}$ rezultînd din (154) și se obține

$$\tau_{b,4} = \frac{\omega_1^2[\omega_1^2 - (\tau_{b,1} + \tau_{b,2})]}{(\omega_1^2 - \tau_{b,1})\dfrac{1 + \alpha_{4/3}}{\alpha_{4/3}} - \tau_{b,2}}. \tag{169}$$

Dacă $\omega_1^2 < \tau_{b,1}$, condiția (23) este sigur îndeplinită.
Dacă $\omega_1^2 > \tau_{b,1}$, condiția (23) este îndeplinită dacă

$$\alpha_{4/3} > \frac{\tau_{b,1} - \omega_1^2}{\omega_1^2 - (\tau_{b,1} + \tau_{b,2})}. \tag{170}$$

Se determină apoi ω_2^2 cu relația (107) și se continuă verificarea îndeplinirii condițiilor necesare, ca în cazul I h.

Cazul II M. Se calculează $\tau_{b,1}$ și $\tau_{b,2}$ cu relațiile (16), (17), introducîndu-se notația (154). Se consideră expresia (117) în care lui $\tau_{b,3}$ ce rezultă din (154) și se obține

$$\tau_{b,4} = \frac{\omega_2^2[\omega_2^2 - (\tau_{b,1} + \tau_{b,2})]}{(\omega_2^2 - \tau_{b,1})\dfrac{1 + \alpha_{4/3}}{\alpha_{4/3}} - \tau_{b,2}}. \tag{171}$$

Se obține îndeplinirea condiției (23) dacă este îndeplinită condiția (118) și condiția

$$\alpha_{4/3} < \frac{\tau_{b,1} - \omega_2^2}{\omega_2^2 - (\tau_{b,1} + \tau_{b,2})}. \tag{172}$$

Calculul se continuă ca în cazul Ii, determinînd ω_1^2 cu relația (116) și verificînd îndeplinirea condițiilor corespunzătoare.

2.3. CONSIDERAȚII ASUPRA SINTEZEI SISTEMELOR IN LANȚ CU MAI MULT DE TREI GRADE DE LIBERTATE

Pentru $n = 4, 5, 6$ o cale similară celei parcurse în paragraful 2.2.2 conduce la stabilirea numărului total de cazuri în cadrul variantelor I și II precum și a numărului cazurilor distincte între ele în cadrul variantelor I și II și al cazurilor variantei II distincte atît față de cazurile variantei II, cît și față de cazurile variantei I. (tabelul 3). Se constată că numărul acestor cazuri crește vertiginos odată cu creșterea numărului de grade de libertate, fapt care, conjugat cu creșterea simultană a numărului de para-

Tabelul 3

n	Numărul cazurilor de sinteză				
	Varianta I		Varianta II		
	Total	Distincte față de alte cazuri I	Total	Distincte față de alte cazuri II	Distincte față de alte cazuri I și II
3	15	9	21	13	8
4	84	47	120	68	56
5	495	263	715	383	351
6	3003	1552	4368	2257	2193

metri ai sistemului vibrant și a numărului de ecuații aparținînd sistemului (11) face ca sinteza pe baza relațiilor dintre coeficienții și rădăcinile ecuației pulsațiilor proprii să devină dificilă chiar pentru valori n nu prea mari. Din acest motiv în partea a II-a a lucrării se vor aborda problemele de sinteză pe o altă cale.

Primită la redacție la 13 august, 1979

ECUAȚII DE MIȘCARE PENTRU VIBRAȚIILE ELEMENTELOR CINEMATICE ALE MECANISMELOR PLANE, CU AXA LINIE POLIGONALĂ

de M. BUCULEI, D. MARGHITU
Universitatea din Craiova

Folosind teoria distribuțiilor, în lucrare se deduc ecuațiile de mișcare în deplasări pentru vibrațiile unui element cinematic tip linie poligonală plană, aflat în mișcare plan-paralelă. Metoda expusă prezintă avantajul studiului global al elementului cinematic, evitînd scrierea ecuațiilor de mișcare pe tronsoane rectilinii. Se folosesc principiul lui Hamilton și elemente din cinetica solidelor liniar-elastice în mișcare de rototranslație. Ecuațiile deduse necesită cunoașterea geometriei elementului cinematic și a rototranslației plane, ușurînd considerabil algoritmul de analiză elastocinematică și elastodinamică pentru mecanismele plane.

1. INTRODUCERE

În [2] s-au stabilit expresii generalizate pentru noțiunile fundamentale din cinetică, în cazul solidului liniar-elastic aflat în mișcare de rototranslație, punîndu-se în evidență termenii suplimentari care apar în expresia energiei cinetice. Plecînd de la aceste generalizări în [1, 2, 3] s-au dedus ecuațiile de mișcare pentru vibrațiile elementelor cinematice tip bară, rectilinii, în cazul liniar-elastic, abordîndu-se și problema analizei elastocinematice a mecanismelor plane în cazul impactului [1].

Lucrarea își propune stabilirea unor ecuații de mișcare în deplasări pentru cazul elementelor cinematice cu discontinuități de natură geometrică, în sensul că axa elementului este o linie poligonală plană.

2. ECUAȚII DE MIȘCARE

Se consideră elementul cinematic din figura 1, toate tronsoanele fiind presupuse cu aceeași secțiune A.

Fie $s \in \left[0\,;\ \sum_{j=1}^{n} L_j\right]$ abscisa curbilinie, iar $L_j = A_{j-1}A_j$, $j = \overline{1,\ n}$. Fie $\bar{\tau}_j\,;\ \bar{\nu}_j\,;\ \bar{\beta}_j$ versorii triedrului Frenet atașat unui punct interior segmentului $A_{j-1}A_j$. Se poate scrie $\bar{\beta}_j = \text{const.}$, avînd direcția perpendiculară pe planul elementului cinematic, care coincide cu planul mișcării. Fie $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$ versorii tangentei și normalei la o abscisă curbilinie oarecare s. Funcțiile

$\bar{\tau}(s)$, $\bar{\nu}(s)$ au discontinuități de prima speță în nodurile $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ cu salturile

$$\bar{\sigma}_{\bar{\tau}}(A_j) = \bar{\tau}_{j+1} - \bar{\tau}_j\,; \quad \bar{\sigma}_{\bar{\nu}}(A_j) = \bar{\nu}_{j+1} - \bar{\nu}_j, \tag{1}$$

fiind însă funcții continue de timp.

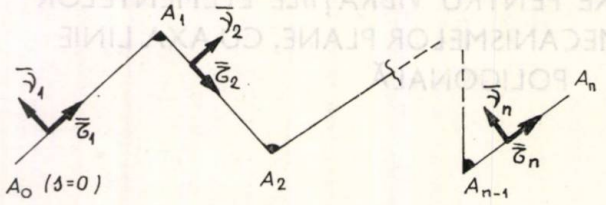


Fig. 1. — Element cinematic cu axa linie poligonală plană.

Se poate scrie

$$\bar{\tau}(s, t) = \sum_{j=0}^{n-1} [\bar{\tau}_{j+1}(t) - \bar{\tau}_j(t)] \cdot H\left(s - \sum_{i=0}^{j} L_i\right), \tag{2}$$

$$\bar{\nu}(s, t) = \sum_{j=0}^{n-1} [\bar{\nu}_{j+1}(t) - \bar{\nu}_j(t)] \cdot \left(s - \sum_{i=0}^{j} L_i\right), \tag{3}$$

$$(\bar{\tau}_0 = \bar{0}\,; \quad L_0 = 0\,; \quad \bar{\nu}_0 = \bar{0}),$$

unde H este distribuția Heaviside

$$H(s - a) = \begin{cases} 0\,; & s < a, \\ 1\,; & s > a. \end{cases}$$

Fie $\bar{u}(s, t)$ deplasarea liniar-elastică a unui punct al elementului cinematic, care în componente pe direcțiile $\bar{\tau}$ și $\bar{\nu}$ devine

$$\bar{u}(s, t) = u_1(s, t) \cdot \bar{\tau}(s, t) + u_2(s, t) \cdot \bar{\nu}(s, t)$$

sau

$$\begin{aligned} \bar{u}(s, t) = u_1(s, t) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} [\bar{\tau}_{j+1}(t) - \bar{\tau}_j(t)] \cdot H\left(s - \sum_{i=0}^{j} L_i\right) + \\ + u_2(s, t) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} [\bar{\nu}_{j+1}(t) - \bar{\nu}_j(t)] \cdot H\left(s - \sum_{i=0}^{j} L_i\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Rototranslația instantanee este dată prin vectorii

$$\begin{aligned} \bar{v}_{A_0} &= v_{01}(t) \cdot \bar{\tau}_1(t) + v_{02}(t) \cdot \bar{\nu}_1(t), \\ \bar{a}_{A_0} &= a_{01}(t) \cdot \bar{\tau}_1(t) + a_{02}(t) \cdot \bar{\nu}_1(t), \\ \bar{\omega} &= \omega(t)\bar{\beta}\,; \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon(t)\bar{\beta}, \end{aligned} \tag{5}$$

care dau viteza și accelerația instantanee a extremității A_0 și, respectiv, viteza și accelerația unghiulară a elementului cinematic. Fie M un punct oarecare al elementului cinematic. Notăm

$$\bar{r}(s, t) = \overline{A_0M} = x(s, t)\,\bar{\tau}_1 + y(s, t)\,\bar{\nu}_1. \tag{6}$$

Energia cinetică a elementului cinematic este, [2],

$$T = T_{rg} + T_{el} + T_s, \tag{7}$$

unde T_{rg} este componenta corespunzătoare mișcării de corp rigid;
T_{el} — componenta corespunzătoare deplasărilor liniar-elastice;
T_s — o componentă suplimentară.

Ecuațiile de mișcare în deplasările $u_1(s, t)$ și $u_2(s, t)$ vor fi deduse folosind principiul variațional al lui Hamilton. În acest context, interesează termenii T_{el} și T_s, dați de

$$T_{el} = \frac{\rho A}{2} \cdot \int_0^L \left[\frac{\partial \bar{u}(s, t)}{\partial t} \right]^2 \mathrm{d}s, \tag{8}$$

$$T_s = \rho A \cdot \int_0^L \left[\frac{1}{2} (\bar{\omega} \times \bar{u})^2 + \bar{v}_0 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{v}_0 \cdot (\bar{\omega} \times \bar{u}) + \right.$$
$$\left. + (\bar{\omega} \times \bar{u}) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + (\bar{\omega} \times \bar{r}) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{u}) \right] \mathrm{d}s, \tag{9}$$

unde

ρ este masa specifică;
A — aria secțiunii transversale;
$\bar{v}_0 = \bar{v}_{A_0}$; $L = \sum_{j=1}^{n} L_j$.

Se fac notațiile:

$$\bar{F}_1(s, t) = \sum_{j=0}^{n-1} [\bar{\tau}_{j+1}(t) - \bar{\tau}_j \cdot (t)] \cdot H\left(s - \sum_{i=0}^{j} L_i\right),$$

$$\bar{F}_2(s, t) = \sum_{j=0}^{n-1} [\bar{\nu}_{j+1}(t) - \bar{\nu}_j(t)] \cdot H\left(s - \sum_{i=0}^{j} L_i\right),$$

$$G_1(s, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\tau} \cdot \bar{\sigma}_{\bar{\tau}}(A_k) \cdot \delta\left(s - \sum_{m=1}^{k} L_m\right), \tag{10}$$

$$G_2(s, t) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\nu} \cdot \bar{\sigma}_{\bar{\tau}}(A_k) \cdot \delta\left(s - \sum_{m=1}^{k} L_m\right),$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁR KÖZPONTI

$$H_1(s,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\tau} \cdot \bar{\sigma}_{\bar{\nu}}(A_k) \cdot \delta\left(s - \sum_{m=1}^{k} L_m\right),$$

$$H_2(s,t) = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\nu} \cdot \bar{\sigma}_{\bar{\nu}}(A_k) \cdot \delta\left(s - \sum_{m=1}^{k} L_m\right),$$

unde δ este distribuția Dirac.

Lucrul mecanic de deformație este

$$L_d = \frac{EA}{2} \int_0^L \frac{\partial}{\partial s} (\bar{u}\bar{\tau})^2 \, ds + \frac{EI}{2} \int_0^L \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\bar{u}\bar{\nu})^2 \, ds, \tag{11}$$

unde E este modulul Young;

I — momentul de inerție al secțiunii transversale a elementului cinematic în raport cu axa neutră.

Este evident că

$$\bar{u}(s,t) = u_1(s,t) \cdot \bar{F}_1(s,t) + u_2(s,t) \cdot \bar{F}_2(s,t),$$

$$\frac{\partial \bar{u}(s,t)}{\partial t} = \frac{\partial u_1(s,t)}{\partial t} \cdot \bar{F}_1(s,t) + \frac{\partial u_2(s,t)}{\partial t} \cdot \bar{F}_2(s,t),$$

$$\bar{\beta} \times \bar{F}_1 = \bar{F}_2; \quad \bar{\beta} \times \bar{F}_2 = -\bar{F}_1.$$

Înlocuind (8), (9), (11) în expresia principiului lui Hamilton,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (L_d - T - L_e) \, dt = 0, \tag{12}$$

unde L_e este lucrul mecanic al forțelor exterioare, și efectuînd integrări prin părți, cu luarea în considerație a condițiilor de sincronism și a condițiilor frecvente la limită în cazul elementelor cinematice, se obține sistemul de ecuații diferențiale în deplasările $u_1(s,t)$, $u_2(s,t)$:

$$- H_1 EI \cdot \frac{\partial^3 u_2}{\partial s^3} - E(A + H_1^2 I) \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} - EI \left(\frac{\partial H_1}{\partial s} + H_1 H_2 \right) \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} +$$

$$+ \rho A F_1^2 \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \rho A \bar{F}_1 \bar{F}_2 \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - E \left(AG_1 + H_1 I \cdot \frac{\partial H_1}{\partial s} \right) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial s} -$$

$$- E \left(AG_2 + H_2 I \frac{\partial H_1}{\partial s} + 2H_1 I \frac{\partial H_2}{\partial s} \right) \frac{\partial u_2}{\partial s} - \rho A (\varepsilon F_1^2 + \omega F_2^2) \frac{\partial u^2}{\partial t} -$$

$$- \left[EA \frac{\partial G_1}{\partial s} + EI \left(\frac{\partial H_1}{\partial s} \right)^2 + EIH_1 \frac{\partial^2 H_1}{\partial s^2} + \rho A \omega^2 F_2^2 - \rho A \varepsilon \bar{F}_1 \bar{F}_2 \right] u_1 -$$

$$-\left(EA\frac{\partial G_2}{\partial s}+EI\frac{\partial H_1}{\partial s}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial s}+EIH_1\frac{\partial^2 H_2}{\partial s^2}-\rho A\omega^2\overline{F}_1\overline{F}_2+\right.$$

$$\left.+\rho A\varepsilon F_1^2\right)u_2+\rho A\overline{\nu}_1(\varepsilon\overline{F}_1-\omega^2\overline{F}_2)x+\rho A\overline{\tau}_1(\omega^2\overline{F}_2-\varepsilon\overline{F}_1)y+$$

$$+\frac{\partial H_1}{\partial s}EI-2H_1\left(\frac{\partial H_1}{\partial s}\right)^2EI-X=0, \tag{13}$$

$$EI\cdot\frac{\partial^4 u_2}{\partial s^4}+EIH_1\cdot\frac{\partial^3 u_1}{\partial s^3}+EIH_2\frac{\partial^3 u_2}{\partial s^3}+EI\left(3\frac{\partial H_1}{\partial s}-H_1H_2\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2}+EI\left(3\frac{\partial H_2}{\partial s}-H_2-H_2^2\right)\cdot\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2}+\rho A\overline{F}_1\overline{F}_2\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+$$

$$+\rho AF_2^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\left(3\frac{\partial^3 H_1}{\partial s^2}-2H_2\frac{\partial H_1}{\partial s}+G_2EA\right)\frac{\partial u_1}{\partial s}+\left(3\frac{\partial^3 H_2}{\partial s^3}-\right.$$

$$\left.-2H_2\frac{\partial H_2}{\partial s}\right)\cdot\frac{\partial u_2}{\partial s}+\rho A\omega(F_1^2+F_2^2)\frac{\partial u_1}{\partial t}+(G_1G_2EA+\frac{\partial^3 H_1}{\partial s^3}-$$

$$-H_2\frac{\partial^2 H_1}{\partial s^2}+\overline{F}_1\overline{F}_2\rho A\omega^2+\rho A\varepsilon F_2^2\Big)\cdot u_1+\left(G_2^2EA+\frac{\partial^3 H_2}{\partial s^3}-\right.$$

$$\left.-H_2\frac{\partial^2 H_2}{\partial s^2}-F_1^2\omega^2\rho A-\rho A\varepsilon\overline{F}_1\overline{F}_2\right)\cdot u_2+\omega^2\rho A\,\overline{F}_1\overline{\nu}_1xu_2-$$

$$-\omega^2\rho A\overline{\tau}_1\overline{F}_1yu_2+\rho A\varepsilon\overline{\nu}_1\overline{F}_2x-\rho A\varepsilon\overline{\tau}_1\overline{F}_2y+\rho A(a_{01}\overline{\tau}_1\overline{F}_2+$$

$$+a_{02}\overline{\nu}_1\overline{F}_2+\omega v_{01}\overline{\tau}_1\overline{F}_1+\omega v_{02}\overline{\nu}_1\overline{F}_1)-Y=0, \tag{14}$$

unde X, Y sînt forțele pe unitatea de lungime în direcția $\overline{\tau}$ și, respectiv, $\overline{\nu}$.

Scrierea concretă a ecuației pentru un anumit tronson duce la simplificări, distribuția H selectînd mărimile atașate tronsonului respectiv. În componența ecuației intră și distribuția Dirac ca și derivatele succesive ale acesteia.

În procesul efectiv de soluționare a ecuațiilor (13) și (14) distribuțiile se vor înlocui cu șiruri reprezentative, ceea ce conduce la o soluționare în contextul analizei clasice.

O trecere la limită se face în final sau într-o etapă intermediară de calcul.

Cunoașterea geometriei barei în stare nedeformată permite evaluarea mărimilor $\overline{\tau}_1F_2$, $\overline{\nu}_1F_2$ etc.

Soluționarea sistemului format din ecuațiile (13) și (14) este, pentru un număr mai mare de tronsoane, o problemă dificilă, folosindu-se în mod necesar calculul numeric și calculatorul electronic.

Algoritmele de analiză elastocinematică și elastodinamică au aceiași componență ca și la mecanismele plane cu elemente cinematice tip bară dreaptă [1, 2, 3, 5].

3. CONCLUZII

Ecuațiile de mișcare stabilite dau un caracter unitar analizei elastocinematice a mecanismelor plane cu bare tip linie poligonală datorită utilizării teoriei distribuțiilor, care permite scrierea unei singure ecuații în locul a n ecuații de mișcare scrise pentru n tronsoane de bară. Scrierea ecuațiilor este relativ simplă necesitînd cunoașterea geometriei barei, a caracteristicilor fizico-mecanice ale acesteia, a vitezei și accelerației unghiulare instantanee și a vitezei și accelerației unui capăt al barei, aceste ultime elemente rezultînd într-o etapă prealabilă de analiză cinematică. Ecuațiile deduse rămîn desigur valabile și în cazul impactului longitudinal și transversal.

Primită la redacție la 31 mai 1979

BIBLIOGRAFIE

1. M. Buculei, *Studiul șocului longitudinal în bare drepte în mișcare plană, cu aplicație la analiza mecanismelor*, St. cerc. mec. apl., *6* (1978).
2. M. Buculei, *Sur la cinématique et la cinétique des mécanismes a éléments élastiques*, Rev. roum. sci. techn.—Méc. Appl. *2* (1979).
3. M. Buculei, S. Mitis, *Asupra vibrațiilor elementelor cinematice ale mecanismelor plane cu cuple de translație*, St. cerc. mec. apl., 2 (1980).
4. Chr. Pelecudi, *Precizia mecanismelor*, Edit. Academiei, București, 1975.
5. M. Buculei, *Contributions à l'analyse thérmoélastocinématique matricielle des mécanismes plans avec des discontinuités du champ des vitesses*, Second IFTOMM int. symp, on linkages and computer aided design methods, 1977, vol. I—1, ppp. 113—124.

STUDII

SUMA LUNGIMILOR LINIILOR DE CONTACT LA ANGRENAJUL CILINDRIC CU DINȚI ÎNCLINAȚI ÎN EVOLVENTĂ

de GEORGE DOBRE
Institutul politehnic din București

În lucrare se prezintă considerații teoretice privind stabilirea sumei lungimilor liniilor de contact la angrenajul cilindric cu dinți înclinați în evolventă.

NOTAȚII

B — lățimea danturii;
l_k — lungimea unei linii de contact;
p_{bf} — pasul de bază frontal;
p_a — pasul axial;
β_b — unghiul de înclinare de bază al dintelui;
ε_f — gradul de acoperire frontal;
ε_f^* — partea întreagă a gradului de acoperire frontal ($\varepsilon_f^* \in N$);
ε_s — gradul de acoperire suplimentar;
ε_s^* — partea întreagă a gradului de acoperire suplimentar ($\varepsilon_f^* \in N \cup O$);
$\varkappa_f$ — parametru adimensional al poziției curente de angrenare pe segmentul unui pas de bază frontal ($O \leqslant \varkappa_f \geqslant 1$);
I, II, III — indici corespunzători unor plane frontale.

1. INTRODUCERE

Suma lungimilor liniilor de contact într-o poziție curentă de angrenare la angrenajul cilindric cu dinți înclinați intervine la soluționarea calculului de rezistență al danturii sau la aprecierea modului de variație a rigidității danturii, ultimul aspect avînd implicații de prim ordin asupra comportării vibroacustice a transmisiei. Problema stabilirii sumei liniilor de contact a fost abordată rar în literatura de specialitate.

Prezenta lucrare prezintă o tratare completă a problemei. Pe baza unor demonstrații geometrice, se stabilesc sumele lungimilor liniilor de contact în funcție de poziția curentă de angrenare, caracterizată într-un plan frontal marginal de parametrul adimensional $\varkappa_f$. Cu notațiile din figura 1, în care s-a acceptat sensul de înclinare a dintelui dreapta la pinion și stînga la roată, punctul K (corespunzător poziției curente de angre-

nare) se alege situat în planul frontal marginal I și este caracterizat de parametrul $\varkappa_f$, a cărui relație generală de definiție este

$$\varkappa_f = \frac{A_I K - \left(\frac{A_I K}{p_{bf}}\right)^* \cdot p_{bf}}{p_{bf}}; \qquad (1)$$

în relația de mai sus, factorul cu asterisc de la numărător reprezintă numărul întreg de pași de bază cuprinși în segmentul $A_I K$, dintre punctul de intrare în angrenare A_I și punctul curent de angrenare K. Utilizarea parametrului adimensional $\varkappa_f$ al pasului de bază frontal este justificată de faptul că, în forma sa cea mai generală, suma lungimilor liniilor de contact este o funcție periodică pe mulțimea de definiție $\{\varkappa_f \mid 0 \leqslant \varkappa_f \leqslant 1\}$, perioada fiind 1 (adică pasul de bază frontal).

Problema stabilirii sumei lungimilor liniilor de contact se reduce la cazurile: a) oricare din gradele de acoperire, frontal sau suplimentar, este număr natural; b) ambele grade de acoperire nu sînt numere naturale

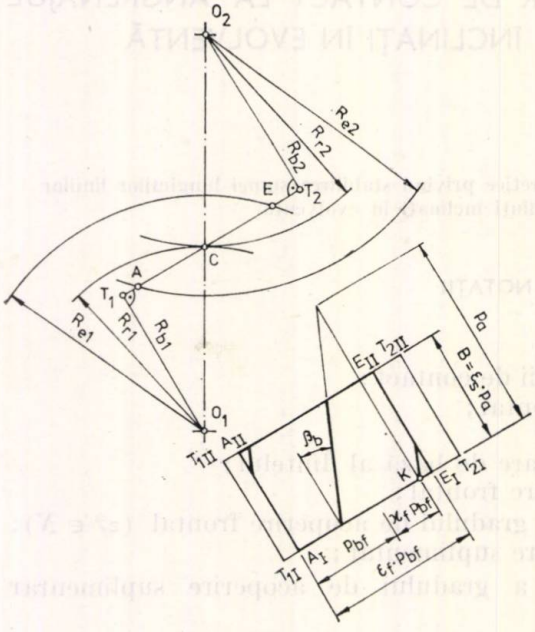


Fig. 1

2. CAZUL $\varepsilon_f = \varepsilon_f^*$ și $\varepsilon_s = \varepsilon_s^*$

Cazul este reprezentat în figura 2 pentru valorile [1]: $\varepsilon_f = \varepsilon_f^* = 2$ și $\varepsilon_s = \varepsilon_s^* = 2$.

Se analizează mai întîi partea din cîmpul de angrenare care are dimensiunile p_{bf} și p_a (fig. 2 *b*). Pentru oricare $\varkappa_f$, în această porțiune de cîmp se află două linii de contact, KP și RS. Ca diferențe de segmente egale, rezultă egalitatea $M_{II}S = E_{II}Q$; de asemenea, deoarece $KQ \parallel RS$, unghiurile ascuțite formate de aceste segmente cu $M_{II}Q$ sînt egale; ca urmare, $\Delta M_{II}SR = \Delta E_{II}QP$, astfel că se poate scrie:

$$\Sigma l_k = KP + RS = KP + PQ = KQ = M_{III}E_{II} = p_a \frac{1}{\cos \beta_b} = \text{const.} \qquad (2)$$

[1] Deși la angrenajele cu roți dințate definite de cremaliera de referință standard $1 < \varepsilon_f < 2$, figurile prezentei lucrări au fost realizate cu $\varepsilon_f \geqslant 2$, din considerentul de a ilustra cazul general pentru care se scriu relațiile.

Relația anterioară se generalizează ușor; pentru $\varepsilon_f = \varepsilon_f^*$ și $\varepsilon_s = \varepsilon_s^*$, $\forall \varkappa_f$, $0 \leqslant \varkappa_f \leqslant 1$, este evident că

$$\Sigma l_k = \varepsilon_f^* \varepsilon_s^* p_a \frac{1}{\cos \beta_b} = \text{const.} \tag{3}$$

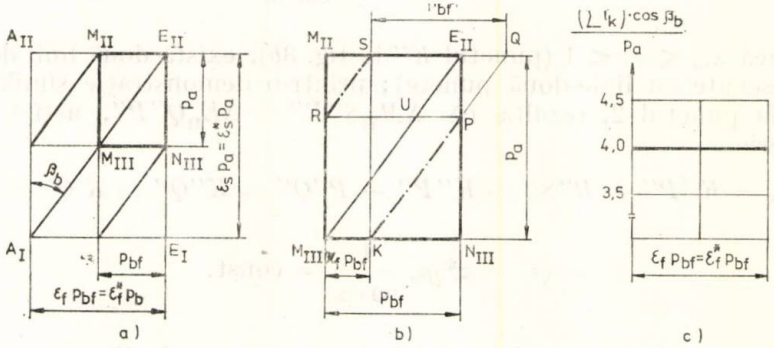


Fig. 2

3. CAZUL $\varepsilon_f = \varepsilon_f^*$ și $\varepsilon_s \neq \varepsilon_s^*$

Cazul este reprezentat în figura 3 pentru valorile: $\varepsilon_f = \varepsilon_f^* = 2$ și $2 < \varepsilon_s < 3$.

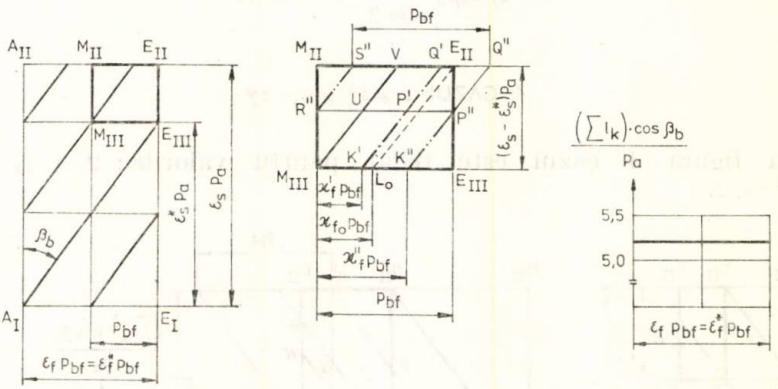


Fig. 3

Pentru început, se stabilește suma lungimilor liniilor de contact pentru porțiunea de cîmp cu dimensiunile p_{bf} și $(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*)p_a$ (fig. 3*b*). În planul frontal III se definește punctul limită L_0 prin relațiile

$$M_{III}L_0 = \varkappa_{f0} p_{bf} = p_{bf} - (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*)p_a \operatorname{tg} \beta_b = (1 - \varepsilon_s + \varepsilon_s^*)$$

$$\Rightarrow \varkappa_{f0} = 1 - \varepsilon_s + \varepsilon_s^*. \tag{4}$$

Dacă $0 \leqslant \varkappa_f \leqslant \varkappa_{f0}$ (punctul K' în fig. 3*b*), există o singură linie de contact (desenată cu linie-punct), astfel că

$$\Sigma l_k = K'Q' = (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*)p_a \frac{1}{\cos \beta_b} = \text{const.} \tag{5'}$$

Dacă $\varkappa_{f0} \leqslant \varkappa_f \leqslant 1$ (punctul K'' în fig. 3*b*), există două linii de contact (desenate cu linie-două puncte); printr-o demonstrație similară cu cea de la punctul 2, rezultă că $\Delta M_{II}S''R'' = \Delta E_{II}Q''P''$, astfel că se poate scrie

$$\Sigma l_k = K''P'' + R''S'' = K''P'' + P''Q'' = K''Q'' = K'Q' =$$

$$= (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*)p_a \frac{1}{\cos \beta_b} = \text{const.} \tag{5''}$$

Relațiile (5) se generalizează ținînd seama de concluziile punctului 2; pentru $\varepsilon_f = \varepsilon_f^*$ și $\varepsilon_s \neq \varepsilon_s^*$, $\forall \varkappa_f$, $0 \leqslant \varkappa_f \leqslant 1$, rezultă

$$\Sigma l_k = \varepsilon_f^*(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*)p_a \frac{1}{\cos \beta_b} + \varepsilon_f^* \varepsilon_s^* p_a \frac{1}{\cos \beta_b} =$$

$$= \varepsilon_f^* \varepsilon_s p_a \frac{1}{\cos \beta_b} = \text{const.} \tag{6}$$

4. CAZUL $\varepsilon_f \neq \varepsilon_f^*$ și $\varepsilon_s = \varepsilon_s^*$

În figura 4 cazul este redat pentru valorile: $2 < \varepsilon_f < 3$ și $\varepsilon_s = \varepsilon_s^* = 2$.

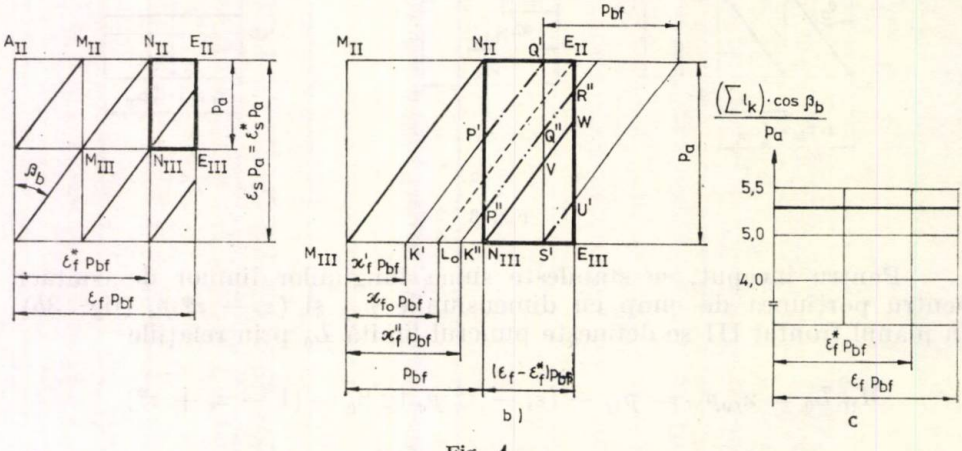


Fig. 4

Fie, pentru început, porțiunea cîmpului de angrenare cu dimensiunile $(\varepsilon_f - \varepsilon_f^*)p_{bf}$ și p_a (fig. 4*b*). În planul frontal III se definește punctul limită L_0 prin relațiile

$$M_{\text{III}}L_0 = \varkappa_{f0}p_{bf} = p_{bf} - p_a \operatorname{tg} \beta_b + (\varepsilon_f - \varepsilon_f^*)p_{bf} =$$

$$= (\varepsilon_f - \varepsilon_f^*)p_{bf} \Rightarrow \varkappa_{f0} = \varepsilon_f - \varepsilon_f^*. \tag{7}$$

Dacă $0 \leqslant \varkappa_f \leqslant \varkappa_{f0}$ (poziția K' în fig. 4*b*), există două linii de contact (desenate cu linie-punct); prin transformări care țin seama de egalitatea segmentelor paralele cuprinse între drepte paralele, rezultă

$$\Sigma l_k = P'Q' + S'U' = N_{\text{III}}V + VWW = N_{\text{III}}W =$$

$$= (\varepsilon_f - \varepsilon_f^*)p_a \frac{1}{\cos \beta_b} = \text{const.} \tag{8'}$$

Dacă $\varkappa_{f0} \leqslant \varkappa_f \leqslant 1$ (poziția K'' în fig. 4*b*), există o singură linie de contact (desenată cu linie-două puncte), a cărei lungime este

$$\Sigma l_k = P''R'' = N_{\text{III}}W = (\varepsilon_f - \varepsilon_f^*)p_a \frac{1}{\cos \beta_b} = \text{const.} \tag{8''}$$

Relațiile (8) se generalizează sub forma de mai jos, pentru

$$\varepsilon_f \neq \varepsilon_f^* \quad \text{și} \quad \varepsilon_s = \varepsilon_s^*, \forall \varkappa_f, \quad 0 \leqslant \varkappa_f \leqslant 1:$$

$$\Sigma l_k = [(\varepsilon_f - \varepsilon_f^*)\varepsilon_s^* + \varepsilon_f^*\varepsilon_s^*]p_a \frac{1}{\cos \beta_b} = \varepsilon_f \varepsilon_s^* p_a \frac{1}{\cos \beta_b} = \text{const.} \tag{9}$$

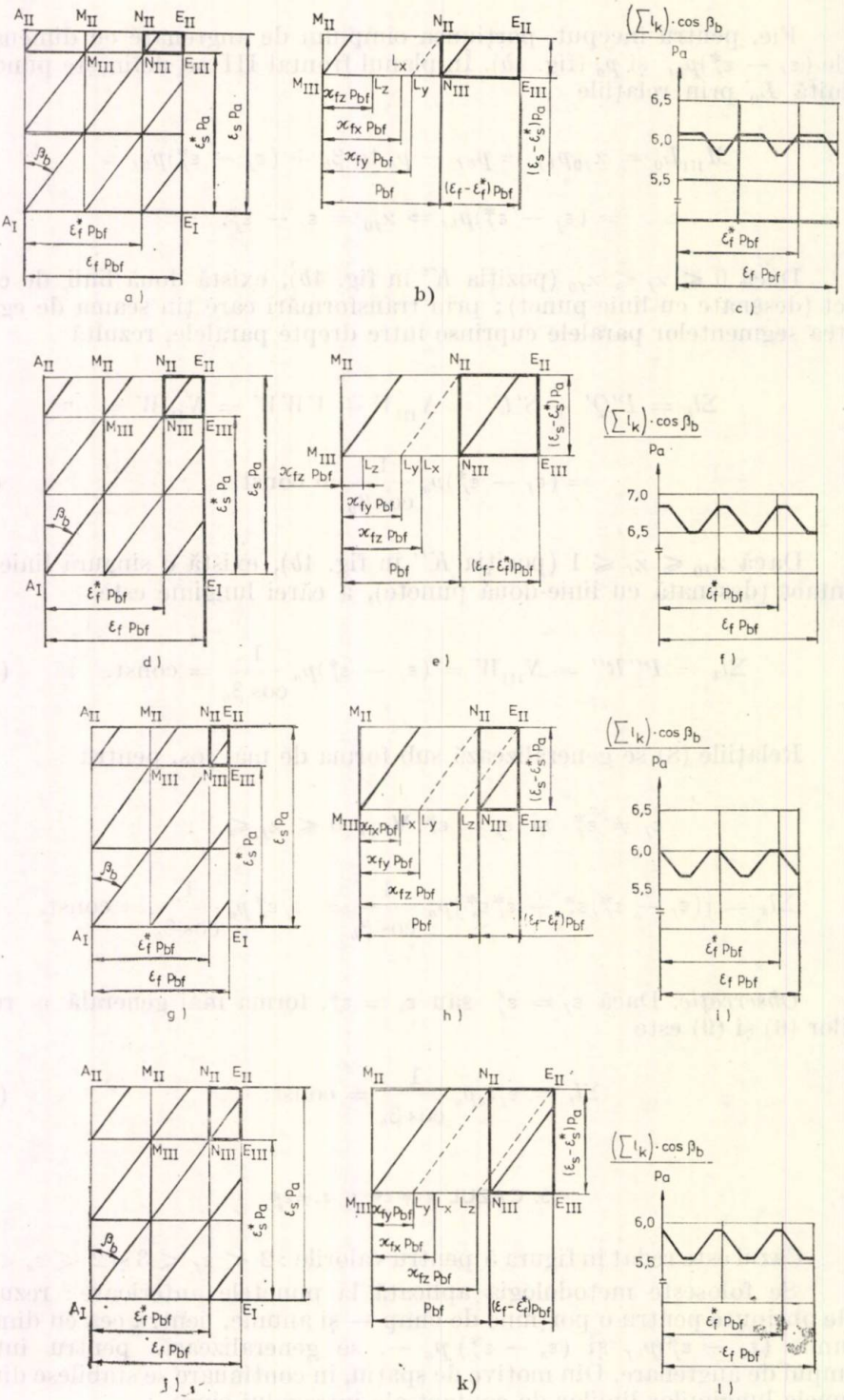
Observație. Dacă $\varepsilon_f = \varepsilon_f^*$ sau $\varepsilon_s = \varepsilon_s^*$, forma mai generală a relațiilor (6) și (9) este

$$\Sigma l_k = \varepsilon_f \varepsilon_s p_a \frac{1}{\cos \beta_b} = \text{const.} \tag{10}$$

5. CAZUL $\varepsilon_f \neq \varepsilon_f^*$ și $\varepsilon_s \neq \varepsilon_s^*$

Cazul este redat în figura 5 pentru valorile : $2 < \varepsilon_f < 3$ și $2 < \varepsilon_s < 3$.

Se folosește metodologia aplicată la punctele anterioare : rezultatele obținute pentru o porțiune de cîmp — și anume, pentru cea cu dimensiunile $(\varepsilon_f - \varepsilon_f^*)p_{bf}$ și $(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*)\,p_a$ —, se generalizează pentru întreg cîmpul de angrenare. Din motive de spațiu, în continuare se stabilesc direct sumele lungimilor liniilor de contact ale întregului cîmp.


a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
h)
i)
j)
k)
l)
A_{II} M_{II} N_{II} E_{II}
M_{III} N_{III} E_{III}
A_I E_I
β_b
$\varepsilon_s^* P_a$
$\varepsilon_s P_a$
$\varepsilon_f^* P_{bf}$
$\varepsilon_f P_{bf}$
L_x L_y L_z
$x_{fz} P_{bf}$
$x_{fx} P_{bf}$
$x_{fy} P_{bf}$
P_{bf}
$(\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) P_{bf}$
$(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) P_a$
$(\sum l_k) \cdot \cos \beta_b$
P_a
6,5
6,0
5,5
7,0

Fie punctele limită L_x și L_y definite de relațiile :

$$M_{\text{III}}L_x = \varkappa_{fx}p_{bf} = (\varepsilon_f - \varepsilon_f^*)p_{bf} \Rightarrow \varkappa_{fx} = \varepsilon_f - \varepsilon_f^*,$$
$$M_{\text{III}}L_y = \varkappa_{fy}p_{bf} = p_{bf} - (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*)p_{bf} = (1 - \varepsilon_s + \varepsilon_s^*)p_{bf} \Rightarrow \tag{11}$$
$$\Rightarrow \varkappa_{fy} = 1 - \varepsilon_s + \varepsilon_s^*.$$

Se definește în plus, punctul L_z; dacă $\varepsilon_f - \varepsilon_f^* \geqslant \varepsilon_s - \varepsilon_s^*$ (fig. 5 *a*...*f*), relațiile de definiție a lui L_z sînt

$$M_{\text{III}}L_z = \varkappa_{fz}p_{bf} = [(\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) - (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*)]p_{bf} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varkappa_{fz} = (\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) - (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*), \tag{12'}$$

dacă $\varepsilon_f - \varepsilon_f^* \leqslant \varepsilon_s - \varepsilon_s^*$ (fig. 5 *i*...*n*),

$$M_{\text{III}}L_z = \varkappa_{fz}p_{bf} = [1 + (\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) - (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*)]p_{bf}$$
$$\Rightarrow \varkappa_{fz} = 1 + (\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) - (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*). \tag{12''}$$

A. Fie subcazul $\varepsilon_f - \varepsilon_f^* \geqslant \varepsilon_s - \varepsilon_s^*$. Folosind (11) și (12') se verifică ușor că $\varkappa_{fx} > \varkappa_{fz}$ și $\varkappa_{fy} > \varkappa_{fz}$; rezultă că L_z se află în stînga punctelor L_x și L_y. În schimb, există situațiile : $\varkappa_{fx} \leqslant \varkappa_{fy}$ (fig. 5*b*) sau $\varkappa_{fx} \geqslant \varkappa_{fy}$ (fig. 5*e*).

a) Dacă $\varkappa_{fx} \leqslant \varkappa_{fy}$, adică $(\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) + (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) \leqslant 1$, rezultă (fig. 5 *a*...*c*) :

— pe intervalul $0 \leqslant \varkappa_f \leqslant \varkappa_{fz}$,

$$\Sigma l_k = [\varepsilon_f\varepsilon_s^* + \varepsilon_f^*(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) + (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*)]p_a \frac{1}{\cos\beta_b} =$$
$$= [\varepsilon_f\varepsilon_s^* + (\varepsilon_f^* + 1)(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*)]p_a \frac{1}{\cos\beta_b} = \text{const.}; \tag{13}$$

— pe intervalul $\varkappa_{fz} \leqslant \varkappa_f \leqslant \varkappa_{fx}$,

$$\Sigma l_k = [\varepsilon_f\varepsilon_s^* + \varepsilon_f^*(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) + (\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) - \varkappa_f]p_a \frac{1}{\cos\beta_b}; \tag{14}$$

— pe intervalul $\varkappa_{fx} \leqslant \varkappa_f \leqslant \varkappa_{fy}$,

$$\Sigma l_k = [\varepsilon_f\varepsilon_s^* + \varepsilon_f^*(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*)]p_a \frac{1}{\cos\beta_b} = \text{const.}; \tag{15}$$

— pe intervalul $\varkappa_{fy} \leqslant \varkappa_f \leqslant 1$,

$$\Sigma l_k = [\varepsilon_f \varepsilon_s^* + \varepsilon_f^*(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) + (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) + \varkappa_f - 1]p_a \frac{1}{\cos \beta_b} =$$

$$= [\varepsilon_f \varepsilon_s^* + (\varepsilon_f^* + 1)(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) - 1 + \varkappa_f]p_a \frac{1}{\cos \beta_b}. \tag{16}$$

b) Dacă $\varkappa_{fx} \geqslant \varkappa_{fy}$, adică $(\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) + (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) \geqslant 1$, rezultă (fig. 5, *d* . . . *f*) :

— pe intervalul $0 \leqslant \varkappa_f \leqslant \varkappa_{fz}$ — relaţia (13) ;

— pe intervalul $\varkappa_{fz} \leqslant \varkappa_f \leqslant \varkappa_{fy}$ — relaţia (14) ;

— pe intervalul $\varkappa_{fy} \leqslant \varkappa_f \leqslant \varkappa_{fx}$,

$$\Sigma l_k = [\varepsilon_f \varepsilon_s^* + \varepsilon_f^*(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) + (\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) - \varkappa_f + (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) + \varkappa_f - 1]p_a \frac{1}{\cos \beta_b} = [\varepsilon_f(\varepsilon_s^* + 1) + (\varepsilon_f^* + 1)(\varepsilon_s - \varepsilon_s^* - 1)]p_a \frac{1}{\cos \beta_b} = \text{const.}; \tag{17}$$

— pe intervalul $\varkappa_{fx} \leqslant \varkappa_f \leqslant 1$ — relaţia (16).

B. Fie subcazul $\varepsilon_f - \varepsilon_f^* \leqslant \varepsilon_s - \varepsilon_s^*$. Folosind (11) şi (12″), se verifică că sînt adevărate inegalităţi $\varkappa_{fx} < \varkappa_{fz}$ şi $\varkappa_{fy} < \varkappa_{fz}$, deci L_z se află totdeauna în dreapta punctelor L_x şi L_y, a căror ordine poate fi diferită (fig. 5*h* şi *k*).

a) Dacă $\varkappa_{fx} \leqslant \varkappa_{fy}$, adică $(\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) + (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) \leqslant 1$, rezultă (fig. 5 *g* . . . *i*) :

— pe intervalul $0 \leqslant \varkappa_f \leqslant \varkappa_{fx}$ — relaţia (14) ;

— pe intervalul $\varkappa_{fx} \leqslant \varkappa_f \leqslant \varkappa_{fy}$ — relaţia (15) ;

— pe intervalul $\varkappa_{fy} \leqslant \varkappa_f \leqslant \varkappa_{fz}$ — relaţia (16) ;

— pe intervalul $\varkappa_{fz} \leqslant \varkappa_f \leqslant 1$,

$$\Sigma l_k = [\varepsilon_f \varepsilon_s^* + \varepsilon_f^*(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) + (\varepsilon_f - \varepsilon_f^*)]p_a \frac{1}{\cos \beta_b} =$$

$$= [\varepsilon_f(\varepsilon_s^* + 1) + \varepsilon_f^*(\varepsilon_s - \varepsilon_s^* - 1)]\, p_a \frac{1}{\cos \beta_b}. \tag{18}$$

b) Dacă $\varkappa_{fx} \geqslant \varkappa_{fy}$, adică $(\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) + (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) \geqslant 1$, rezultă (fig. 5 *j* . . . *l*) :

— pe intervalul $0 \leqslant \varkappa_f \leqslant \varkappa_{fy}$ — relaţia (14) ;

— pe intervalul $\varkappa_{fy} \leqslant \varkappa_f \leqslant \varkappa_{fx}$ — relaţia (17) ;

— pe intervalul $\varkappa_{fx} \leqslant \varkappa_f \leqslant \varkappa_{fz}$ — relaţia (16) ;

— pe intervalul $\varkappa_{fz} \leqslant \varkappa_f \leqslant 1$ — relaţia (18).

Tabelul 1

Elemente sintetizate privind suma lungimilor liniilor de contact în cazul unui angrenaj cilindric cu dinți înclinați în evolventă

Cazul	Subcazurile		Parametrii limită		intervalul de variație a lui $\varkappa_f$	Raportul dintre proiecția sumei lungimilor liniilor de contact pe direcția axelor roților și pasul axial, $(\Sigma l_k)\cdot\cos\beta_b/p_a$		
						Expresia raportului	Numărul curent al expresiei în prezentul tabel	Observații asupra mărimii expresiei
$\varepsilon_f = \varepsilon_f^*$ și $\varepsilon_s = \varepsilon_s^*$	—	—	—	—	[0, 1]	$\varepsilon_f^* \varepsilon_s^* = \text{const.}$	1	—
$\varepsilon_f = \varepsilon_f^*$ și $\varepsilon_s \neq \varepsilon_s^*$	—	—	—	—	[0, 1]	$\varepsilon_f^* \varepsilon_s = \text{const.}$	2	—
$\varepsilon_f \neq \varepsilon_f^*$ și $\varepsilon_s = \varepsilon_s^*$	—	—	—	—	[0, 1]	$\varepsilon_f \varepsilon_s^* = \text{const.}$	3	—
$\varepsilon_f \neq \varepsilon_f^*$ și $\varepsilon_s \neq \varepsilon_s^*$	$\varepsilon_f - \varepsilon_f^* \geqslant \varepsilon_s - \varepsilon_s^*$	$(\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) + (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) \leqslant 1$	$\varkappa_{fx} = \varepsilon_f - \varepsilon_f^*$	$\varkappa_{fz} = (\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) - (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*)$	[0, $\varkappa_{fz}$]	$\varepsilon_f \varepsilon_s^* + (\varepsilon_f^* + 1)(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) = \text{const.}$	4.1	Valoarea maximă
					[$\varkappa_{fz}$, $\varkappa_{fx}$]	$\varepsilon_f \varepsilon_s^* + \varepsilon_f^*(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) + (\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) - \varkappa_f$	4.2	
					[$\varkappa_{fx}$, $\varkappa_{fy}$]	$\varepsilon_f \varepsilon_s^* + \varepsilon_f^*(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) = \text{const.}$	4.3	Valoarea minimă
					[$\varkappa_{fy}$, 1]	$\varepsilon_f \varepsilon_s^* + (\varepsilon_f^* + 1)(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) - 1 + \varkappa_f$	4.4	
		$(\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) + (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) \leqslant 1$			[0, $\varkappa_{fz}$]	Expresia 4.1	—	Valoarea maximă
					[$\varkappa_{fz}$, $\varkappa_{fy}$]	Expresia 4.2	—	
					[$\varkappa_{fy}$, $\varkappa_{fx}$]	$\varepsilon_f(\varepsilon_s^* + 1) + (\varepsilon_f^* + 1)(\varepsilon_s - \varepsilon_s^* - 1)$	4.5	Valoarea minimă
			$\varkappa_{fy} - 1 = -(\varepsilon_s - \varepsilon_s^*)$		[$\varkappa_{fx}$, 1]	Expresia 4.4	—	
					[0, $\varkappa_{fx}$]	Expresia 4.2	—	
		$(\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) + (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) \leqslant 1$			[$\varkappa_{fx}$, $\varkappa_{fy}$]	Expresia 4.3	—	Valoarea minimă
	$\varepsilon_f - \varepsilon_f^* \leqslant \varepsilon_s - \varepsilon_s^*$			$\varkappa_{fz} = 1 + (\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) - (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*)$	[$\varkappa_{fy}$, $\varkappa_{fz}$]	Expresia 4.4	—	
					[$\varkappa_{fz}$, 1]	$\varepsilon_f(\varepsilon_s^* + 1) + \varepsilon_f^*(\varepsilon_s - \varepsilon_s^* - 1)$	4.6	Valoarea maximă
		$(\varepsilon_f - \varepsilon_f^*) + (\varepsilon_s - \varepsilon_s^*) \geqslant 1$			[0, $\varkappa_{fy}$]	Expresia 4.2	—	
					[$\varkappa_{fy}$, $\varkappa_{fx}$]	Expresia 4.5	—	Valoarea minimă
					[$\varkappa_{fx}$, $\varkappa_{fz}$]	Expresia 4.4	—	
					[$\varkappa_{fz}$, 1]	Expresia 4.6	—	Valoarea maximă

Observație. Pe un segment de angrenare frontal, $\varkappa_f$ parcurge ε_f^* intervale [0, 1] și intervalul [0, $\varepsilon_f - \varepsilon_f^*$].

6. CONCLUZII

Rezultatele obținute anterior sînt sintetizate în tabelul 1. Din cauza formei mai simple a scrierii, în tabel se indică expresiile raportului dintre proiecția sumei lungimilor liniilor de contact pe direcția axelor roților și pasul axial. În plus, se fac observații asupra mărimilor maximă și minimă ale acestui raport pentru $0 \leqslant \varkappa_f \leqslant 1$, adică pe lungimea unui pas de bază frontal.

Primită la redacție la 30 noiembrie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. V. A. GAVRILENKO, *Zubciatie peredaci v maşinostroenii*, Maşghiz, Moskva, 1962.
2. G. NIEMANN, *Maschienenelemente*, Zweiter Band : *Getriebe*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1965.
3. J. BAETHGE, *Drehwegfehler, Zahnfederhärte und Geräusch bei Stirnrädern*, Diss. T H München, 1969.
4. G. RĂDULESCU, *Organe de mașini — Angrenaje cilindrice*, vol. II, Institutul politehnic din București, 1979.

O METODĂ PENTRU ESTIMAREA REZISTENȚEI LA INIȚIEREA RUPERII ÎN PIESELE METALICE DESTINATE EXPLOATĂRII LA TEMPERATURI SCĂZUTE

de GH. ZECHERU și D. RAȘEEV
Institutul de petrol și gaze, Ploiești

În lucrare se face o analiză critică a metodelor actuale, bazate pe principiile mecanicii ruperii, folosite pentru aprecierea rezistenței la inițierea ruperii în piesele metalice destinate exploatării la temperaturi scăzute.
În urma unor cercetări proprii, autorii au elaborat o nouă metodă de verificare a rezistenței la inițierea ruperii în piesele metalice exploatate la temperaturi scăzute, bazată pe rezultatele probelor mecanice de rezistență ce se efectuează la temperatura ambiantă, în cadrul operațiilor de recepție. Se prezintă principiile, avantajele și domeniile de utilizare ale metodei propuse. În final, se analizează modalitățile de aplicare ale metodei în cazul concret al pieselor turnate din oțelul T 35 MoCrNi 08 — STAS 1773—76 destinate exploatării la temperaturi scăzute.

1. CONSIDERAȚII PRIVIND UTILIZAREA METODELOR MECANICII RUPERII PENTRU APRECIEREA SIGURANȚEI ÎN EXPLOATARE A PIESELOR METALICE

Conceptele și metodele analitice ale mecanicii ruperii dau posibilitatea aprecierii siguranței în exploatare a construcțiilor tehnice ținînd seama de prezența defectelor inerente materialelor reale, [1], [2], [3]. Deoarece aceste concepte și metode au fost dezvoltate considerînd prezența în material a unor discontinuități fizice de tip fisură, avînd severitatea maximă, estimările realizate pe baza lor au caracter acoperitor pentru orice tip de defect existent în construcția tehnică analizată.

Principial, estimările de rezistență furnizate de metodele mecanicii ruperii se bazează pe verificarea relațiilor ce trebuie să existe între : intensitatea solicitării aplicate, configurația construcției tehnice considerate (parametrii geometrici ai acesteia și ai defectelor pe care le conține) și parametrii de tenacitate ai materialului, pentru evitarea inițierii ruperii.

De exemplu, în cazul construcțiilor tehnice realizate din materiale cu capacitate scăzută de deformare, relația de verificare a rezistenței la inițierea ruperii are forma

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi a \beta(a, L_i)} \leqslant K_{1c}, \tag{1}$$

K_1 reprezintă factorul de intensitate al tensiunilor (eforturilor unitare) la vîrful discontinuităților fizice de tip fisură existente în construcția tehnică analizată. El se exprimă în funcție de eforturile unitare ce solicită

construcția în zona de amplasare a defectului, σ, de intensitatea defectului, exprimată prin lungimea fisurii a și de configurația geometrică a construcției, reprezentată global prin funcția $\beta(a, L_i)$; L_i fiind dimensiunile caracteristice ale construcției.

K_{1c} reprezintă factorul critic de intensitate al tensiunilor, parametru caracteristic al tenacității materialului din care este confecționată construcția tehnică analizată. Fiind o caracteristică a materialului, K_{1c} se determină prin încercări pe epruvete (STAS 9760—74; ASTM 399—72, AFNOR AO3—180—74).

În momentul actual relațiile de forma (1) sînt utilizate pentru verificări în următoarele circumstanțe:

1.1. Cunoscîndu-se: configurația geometrică a construcției tehnice analizate (parametrii L_i), forma și amplasarea defectelor de tip fisură (forma funcției β), starea de tensiuni (parametrul σ) și caracteristica de tenacitate a materialului (factorul K_{1c}), în condițiile de exploatare a construcției se determină dimensiunea maximă a defectelor admisibile a_{max}. Pe această bază se stabilesc criteriile cantitative ce trebuie aplicate la controlul nedistructiv al construcției analizate.

1.2. Cunoscîndu-se: configurația geometrică a construcției tehnice analizate (parametrii L_i), forma, dimensiunile și distribuția defectelor (dimensiunea a și forma funcției β) și caracteristica de tenacitate a materialului (factorul K_{1c}) în condițiile de exploatare a construcției, se determină tensiunile maxime pe care le poate suporta aceasta fără a se produce ruperea. Pe această bază se stabilește capacitatea portantă reală a construcției tehnice realizate.

Ambele metode de verificare a rezistenței la inițierea ruperii presupun efectuarea riguroasă a controlului defectoscopic la construcția tehnică analizată. Această cerință este greu de respectat în cazul construcțiilor tehnice cu configurație complicată cum sînt, de exemplu, piesele turnate. Din acest motiv metodele expuse au domenii de aplicabilitate și eficiență limitate.

2. METODA PROPUSĂ PENTRU ESTIMAREA REZISTENȚEI LA INIȚIEREA RUPERII ÎN PIESELE EXPLOATATE LA TEMPERATURI SCĂZUTE

Metoda propusă de autori permite estimarea rezistenței la inițierea ruperii în timpul exploatării unei piese la temperaturi scăzute pe baza unor probe mecanice de rezistență ce se efectuează, la temperatura ambiantă, în cursul operațiilor de recepție. Metoda exclude necesitatea controlului defectoscopic al piesei supuse verificării, fapt ce-i conferă facilități multiple de aplicare.

Principiile metodei propuse sînt expuse în continuare.

2.1. Se consideră o piesă de configurație cunoscută, lucrînd la temperatura t, mai mică decît temperatura ambiantă t_a. Solicitările la care este supusă piesa în exploatare conduc la stări de tensiuni ce pot fi caracterizate printr-un efort unitar maxim $\sigma_{max,t}$. Considerînd că în zona de acțiune a efortului unitar $\sigma_{max,t}$ există un defect de tip fisură, avînd planul

normal pe direcția lui $\sigma_{max,t}$ se pune problema stabilirii dimensiunii admisibile a defectului pentru evitarea inițierii ruperii.

Considerînd că materialul din care este confecționată piesa are capacitate scăzută de deformare atît la temperatura t cît și la t_a (îndeplinește condițiile aplicării teoriei liniar-elastice a mecanicii ruperii), relația de verificare a rezistenței la inițierea ruperii are forma (1).

Folosind relația (1) rezultă că pentru a nu se produce ruperea piesei considerate, la temperatura de exploatare t, este necesar ca dimensiunea defectului existent să îndeplinească condiția

$$a\beta(a, L_i) \leqslant \frac{1}{\pi} \frac{K_{1c,t}^2}{\sigma_{max,t}^2}. \tag{2}$$

Evident, dimensiunea maximă a defectului admisibil rezultă considerînd relația (2) sub forma egalității :

$$a_{max} \cdot \beta(a_{max}, L_i) = \frac{1}{\pi} \frac{K_{1c,t}^2}{\sigma_{max,t}^2}. \tag{3}$$

Considerînd că în zona solicitată în exploatare de efortul unitar $\sigma_{max,t}$ acționează în timpul probei mecanice de rezistență (efectuate la temperatură ambiantă) efortul unitar σ_p și presupunînd prezența în această zonă a defectului cu dimensiunea a_{max} dată de relația (3), rezultă din (1) următoarea condiție de inițiere a ruperii piesei la probă :

$$\sigma_p \geqslant \sigma_{max,t} \cdot \frac{K_{1c,t_a}}{K_{1c,t}} = \sigma_{max,t} \cdot C_{s,t}. \tag{4}$$

Pe baza raționamentului prezentat se ajunge la formularea următorului principiu : „Ruperea în exploatare la temperatura $t \leqslant t_a$ nu se produce dacă piesa rezistă la proba de recepție efectuată la temperatura ambiantă t_a, în condițiile realizării unor eforturi unitare σ_p ce satisfac inegalitatea (4)".

2.2. Considerînd că materialul din care este confecționată piesa îndeplinește, atît la temperatura t, cît și la t_a, condițiile aplicării teoriei elasto-plastice a mecanicii ruperii, relația de verificare a rezistenței la inițierea ruperii are forma [1], [2] :

$$K_1 = \sigma \sqrt{\pi a \beta(a, L_i) \varphi} \leqslant K_{1c}. \tag{5}$$

Relația (5) se deosebește de (1) prin intervenția în expresia factorului de intensitate al tensiunilor K_1, a corecției de plasticitate φ :

$$\varphi = \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{\sigma_c}{\sigma}\right)^2 \ln\left(\sec \frac{\pi}{2} \frac{\sigma}{\sigma_c}\right), \tag{6}$$

σ_c fiind limita de curgere a materialului din care este confecționată piesa.

Admițînd aceleași circumstanțe de lucru ca în 2.1 și utilizînd relațiile (5) și (6), rezultă că dimensiunea maximă a defectului ce poate fi acceptat fără a exista pericolul ruperii piesei în timpul exploatării la temperatura t este

$$a_{max} \cdot \beta\,(a_{max}, L_i) = \frac{K_{1c,t}^2}{\sigma_{c,t}^2} \frac{\pi}{8 \ln\left(\sec \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{max,t}}{\sigma_{c,t}}\right)}. \tag{7}$$

Pentru ca piesa considerată să cedeze la probă, în cazul existenței unui defect cu dimensiunea a_{max}, este necesar ca efortul unitar σ_p să îndeplinească condiția

$$\ln\left(\sec \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_p}{\sigma_{c,t_a}}\right) \geqslant \left(\frac{K_{1c,t_a}}{K_{1c,t}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{c,t}}{\sigma_{c,t_a}}\right)^2 \ln\left(\sec \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{max,t}}{\sigma_{c,t}}\right). \tag{8}$$

Rezultă că principiul formulat în 2.1 rămîne valabil și în cazul pieselor confecționate din materiale elasto-plastice dacă eforturile unitare σ_p realizate la proba de recepție, efectuată la temperatura ambiantă t_a, satisfac inegalitatea (8).

2.3. Considerînd că materialul din care este confecționată piesa îndeplinește la temperatura t condițiile aplicării teoriei liniar-elastice a mecanicii ruperii, iar la temperatura t_a — condițiile aplicării teoriei elasto-plastice a mecanicii ruperii, relația de verificare a rezistenței la inițierea ruperii are forma (1) dacă analiza se efectuează la temperatura t, sau forma (5) dacă analiza se realizează la temperatura t_a.

Admițînd aceleași circumstanțe de lucru ca în 2.1 rezultă că dimensiunea maximă a defectului ce poate fi acceptat fără a exista pericolul ruperii piesei în timpul exploatării la temperatura t este dată de relația (3).

Condiția ca piesa să cedeze la proba de recepție efectuată la temperatura t_a, în cazul existenței unui defect cu dimensiunea a_{max}, devine

$$\ln\left(\sec \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_p}{\sigma_{c,t_a}}\right) \geqslant \frac{\pi^2}{8} \left(\frac{K_{1c,t_a}}{K_{1c,t}}\right)^2 \left(\frac{\sigma_{max,t}}{\sigma_{c,t_a}}\right)^2. \tag{9}$$

Rezultă că principiul formulat în 2.1 rămîne valabil și în cazul analizat în acest paragraf dacă eforturile unitare σ_p realizate la proba de recepție, efectuată la temperatura ambiantă t_a, satisfac inegalitatea (9).

2.4. Conform principiului enunțat anterior, pentru verificarea rezistenței la inițierea ruperii într-o piesă exploatată la temperatura $t \leqslant t_a$ este necesar ca stările de eforturi unitare din piesă în cazul solicitărilor de probă și de exploatare să fie echivalente ca topică (eforturile unitare maxime la probă și în exploatare să aibă localizări, direcții și sensuri identice), iar eforturile unitare maxime în cazul solicitărilor de probă σ_p să îndeplinească condițiile (4), (8) sau (9).

În general, legătura dintre eforturile unitare σ și solicitările exterioare F_K poate fi scrisă sub forma

$$\sigma = \sum_{K=1}^{n} F_K \cdot \alpha_K(L_i, c_{ei}), \tag{10}$$

unde α_K reprezintă funcții ce depind de caracteristicile geometrice ale piesei și sistemului de solicitare L_i și de constantele elastice ale materialului din care este confecționată piesa, c_{ei}.

Ținînd seama de relația (10), condiția (4) se poate scrie sub forma

$$\sigma_p = \sum_{K=1}^{n} F_{K,p} \cdot \alpha_{K,p}(L_{i,p}, c_{ei,t_a}) \geqslant \tag{11}$$

$$\geqslant \left[\sum_{J=1}^{m} F_{J,t} \cdot \alpha_{J,t}\ (L_{i,t},\ c_{ei;t}) \right] \cdot \frac{K_{1c,t_a}}{K_{1c,t}} = \sigma_{max,t} \frac{K_{1c,t_a}}{K_{1c,t}}. \tag{11}$$

Forma în care a fost scrisă relația (11) reflectă faptul că sistemul de solicitare al piesei în exploatare poate să nu aibă aceeași configurație cu sistemul de solicitare la proba de recepție. Acest procedeu este mult folosit în practică; sistemul de solicitare la probele de recepție fiind în general simplificat față de sistemul de solicitare aplicat în timpul exploatării piesei.

Considerînd cunoscute solicitările în exploatare $F_{J,t}$ se pot stabili cu ajutorul relației (11) încărcările $F_{K,p}$ ce trebuie realizate la proba de recepție. Bineînțeles, din infinitatea de soluții a inecuației (11) se vor alege acele sisteme $F_{K,p}$ $(K = 1 \cdots n)$ pentru care este îndeplinită condiția realizării unor stări de eforturi unitare de aceeași configurație în timpul exploatării piesei și la proba de recepție.

În cazul realizării condițiilor $n = m$, $\alpha_p = \alpha_t$ (admițînd că variațiile constantelor elastice ale materialului piesei în funcție de temperatură sînt neglijabile) o soluție ce verifică inecuația (11) este de forma

$$F_{J,p} \geqslant F_{J,t} \frac{K_{1c,t_a}}{K_{1c,t}},\ J = 1 \ldots n = m. \tag{12}$$

Rezultă că în cazul utilizării unor sisteme de solicitare la probă, echivalente cu sistemele de solicitare în exploatare, condițiile (4) (8) și (9) rămîn valabile și dacă sînt scrise în funcție de încărcările exterioare ale piesei.

2.5. Relațiile (4), (8) și (9) exprimă condițiile ce trebuie îndeplinite la proba de recepție a unei piese pentru a putea estima rezistența acesteia față de inițierea ruperii, în condițiile de exploatare. Deoarece în aceste relații nu intervin funcțiile $\beta(a, L_i)$, rezultă că principiul formulat în 2.1 rămîne valabil pentru piese de orice configurație, nefiind necesară cunoașterea formei concrete (pentru cazul piesei analizate) a expresiei factorului de intensitate al tensiunilor K_1.

Rezultă astfel că metoda de verificare a rezistenței la inițierea ruperii în piesele lucrînd la temperaturi scăzute $t \leqslant t_a$, bazată pe principiul formulat în 2.1, prezintă două avantaje principale:

— se poate aplica piesele de orice configurație;

— utilizarea ei nu implică controlul defectoscopic al pieselor analizate.

2.6. Principiul enunțat avînd la bază relațiile (1) și (5), rezultă că domeniul său de aplicare va cuprinde numai cazurile în care se întrunesc condițiile cunoscute de validitate ale criteriului K_{1c}.

3. EXEMPLU PRIVIND MODALITĂȚILE DE UTILIZARE PRACTICĂ A METODEI PROPUSE

Pentru a exemplifica unele modalități de utilizare practică a metodei propuse, vom considera cazul unor piese turnate de tipul recipienților sub presiune (cum ar fi corpurile prevenitoarelor de erupție de la instalațiile de foraj) destinate exploatării la temperaturi cuprinse între (−40 ... − ... − 60)°C.

Materialul din care sînt realizate aceste piese se consideră a fi oțelul T35MoCrNi08 — STAS 1773−76.

Tratamentul termic final la care sînt supuse piesele analizate este îmbunătățirea (călire de la 850°C în ulei și revenire la 680°C — timp de menținere după egalizare 2...3 h — urmată de răcire în aer). În aceste condiții caracteristicile mecanice și de tenacitate ale materialului pieselor analizate prezintă variațiile cu temperatura diagrafiate în figura 1 [4].

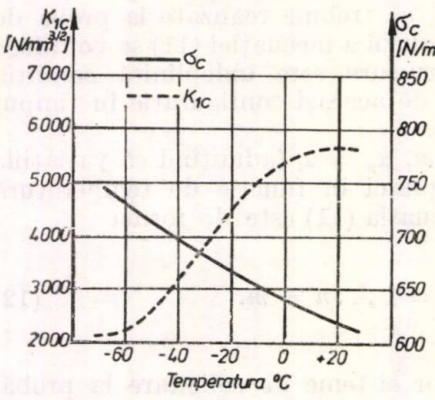


Fig. 1

Utilizînd relațiile (4), (8) și (9) s-au reprezentat, în figurile 2 și 3, dependențele dintre σ_p și $\sigma_{max,t}$ ($t = -40$°C și $t = -60$°C) ce trebuie respectate pentru a realiza condițiile principiului expus anterior privind verificarea rezistenței la inițierea ruperii, la temperatura de exploatare $t \leqslant t_a$, pe baza probelor de recepție ale piesei.

Considerînd condiția ce se impune uzual de a nu se depăși, la probă și în exploatare, un efort unitar admisibil $\sigma_a = \sigma_c/c$ (c — coeficient de siguranță față de limita de curgere, $c = 1{,}5 \ldots 2{,}0$), rezultă că valorile eforturilor unitare $\sigma_{max,t}$ au valori limitate, funcție de valorile acceptate pentru σ_p. Pentru diferite valori ale coeficientului de siguranță c, eforturile unitare $\sigma_{max,t}$ au valorile limită indicate în tabelul 1. În același tabel sînt prezentate și mărimile rapoartelor $c_s = \sigma_p/\sigma_{max,t}$ obținute, considerînd în fiecare din relațiile (4), (8) și (9) valori pentru σ_p îndeplinind condiția $\sigma_p \leqslant \sigma_a$.

Analizînd datele din tabelul 1 se observă că pentru $c \geqslant 1{,}5$, valorile rapoartelor c_s, corespunzătoare fiecărei temperaturi t considerate, sînt

Tabelul 1

C	$\sigma_p = \sigma_a$ $\sigma_a = \sigma_{ta/c}$	TEMPERATURA t (°C)											
		−40						−60					
		relația (4)		relația (8)		relația (9)		relația (4)		relația (8)		relația (9)	
	[N/mm²]	$\sigma_{max,t}$ [N/mm²]	c_s	$\sigma_{max,t}$ [N/mm²]	c_s	$\sigma_{max,t}$ [N/mm²]	c_s	$\sigma_{max,t}$ [N/mm²]	c_s	$\sigma_{max,t}$ [N/mm²]	c_s	$\sigma_{max,t}$ [N/mm²]	c_s
1,0	616	359	1,71	701	0,88	–	–	230	2,68	721	0,85	–	–
1,5	411	239	1,71	250	1,64	260	1,58	154	2,68	165	2,49	170	2,42
2,0	308	179	1,71	179	1,71	179	1,71	115	2,68	115	2,68	115	2,68

apropiate indiferent care din relațiile (4), (8) sau (9) sînt utilizate pentru descrierea dependenței $\sigma_p - \sigma_{max,t}$.

În aceste condiții, folosind relația (11) se pot stabili mărimile încărcărilor ce trebuie utilizate la proba de recepție pentru a verifica pe această bază rezistența la inițierea ruperii în piesa solicitată în exploatare la temperatura t.

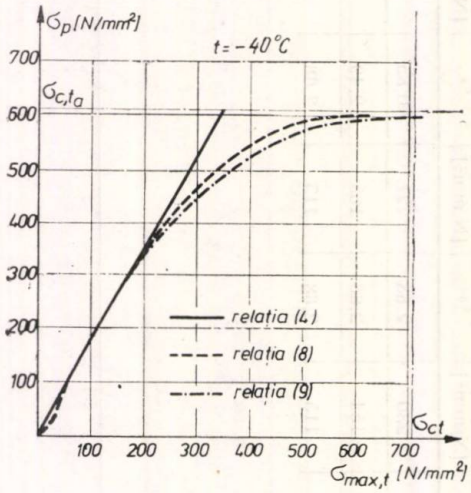


Fig. 2

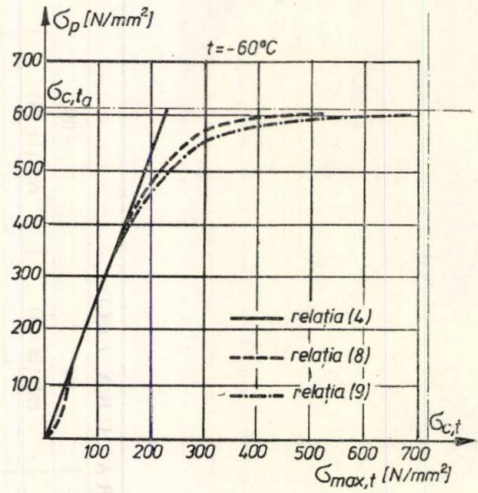


Fig. 3

Sintetizînd aspectele prezentate mai sus, rezultă următoarele etape de rezolvare a problemei propuse inițial:

— se stabilește sistemul de solicitare în exploatare al piesei analizate (încărcările $F_{J,t}$; $J = 1 \ldots m$);

— se alege valoarea coeficientului de siguranță c și se calculează efortul unitar admisibil $\sigma_a = \sigma_{c,t_a}/c$;

— cunoscînd caracteristicile de tenacitate ale materialului la temperaturile t și t_a, se calculează valoarea raportului $c_s = K_{1c,t_a}/K_{1c,t} = \sigma_p/\sigma_{max,t}$ (vezi relația (4));

— se stabilește folosind relația (11), sistemul de solicitare la proba de recepție al piesei analizate (încărcările $F_{K,p}$; $K = 1 \ldots n$);

— considerînd condițiile de solicitare corespunzătoare probei de recepție efectuate la temperatura t_a și admițînd ca limită superioară a efortului unitar σ_p, valoarea σ_a calculată anterior, se realizează dimensionarea piesei folosind relațiile adecvate din rezistența materialelor și teoria elasticității;

— se verifică prin calcul dacă în piesa cu dimensiunile astfel stabilite se dezvoltă în timpul exploatării la temperatura t eforturi unitare $\sigma_{max,t} \leqslant \sigma_a/c_s$;

— dacă rezultatul verificării este pozitiv, se trece la realizarea piesei;

— după realizare, piesa se supune probei de recepție la temperatura t_a, folosind sistemul de solicitare cu încărcările $F_{K,p}$; $K = 1 \ldots n$;

— dacă la proba de recepție nu s-a produs ruperea, rezultă că piesa are rezistență corespunzătoare față de inițierea ruperii și la temperatura de exploatare t.

4. CONCLUZII

Metoda propusă de autori pentru verificarea rezistenței la inițierea ruperii în piesele exploatate la temperaturi scăzute se bazează pe următorul principiu (demonstrat în cadrul acestei lucrări) : „Ruperea în exploatare la temperatura $t \leqslant t_a$ nu se produce dacă piesa rezistă la proba de recepție efectuată la temperatura ambiantă t_a, în anumite condiții de solicitare".

Aplicarea metodei nu este limitată de configurația piesei și nu implică controlul defectoscopic al acesteia.

Singura restricție vizînd utilizarea metodei constă în realizarea condițiilor de validitate ale criteriului K_{1c} din mecanica ruperii.

Rezultatele cercetărilor întreprinse pentru verificarea experimentală a metodei propuse vor fi prezentate într-o lucrare viitoare.

Primită la redacție la 24 decembrie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. D. Cioclov, *Mecanica ruperii materialelor*, Edit. Academiei, București, 1977, p. 305—327.
2. G. Sanz, *Applications de la mécanique de la rupture a l'étude des aciers a résistance moyenne fournis en forte épaisseur*, C.I.T. du C.D.S., *1*, 1971, p. 201—227.
3. G. Sanz, *La mécanique de la rupture et son application à l'étude de la ténacité des aciers*, C.I.T. du C.D.S., *3*, 1974, p. 675—698.
4. D. Rașeev, Gh. Zecheru, *Cercetări privind comportarea oțelurilor turnate în piese utilizate în construcția echipamentului petrolier funcționînd în climat de temperaturi scăzute*. Contract cercetare științifică nr. 64, I.P.G. Ploiești, 1978.

CERCETĂRI PRIVIND CREȘTEREA DURABILITĂȚII ARTICULAȚIILOR BOLȚ-BUCȘĂ, LA LANȚURILE DE ȘENILE ALE TRACTOARELOR AGRICOLE ȘI INDUSTRIALE

de LUCIAN CĂPITANU, ALEXANDRU SANDU
Institutul de fizica și tehnologia materialelor

În construcția tractoarelor agricole și industriale românești, articulațiile bolț-bucșă ale lanțurilor de șenile sînt confecționate actualmente din OLC 45 călit CIF (bolț) și, respectiv, 20 G cementat (bucșă). Condițiile de funcționare ale cuplei fiind deosebit de severe — solicitări mari în mediu umed și în prezența agenților abrazivi — s-a impus studierea unor soluții tehnice și tehnologice de realizare a acesteia, care să prezinte o mărită rezistență la uzare.
Lucrarea prezintă studiile efectuate în vederea creșterii durabilității cuplei bolț-bucșă și soluțiile la care s-au ajuns, soluții care permit reducerea cu 45% a uzurii cuplei.

1. INTRODUCERE

Funcționarea tractoarelor evidențiază faptul că una dintre cuplele cele mai expuse uzării este cupla bolț-bucșă, de la articulațiile lanțurilor de șenile. Uzarea cuplei duce la creșterea jocului dintre elemente, și ca urmare la creșterea lungimii totale a șenilei, scăderea întinderii sale și în final căderea ei de pe roțile stelate.

Uzarea nu este uniformă pe lățimea articulației, fiind mai evidentă la capetele acesteia. În secțiunea transversală se evidențiază o ovalizare a găurii bucșei și o tesire a bolțului pe o zonă de aproximativ 180°, pe direcția de acțiune a forței.

Natura uzării articulației este tipic abrazivă, cu trei corpuri, cel de-al treilea corp constituindu-l particulele de praf sau nisip, care pătrund între suprafețele de frecare în timpul funcționării cuplei. Prezența apei, ca mediu frecvent de funcționare a cuplei, creează și premisele apariției unei intense uzuri tribochimice.

2. CONDIȚII EXPERIMENTALE

Pentru studierea durabilității articulațiilor bolț-bucșă ale lanțurilor de șenile, a fost utilizată o instalație special realizată în acest scop [1]. Instalația folosește cuple de frecare de tip bolț-bucșă, solicitate la sarcini periodice de 100 daN, corespunzătoare presiunii de contact de 100 daN/cm².

Bolțul efectuează o mișcare de rotație periodică, cu o viteză de 0,087cm/s.

Pentru realizarea cît mai exactă a unor condiții experimentale identice pentru toate cuplele studiate, instalația a fost prevăzută cu un sistem de alimentare cu soluție abrazivă (suspensie de nisip în apă) care să realizeze o dozare strict uniformă.

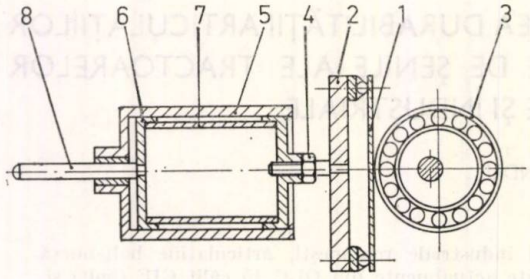


Fig. 1. — Dispozitivul de încărcare cu lamă elastică.
1 — lamă elastică ; *2* — suport cu cuțite ; *3* — execentric cu rulment ; *4* — piuliță de blocare ; *5* — corp suport dispozitiv ; *6* — ghidaj ; *7* — piesă intermediară ; *8* — tijă încărcare.

Alimentarea cu nisip se face cu ajutorul unui bunker prevăzut cu un vibrator electric, care realizează scurgerea unui debit constant de nisip de granulație uniformă, și permite amestecarea sa cu debitul constant de apă condus în suportul cuplei, printr-un furtun elastic prevăzut cu duză.

Încărcarea cuplei se realizează cu ajutorul unui dispozitiv cu lamă elastică (fig. 1). Forța de încărcare se face prin încărcarea unei lame elastice, cu ajutorul unui excentric antrenat printr-un reductor melcat. Forța realizată (100 daN) este proporțională cu mărimea săgeții de încărcare (4 mm) a lamei sprijinite pe două reazeme de tip cuțit.

Lama elastică, confecționată din oțel ARC 3, este în permanent contact cu cămașa exterioară a rulmentului excentricului, care realizează încărcarea sa intermitentă.

Cuplele experimentale utilizate păstrează proporția dintre diametrele bolțului și bucșei, ca la lanțul de șenilă real.

Cercetările au urmărit, stabilirea comportării la uzare a următoarelor materiale și tratamente, posibile de utilizat atît la confecționarea bucșei, cît și a bolțului :

— OLC 45X (călit CIF ; carbonitrurat, normalizat) ;
— 40 BC 10 (călit CIF ; normalizat) ;
— RUL 1 (normalizat) ;
— 20 G (cementat ; cementat cu azot ; carbonitrurat) ;
— 21 TMC 12 (cementat ; carbonitrurat).

3. REZULTATE EXPERIMENTALE

Cercetările efectuate au urmărit studierea comparativă a comportării la uzare a materialului utilizat actualmente la confecționarea bucșei (20 G, cementat) și a oțelului 21 TMC 12 cementat (propus ca înlocuitor), în condițiile confecționării bolțului din OLC 45X, călit CIF.

Deoarece duritatea stratului superficial are o influență deosebită asupra comportării la uzare, epruvetelor tratate în aceleași condiții și în

același timp cu reperele reale li s-au verificat individual durităţile, fiind menținute doar cele care corespundeau prescripțiilor tehnologice ale reperelor reale.

În scopul stabilirii influenței grosimii stratului durificat, a fost studiată atît soluția tehnologică normală (epruvete prelucrate mecanic, tratate și apoi rectificate), cît și o soluție tehnologică mai pretențioasă, la care epruvetelor li s-a aplicat prelucrarea mecanică finală înainte de tratamentul termic, suprafețele rezultate după călire sau cementare nemaifiind supuse altor prelucrări.

Această soluție a necesitat realizarea unor dispozitive pentru împiedicarea deformațiilor exagerate ale pieselor în timpul tratamentului și menținerea acestor deformații în domeniul prescris de proiectant pentru reperele finite.

Pentru asigurarea acurateții rezultatelor experimentale, s-au utilizat pentru încercări epruvete cu rugozitate controlată : $R_a = 1{,}6$ μm, pentru epruvete prelucrate mecanic după tratament și $R_a = 2{,}3$ μm pentru cele neprelucrate după tratament.

Cuplele studiate și notarea lor sînt prezentate în tabela 1. Uzura epruvetelor a fost măsurată prin variația diametrelor active ale acestora, după zece ore de funcționare a cuplei. Diametrele au fost măsurate cu ajutorul unui microscop de atelier, cu precizie de 0,001 mm. Uzarea a fost apreciată prin diferența diametrelor active medii. Fiecare valoare a diametrului activ mediu a fost obținută ca medie a cîte cinci măsurători, în planuri echidistante pe lungimea activă a epruvetelor.

Pentru aprecierea uzurii unui număr mai restrîns de cuple, s-a utilizat în paralel și o metodă deosebit de precisă, cea a profilometrării suprafeței active înainte și după încheierea încercării, cu ajutorul unui profilometru Tallisurf. Profilometrarea s-a realizat pe cîte patru generatoare diametral opuse și pe cîte trei circumferințe, în planuri echidistante pe suprafața de frecare a epruvetelor. Rezultatele experimentale obținute în laborator sînt prezentate în tabela 2, sub forma unor valori medii ale măsurătorilor efectuate pe cîte 25 de cuple de frecare din fiecare tip.

Tabela 1

Cuplurile de materiale studiate

Notarea cuplei de frecare	Epruveta	Material	Tratamentul suprafeței de frecare
tip I (cu elemente rectificate după tratament)	bolț	OLC 45 X	călit CIF
	bucșă	20 G	cementată
tip II (cu elemente rectificate după tratament)	bolț	OLC 45 X	călit CIF
	bucșă	21TMC12	cementată
tip III (cu elemente rectificate înainte de tratament)	bolț	OLC 45 X	călit CIF
	bucșă	20 G	cementată
tip IV (cu elemente rectificate înainte de tratament)	bolț	OLC 45 X	călit CIF
	bucșă	21TMC12	cementată

Tabela 2

Comportarea la uzare a cuplelor studiate

Tipul cuplei	Diametrul activ mediu, inițial (mm)		Diametrul activ mediu final (mm)		Jocul inițial mediu al cuplei j (mm)	Uzura epruvetelor (mm)		Jocul final mediu al cuplei J (mm)	Creșterea medie a jocului cuplei $\bar{j} = J - j$ (mm)	Viteza medie de uzare $\bar{V}_u$ (10^{-3} mm/h)	
	Bolț $\bar{d}_i$	Bucșă D_i	Bolț $\bar{d}_f$	Bucșă D_f		Bolț $\bar{d}$	Bucșă $\bar{D}$			Bolț $\bar{V}_{u\bar{d}}$	Bucșă V_{uD}
I	9,9725	10,0977	9,8506	10,2810	0,1252	0,1219	0,1833	0,4304	0,3052	12,19	18,33
II	9,9675	10,1257	9,8692	10,2730	0,1582	0,0983	0,1473	0,4035	0,2456	9,83	14,73
III	9,9710	10,0843	9,8378	10,1783	0,1133	0,1332	0,0940	0,3405	0,2272	13,32	9,40
IV	9,9756	10,0847	9,8743	10,1573	0,1091	0,1013	0,0726	0,2830	0,1739	10,13	7,26

Rezultatele obținute în urma studiilor efectuate în laborator permit evidențierea următoarelor aspecte :

— Cupla de tip I, bolț OLC 45X călit CIF/bucșă 20 G, cementată, prezintă (după 10 ore de funcționare) viteza de uzare de $(10 \div 14)\ 10^{-3}$ mm/h pentru bolțuri și de $(17 \div 20)\ 10^{-3}$ mm/h pentru bucșe. Uzura celor două corpuri ale cuplei de frecare conduce la creșterea jocului inițial, de la 0,1252 mm, la 0,4208 mm.

— Cupla de tip II, bolț OLC 45X, călit CIF/bucșă 21 TMC 12 cementată, prezintă viteze de uzare de $(8 \div 10)\ 10^{-3}$ mm/h pentru bolț, respectiv $(11 \div 14)\ 10^{-3}$ mm/h pentru bucșă, în timp ce jocul dintre cele două epruvete crește de la 0,1582 mm la 0,2418 mm.

— Cupla de tip III, bolț OLC 45X, călit CIF/bucșă 20 G cementată, neprelucrat după tratament, prezintă viteze de uzare de $(10 \div 14)\ 10^{-3}$ mm/h pentru bolț și, respectiv, $(8 \div 10)\ 10^{-3}$ mm/h pentru bucșă, iar jocul dintre elementele cuplei crește în zece ore de funcționare de la 0,1130 mm la 0,3405 mm.

— Cupla de tip IV, bolț OLC 45X, călit CIF/bucșă 21 TMC 12 cementată, neprelucrate după tratament, prezintă viteze de uzare de $(9 \div 11)\ 10^{-3}$ mm/h pentru bolț, respectiv $(7 \div 7{,}5)\ 10^{-3}$ mm/h pentru bucșă, jocul crescînd după zece ore de funcționare, de la 0,1091 mm, la 0,2830 mm.

4. CONCLUZII

Pe baza rezultatelor experimentale prezentate, se pot trage concluzii interesante privitoare la comportarea tribologică a cuplelor studiate.

Cuplele ale căror bucșe sînt confecționate din oțel 21TMC12 se comportă mai bine la uzare decît cuplele ale căror bucșe sînt confecționate din oțelul 20 G. Astfel, cuplele de tip II prezintă față de cuplele de tip I, o uzură cu 19,36% mai mică pentru bolț și cu 25,55% mai mică pentru bucșă, în timp ce jocul final este de 1,24 ori mai mic.

Cuplele de tip IV prezintă față de cuplele de tip III o uzură mai mică cu 23,95% pentru bolț și cu 22,47% mai mică pentru bucșă, în timp ce jocul final al cuplei este de 1,30 ori mai mic. Apreciem că explicația acestui fapt constă în aceea că fenomenul de uzare este un fenomen în care, ca urmare a interacțiunii elementelor cuplei, se produce o îndepărtare de material de pe ambele suprafețe în contact. Deci uzarea este în primul rînd consecința unor fenomene locale de rupere. Ca urmare, în cadrul acelorași parametri ai procesului de uzare, viteza de uzare va crește invers proporțional cu capacitatea materialului de a rezista la rupere.

Cele mai noi teorii asupra ruperii explică fenomenul printr-un proces de nucleație și dezvoltare a unor microfisuri (specifice nu numai fenomenelor de oboseală). Mecanismele fizice care conduc la apariția microfisurilor se bazează pe procesul de deplasare al dislocațiilor în interiorul materialului. Prin urmare, cu cît microstructura unui material este mai capabilă să se opună mișcării dislocațiilor, cu atît acest material se va uza mai greu.

Din punct de vedere microstructural, la oţeluri se poate stabili următoarea ordine în sens crescător, pentru rezistenţa la deplasarea dislocaţiilor :

— soluţie solidă ;

— soluţie solidă cu precipitate.

Trebuie semnalat faptul că marginile dintre grăunţi reprezintă obstacole majore în calea dislocaţiilor, rezistenţa la uzare crescînd cu micşorarea granulaţiei (mărimea numărului de graniţe dintre grăunţi).

Comparînd oţelurile 20 G şi 21 TMC 12 cementate, cu aceleaşi durităţi, oţelul 21 TMC 12 este superior din punct de vedere al rezistenţei la uzare de abraziune, deoarece :

— deşi masa de bază a straturilor ambelor oţeluri este constituită din martensită (soluţie solidă), oţelul 21 TMC 12 posedă şi un precipitat fin şi uniform distribuit de carburi de titan ;

— datorită prezenţei elementelor de aliere într-o cantitate mai mare, oţelul 21 TMC 12 prezintă o granulaţie mult mai fină decît oţelul 20 G.

Consideraţiile teoretice de mai sus sînt susţinute de rezultatele experimentale prezentate şi care arată că uzura straturilor pieselor din oţel 21 TMC 12 cementat este, în condiţii de lucru identice, mai mică decît cea a straturilor pieselor din oţel 20 G cementat.

Comparînd comportarea la uzare a cuplei de tip III cu cuplele de tip I, respectiv cuplele de tip IV cu cuplele de tip II, se pot constata următoarele :

— viteza de uzare a cuplelor rectificate înainte de tratament termic este mai redusă decît cea a cuplelor rectificate după tratament. Astfel, cupla de tip III prezintă, comparativ cu cupla de tip I, o uzură totală cu 25,56 % mai mică, iar cupla de tip IV o uzură totală cu 29,20 % mai mică decît cea a cuplei de tip II. Această micşorare a uzurii la cuplele, rectificate înainte de tratament, faţă de cele rectificate după tratament nu se repartizează uniform pe elementele cuplei de frecare. Se poate remarca faptul că în timp ce la cuplele de tip I şi II uzura bucşei este mai mare decît uzura bolţului, la cuplele de tip III şi IV bolţul prezintă uzuri ridicate. Astfel, bolţul cuplei de tip III se uzează cu 9 % mai mult decît cel al cuplei de tip I, în timp ce bucşa se uzează cu 48,7 % mai puţin.

Comparînd cupla de tip IV cu cea de tip II remarcăm că bolţul se uzează cu 3 % mai mult, în timp ce bucşa se uzează cu 50,7 % mai puţin.

Explicaţia constatărilor prezentate mai sus este următoarea :

— Bucşele rectificate înainte de tratamentul de cementare, prezintă un strat cementat de grosime uniformă, pe suprafaţa căruia se găseşte o crustă subţire de zgură rezultată din tratament. Zgura este eliminată rapid în procesul de uzare, constituind un agent abraziv suplimentar, dar a cărui influenţă comparativ cu influenţa suspensiei de nisip în apă este neglijabilă. Factorul care conduce la micşorarea vitezei de uzare a bucşelor este grosimea uniformă a stratului durificat prin cementare.

După cum se cunoaşte, atît efortul maxim de forfecare apărut ca urmare a eforturilor de frecare, cît şi duritatea medie au o evoluţie în sens crescător pînă la o anumită adîncime de la suprafaţa de contact [2]. Ca

urmare a acestui fapt, dacă nu se face o prelucrare mecanică a suprafețelor cementate ale bucșelor, uzarea acestora nu poate progresa rapid, datorită grosimii uniforme a stratului cementat. Această grosime uniformă face ca valorile maxime ale efortului de forfecare și ale durității maxime a materialului să se situeze în planuri paralele între ele, cît și cu suprafața de frecare. Deoarece efortul τ_{max} este situat mai aproape de suprafața de frecare decît zona în care duritatea este maximă, viteza de uzare manifestă o scădere pronunțată.

În situația în care suprafețele bucșelor sînt prelucrate mecanic după tratament, grosimea stratului cementat nu mai este uniformă, cele două valori τ_{max} și H_{max}, situîndu-se în planuri concurente. Datorită acestui fapt apar zone în care este posibilă apariția lui τ_{max} sub zona de duritate maximă.

În ceea ce privește bolțurile din OLC 45X călite CIF și prelucrate mecanic înainte de tratamentul termic, explicația uzării lor mai rapide decît bolțurile prelucrate după tratament, constă în grosimea suplimentară de material introdus în măsurători (aproximativ 3 %) ca urmare a măsurării optice și a stratului de zgură.

Dacă nu se ia în considerare grosimea stratului de zgură de pe suprafața activă a bolțului neprelucrat după tratament, vitezele de uzare a bolțurilor prelucrate și neprelucrate final sînt comparabile. Aceasta dovedește că datorită grosimii mai mari a stratului de material călit CIF, adică a situării zonei de duritate maximă mai în adîncime, influența prelucrării mecanice finale este neglijabilă.

Ca urmare a celor prezentate, se pot desprinde următoarele concluzii finale :

În ordinea preferențială din punct de vedere tribologic, considerînd ca etalon comportarea cuplei actualmente utilizată la articulațiile bolț-bucșă ale lanțurilor de șenile, cuplele studiate se pot ordona astfel :

1. Bolț OLC 45 X, călit CIF și prelucrat după călire bucșă 21 TMC 12, cementată și prelucrată înainte de cementare (viteză de uzare cu 46 % mai mică decît a cuplei etalon).

2. Bolț OLC 45 X, călit CIF și prelucrat înainte de călire, bucșă 21 TMC 12, cementată și prelucrată înainte de tratament (viteză de uzare cu 43 % mai mică decît a cuplei etalon).

3. Bolț OLC 45 X, călit CIF și prelucrat după călire, bucșă 20G, cementată și prelucrată înainte de tratament (viteză de uzare cu 28,5 % mai mică decît a cuplei etalon).

4. Bolț OLC 45 X, călit CIF și prelucrat înainte de călire, bucșă 20G, cementată și prelucrată înainte de tratament (viteză de uzare cu 25,5 % mai mică decît a cuplei etalon).

5. Bolț OLC 45 X, călit CIF și prelucrat după călire, bucșă 21 TMC 12, cementată și prelucrată după tratament (viteză de uzare cu 19,5 % mai mică decît cea a cuplei etalon).

6. Bolț OLC 45 X, călit CIF și prelucrat după călire, bucșă 20G, cementată și prelucrată după tratament (cupla etalon).

Prin folosirea uneia din primele cinci cuple de materiale, la confecționarea articulațiilor lanțurilor de șenile, durabilitatea acestora crește

față de soluția actuală. Procentul de mărire a durabilității articulațiilor este egal cu procentul de scădere a vitezei de uzare, menționat pentru fiecare tip de cuplă.

Primită la redacție la 9 noiembrie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. B. Dimitrov, G. Teodorescu, A Sandu, *Influența microstructurii asupra uzării unor oțeluri tratate termochimic și termic.* St. cerc. mec. apl., **37**, 6, (1978).
2. D. Pavelescu, A. Tudor, M. Mușat, *Tribologie*, Edit. Didactică și Pedagogică, București, 1977.

EVALUAREA POSIBILITĂȚII DE PRELUNGIRE A DURATEI EFECTIVE DE SERVICIU, DINCOLO DE DURATA DE SERVICIU DE CALCUL, LA SERPENTINELE DE REACȚIE ALE CUPTOARELOR TUBULARE TEHNOLOGICE PETROCHIMICE. I

de A. PAVEL
Institutul de petrol și gaze Ploiești

Se elaborează criteriile privind aprecierea cantitativă a posibilității de prelungire a duratei de serviciu și prognozarea acestei prelungiri pentru tubulatura serpentinelor de reacție ale cuptoarelor tehnologice petrochimice proiectate pentru 100 000 h de serviciu efectiv sub sarcină.

1. GENERALITĂȚI. FORMULAREA PROBLEMEI

În cele ce urmează vor fi expuse rezultatele unor studii recente [1—4], care au furnizat o serie de date noi ce pot contribui la formularea clară și practic aplicabilă a unor puncte de vedere care să constituie baza elaborării criteriilor privind aprecierea cantitativă a posibilității de prelungire a duratei de serviciu și, eventual, la precizarea limitelor acestei prelungiri pentru tubulatura executată din oțeluri Cr/Mo de tip 2,25/1,00 a serpentinelor de reacție ale cuptoarelor tehnologice petrochimice, a cărei durată de serviciu de calcul egală cu 100 000 h a fost deja sau este aproape epuizată.

Încercările standard ale oțelurilor, utilizate în construcția de serpentine tubulare pentru cuptoarele tehnologice petrochimice, la rezistența de durată, se fac în mod obișnuit sub sarcină (statică) și temperatură constante, ca și încercările standard de fluaj, însă pînă la ruperea epruvetei, măsurîndu-se și/sau înregistrîndu-se timpul pînă în momentul distrugerii. Durata corespunzătoare acestui timp se notează de obicei cu τ_r și se numește *durată de rupere sau durată de distrugere*. Evident, durata de distrugere τ_r reprezintă în acest caz o *caracteristică* ce definește, într-un anumit fel, rezistența tehnică (convențională) de durată σ_d^t a oțelului supus acțiunii de durată a unei anumite sarcini statice (sau cvasistatice) pentru temperatura respectivă t de încercare sau de lucru.

2. COEFICIENTUL DE SIGURANȚĂ FAȚĂ DE DURATA DE DISTRUGERE

În anumite condiții și în diferite alternative, durata de distrugere τ_r se poate evalua direct, pe cale analitică, fie folosind una din formulele (13), (38), (49), (52) etc. din lucrarea [6], fie utilizînd una din formulele

menționate în lucrările [3 ; 4] sau fie folosind cunoscuta metodă parametrică Larson-Miller [5].

Durata efectivă sau disponibilă de serviciu trebuie să îndeplinească condiția evidentă :

$$\tau_s < \tau_r, \tag{1}$$

raportul

$$c_\tau = \frac{\tau_r}{\tau_s} > 1{,}0 \tag{2}$$

numindu-se *coeficient de siguranță față de durata de distrugere.*

Pentru a se asigura condițiile unei complete securități tehnice a funcționării sub sarcină (pentru $\sigma = \text{const.}$). și $t = \text{const.}$) pentru un element sau sistem executat dintr-un material dat, un timp îndelungat, este necesar ca coeficientul de siguranță c_τ să fie astfel stabilit sau adoptat (ales), încît la limită să nu se intre în stadiul fluajului distructiv (IV) al curbei tipice de fluaj (fig. 1).

Substituind în ecuația (13) din lucrarea [6] următoarea valoare rezultată din condiția (2) :

$$\tau_r = c_\tau \tau_s > \tau_s, \tag{3}$$

în urma logaritmării se obține :

$$\lg \tau_s = \lg \frac{C}{c_\tau} - N \lg \sigma_t^d, \tag{4}$$

respectiv

$$\lg \sigma_d^t = \frac{1}{N} \lg \frac{C}{c_\tau} - \frac{1}{N} \lg \tau_s, \tag{5}$$

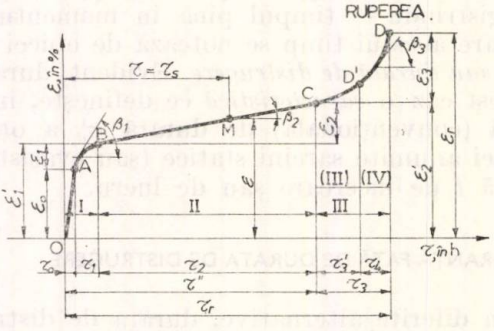


Fig. 1. — Curba tipică de fluaj. I — fluajul primar, nestabilizat ; II — fluajul secundar, stabilizat ; III — — fluajul terțiar, accelerat ; IV — fluajul cuaternar, distructiv.

ecuațiile (4) și (5) reprezentînd ecuațiile unor drepte de coeficient unghiular $-N$ sau $-N^{-1}$ și cu ordonata la origine, în mod corespunzător, $\lg (C/c_\tau)$ sau $N^{-1}\lg (C/c_\tau)$.

Dependențele $\sigma_d^t = \sigma_d^t(\tau)$, corespunzătoare ecuației (13) din lucrarea [6], respectiv ecuațiile (4) și (5), sînt reprezentate în figura 2 pentru o singură valoare $c_\tau = \text{const}$. Din figura 2 se vede imediat că

$$\tau_{r1} - \tau_{s1} > \tau_{r2} - \tau_{s2} > \tau_{r3} - \tau_{s3}, \tag{6}$$

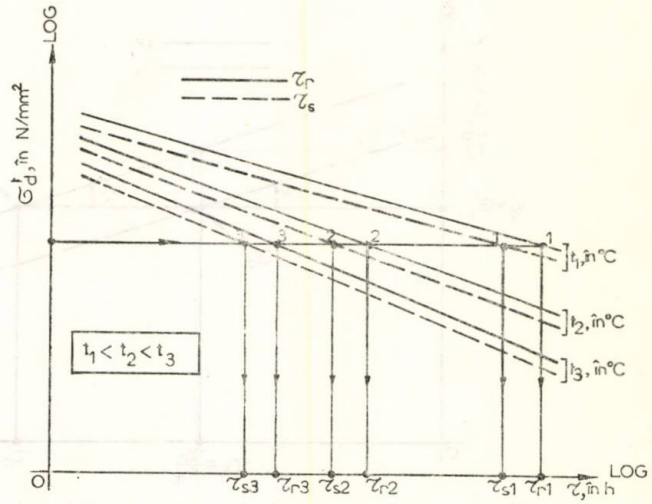


Fig. 2. — Dependența $\sigma_d^t = \sigma_d^t$ (τ) în coordonate logaritmice.

ceea ce înseamnă că valoarea coeficientului de siguranță c_τ va trebui să fie stabilită diferențiat, cel puțin de la un domeniu la altul de temperatură, pentru a putea realiza următoarea condiție:

$$\tau_r - \tau_s = \text{const}. \tag{7}$$

Așadar, trecerea la calculul tubulaturii serpentinelor de reacție ale cuptoarelor tehnologice petrochimice (lucrînd în condiții de fluaj) pe baza duratei de serviciu maxim admisibile τ_s, necesită rezolvarea practică a următoarelor probleme:

— construirea*, prin metoda parametrică Larson-Miller[5], a dependențelor $\sigma_d^t = \sigma_d^t(\tau)$ corespunzătoare materialelor reprezentative, utilizate în construcția de serpentine tubulare, pentru mai multe trepte de temperatură acoperind domeniul temperaturilor uzuale de funcționare sau/și de încercare și pentru un interval $\tau_r \in [0\,;\,200\,000\ \text{h})$;

— determinarea și precizarea fundamentat diferențiată a valorilor coeficientului de siguranță c_τ;

— stabilirea de valori rezonabile pentru duratele convenționale (de serviciu) de calcul τ_{calc}, care să fie puse la dispoziția factorilor interesați (proiectant, constructor, beneficiar), îndeplinind următoarea *condiție de durată*:

$$\tau_{calc} \leqslant \tau_s = \frac{\tau_r}{c_\tau}. \tag{8}$$

* De către o instituție specializată (ICEM București, I.P. Timișoara etc.).

În aceste condiții, rezolvarea problemei prelungirii duratei efective de serviciu τ_s dincolo de o anumită durată (convențională) de serviciu de calcul $\tau_{calc} \leqslant 100\,000$ h, avută în vedere de către proiectant, se va putea realiza fără dificultăți, în funcție de valorile minim admisibile ale coeficientului de siguranță c_τ.

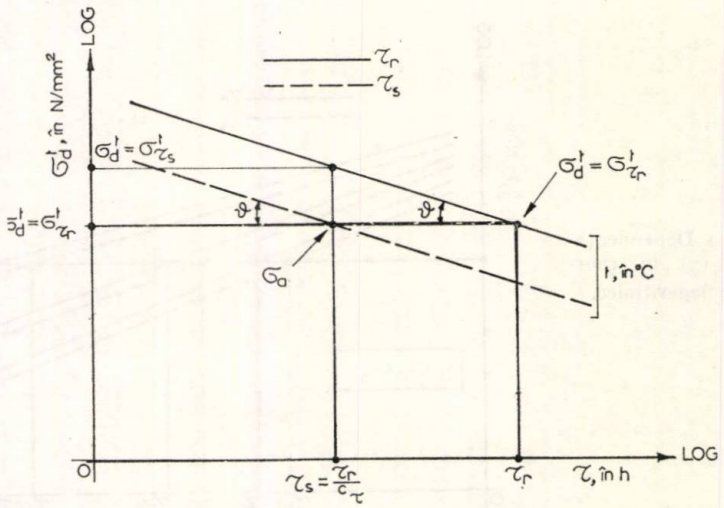


Fig. 3. — Schema de calcul pentru coeficientul de siguranță c_τ.

Coeficientul de siguranță c_τ se poate calcula pe cale analitică, dacă se cunosc următoarele mărimi (fig. 3):

— rezistența de durată $\sigma_d^t = \sigma_{\tau_s}^t = c_d \sigma_a \geqslant c_d \sigma_{t\,max}$, corespunzătoare duratei de serviciu $\tau_s = \tau_r / c_\tau$;

— durata de distrugere $\tau_r = c_\tau \tau_s$, corespunzătoare rezistenței de durată $\sigma_d^t = \sigma_{\tau_r}^t = \sigma_a = \sigma_{\tau_s}^t / c_d \geqslant \sigma_{t\,max}$, unde $c_d = \dfrac{\sigma_{\tau_s}^t}{\sigma_a} \geqslant 1{,}00$ este coeficientul global de siguranță față de rezistența de durată $\sigma_{\tau_s}^t$;

— unghiul ϑ, respectiv contrapanta N.

Din figura 3 rezultă în mod evident:

$$\operatorname{tg} \vartheta = N^{-1} = \frac{\lg \sigma_{\tau_s}^t - \lg \sigma_a}{\lg \tau_r - \lg \tau_s}, \tag{9}$$

de unde se obține

$$N = \frac{\lg c_\tau}{\lg c_d} = \frac{\ln c_\tau}{\ln c_d}, \tag{10}$$

respectiv

$$\lg c_\tau = N \lg c_d\,;\ \ln c_\tau = N \ln c_d, \tag{11}$$

deci

$$c_\tau = c_d^N = \left(\varphi \frac{\sigma_d^t}{\sigma_{max}}\right)^N = \left(\varphi \frac{\sigma_d^t}{\sigma_{as}}\right)^N = \left(\frac{\sigma_d^t}{\sigma_a}\right)^N, \tag{12}$$

această din urmă expresie putîndu-se obține, de asemenea, direct din ecuația clasică $\tau_r(\sigma_d^t)^N = C$.

Formulele (10)—(12) dovedesc concludent că valoarea *minimă* $c_\tau = 1{,}0$ corespunde unor situații care nu sînt și, în general, nici nu pot fi întîlnite în activitatea practică, pentru care : $N \lg c_d = 0$; $N \ln c_d = 0$; $c_d^N = 1{,}00$, situațiile respective fiind, așadar, realizabile :

— în cazul $c_d = 1{,}0$, N oricare și, deci, ϑ oricare ;

— în cazul c_d oricare, $N = 0$ și, deci, $\vartheta = 90°$;

— în cazul $c_d > 1{,}0$, $N \to 0$ și, deci, $\vartheta \to 90°$.

Întrucît, în activitatea practică specifică construcției și exploatării de echipament tehnologic petrochimic, comune și reprezentative sînt, deocamdată, numai situațiile pentru care :

$$c_d \geqslant 1{,}50,$$

$$0° < \vartheta \ll 45°,$$

deci

$$N \gg 1{,}00,$$

rezultă invariabil

$$c_\tau \gg 1{,}00. \qquad (13)$$

3. COEFICIENTUL DE SIGURANȚĂ FAȚĂ DE REZISTENȚA TEHNICĂ DE DURATĂ

În general, securitatea tehnică se definește ca fiind starea raporturilor relative dintre diferite sisteme tehnice, utilaje, elemente etc. sau dintre un anumit sistem tehnic, utilaj, element etc. și mediul înconjurător ori om (oameni), starea respectivă fiind creată ca urmare a respectării și aplicării unor măsuri tehnice, prevăzute în proiecte (tehnice, de execuție, de montare etc.), în scopul prevenirii și al combaterii avariilor și (sau) accidentelor [7].

Din punct de vedere tehnic, securitatea sau siguranța unui anumit sistem tehnic, utilaj, element etc. se definește — după C. Holzhauer [1] — ca fiind acel interval de valori ale unui anumit parametru (sarcină, forță, efort, efort unitar, presiune, temperatură, timp etc.) care desparte sistemul tehnic, utilajul, elementul etc. respectiv de un eveniment neintenționat și nedorit, de exemplu, scoaterea sa din serviciu prin depășirea capacității portante sau a anumitor deformații remanente (plastice sau de fluaj), prin distrugere, prin pierderea stabilității etc.

Așadar, problema importantă care trebuie rezolvată, atît în activitatea practică în general, cît și în cazul particular al prelungirii duratei totale de serviciu neîntrerupt a serpentinelor tubulare de reacție ale cuptoarelor tehnologice petrochimice dincolo de durata lor de serviciu de calcul, este aceea a extinderii în cît mai mare măsură a duratei de serviciu, fără a afecta intervalul de *timp de gardă* care asigură funcționarea tubulaturilor în depline condiții de securitate și deci fără a afecta securitatea tehnică generală a instalațiilor tehnologice.

Problemele fundamentale privind securitatea tehnică a instalațiilor industriale în general și securitatea tehnică — limitată în timp — a instalațiilor tehnologice petrochimice în particular, durata efectivă de serviciu și rezistența tehnică de durată a acestora și a utilajelor, dispozitivelor, elementelor lor componente, precum și principiile calculului mecanic al utilajelor tehnologice petrochimice lucrînd în condiții de fluaj, au reintrat în actualitate în ultimii 8—10 ani, reluarea lor în studiu fiind determinată, în primul rînd, de remarcabilele progrese tehnice realizate în domeniul elaborării, concepției, proiectării și construcției materialelor tehnice (în special al oțelurilor și aliajelor refractare speciale) și, respectiv, al utilajelor și, în al doilea rînd, de unele alternative și necesități practice, cu mari implicații tehnico-economice (cum este, bunăoară, necesitatea și posibilitatea prelungirii duratei efective de serviciu dincolo de cea de calcul sau înlocuirea elementelor de utilaje, conducte, serpentine tubulare etc. imediat după depășirea duratei convenționale de serviciu de calcul egale, de exemplu, cu 100 000 h).

Cu prilejul exprimării unui punct de vedere propriu privind sporirea valorilor duratei convenționale de serviciu de calcul, W. Ruttmann [2] menționa — în comunicarea pe care a expus-o în cadrul colocviului internațional DECHEMA/Frankfurt am Main — că progresele realizate în ultimele decenii în concepția, proiectarea și construcția de utilaje tehnologice petrochimice au impus elaborarea și utilizarea practică a unor noi oțeluri și aliaje, cu caracteristici mecanice superioare, care să confere utilajelor respective capacitatea portantă corespunzătoare funcționării normale și sigure, un timp suficient de îndelungat, la temperaturi de regim de pînă la 900 ... 1 000°C și suprapresiuni maxime de lucru de pînă la 100 bar.

Întrucît utilizarea materialelor tehnice (oțelurilor, aliajelor) similare era, și a rămas, *condiționată* în principal de valorile rezistenței lor tehnice de durată $\sigma_d^t = \sigma_{B/\tau_r}^t = \sigma_{r/\tau_r}^t$, în urmă cu circa 28...30 de ani, în R. F. Germania s-a trecut la îndeplinirea unui vast program tehnic de determinare prin încercări mecanice de lungă durată a valorilor respective pentru temperaturi de 400 ... 1 000°C, pentru diferite tipuri și mărci de oțeluri. Rezultatele experimentale obținute și publicate în anul 1969 [8] au arătat că valorile de calcul $\sigma_d^t = \sigma_{B/\tau_r}^t = \sigma_{r/\tau_r}^t$, indicate în standardul german* DIN 17175 și în standardul românesc* STAS 8184—68, sînt *ceva mai mari* decît cele reale, duratele corespunzătoare de serviciu și de calcul fiind *mult mai mici* decît cele reale.

În baza acestei constatări, care se fundamentează pe un volum mare de rezultate experimentale [8], constructorii, antreprenorii și oficialitățile organismelor de supraveghere tehnică și de control din R. F. Germania consideră cu totul normal ca, în prezent, elementele de utilaje, serpentine tubulare, conducte etc. din cadrul instalațiilor tehnologice, care au fost anterior calculate pentru o durată de serviciu de calcul $\tau_{calc} = \tau_s = 100000$ h și pentru $c_d = 1{,}50$, să fie *recalculate* pentru o durată de serviciu de calcul $\tau_{calc} = \tau_s = 200\,000$ h și (după Ruttmann [2]) $c_d = 1{,}00$.

* La care se fac referiri — pentru confirmarea unor rezultate comparate — în lucrarea [9].

Ruttmann aprecia [2] că, procedîndu-se astfel, calculele de dimensionare și cele de verificare a elementelor de serpentine tubulare, schimbătoare de căldură, recuperatoare termice tubulare, generatoare de abur, supraîncălzitoare, conducte tehnologice calde etc. se vor apropia mult mai mult de situația reală, constantă dealtfel practic în mai multe țări (S.U.A., U.R.S.S., Anglia, Franța, R.F.G., România etc.). În cazul acesta, condiția de rezistență ar trebui — după Ruttmann [2] — să fie formulată astfel:

$$\sigma_{max} \leqslant \sigma_{as} = \varphi \sigma_a = \varphi \frac{\sigma^t_{r/200\,000}}{1{,}00} = \varphi \sigma^t_{r/200\,000}. \qquad (14)$$

Așadar, conform punctului de vedere formulat de către Ruttmann, proiectarea sau verificarea rațională a elementelor de utilaje, serpentinelor tubulare, utilajelor și conductelor tehnologice calde etc. din instalațiile petrochimice trebuie să fie făcută — în prezent — cu luarea în considerație a duratei de serviciu de calcul τ_{calc}, precizată direct pe baza valorilor σ^t_d, renunțîndu-se complet la valorile determinatorii, folosite pînă acum, ale coeficientului global de siguranță $c_d \geqslant 1{,}50$. Deocamdată, însă, acest punct de vedere nu poate fi acceptat în totalitatea sa. Dealtfel, se pare că el nu a fost acceptat ca atare nici în R.F.G.

Pe baza rezultatelor experimentale general cunoscute (vezi standardele de specialitate STAS, DIN, GOST, ASTM, ISO etc.), se poate admite că domeniul (banda) de dispersie a valorilor σ^t_d este delimitat(ă) prin abaterea de $\pm 20\%$ în raport cu $\sigma^t_{d\,med}$ (fig. 4). Evident, pe măsura acumulării în timp a unor rezultate experimentale suplimentare, domeniul respectiv de dispersie a valorilor σ^t_d se va putea îngusta, ceea ce va avea drept consecință o creștere a valorilor $\sigma^t_{d\,min}$. Această alternativă permite să se aprecieze că, într-un viitor previzibil, în calculele practice vor fi utilizate în mod curent numai valorile $\sigma^t_{d\,min}$, cărora le corespund valori maxime $\tau_s = \tau_{calc}$.

În stadiul actual al acumulării (modeste) de rezultate experimentale, admițînd (pentru o abatere maximă de -20%, fig. 4):

$$\sigma^t_{d\,min} = 0{,}8\ \sigma^t_{d\,med} \qquad (15)$$

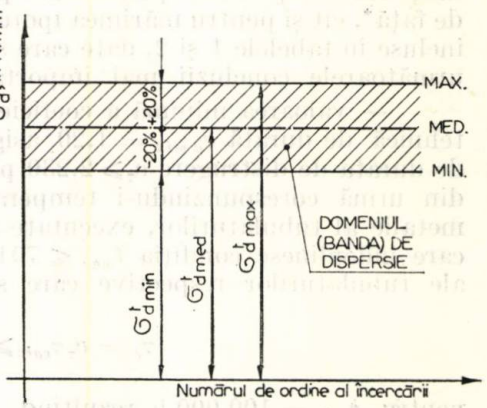


Fig. 4. — Schematizarea domeniului (benzii) de dispersie a valorilor rezistenței de durată σ^t_d.

și considerînd $c_{d\,med} = 1{,}50$, dacă se are în vedere modul de evaluare cantitativă a rezistenței admisibile σ_a [7 ; 10—12] și condiția generală (14), atunci se obține

$$\sigma_a = \frac{\sigma^t_{d\,med}}{c_{d\,med}} = \frac{\sigma^t_{d\,min}}{c_{d\,min}} = \frac{\sigma^t_{d\,max}}{c_{d\,max}}, \qquad (16)$$

de unde rezultă imediat că

$$c_{d\,min} = 0{,}8\, c_{d\,med} = 0{,}8 \cdot 1{,}50 = 1{,}20 > 1{,}00. \tag{17}$$

Pentru $c_{d\,med} \geqslant 1{,}65$ se obține

$$c_{d\,min} = 0{,}8\, c_{d\,med} \geqslant 0{,}8 \cdot 1{,}65 = 1{,}32 > 1{,}00. \tag{18}$$

Așadar, coeficientul global de siguranță $c_{d\,min}$ față de valorile minime (inferioare) ale rezistenței de durată $\sigma^{t}_{d\,min}$ este *supraunitar* în oricare caz practic și nu unitar (vezi condiția 14), cum a apreciat W. Ruttmann [2].

Din egalitatea (12) rezultă următoarea expresie de calcul pentru coeficientul de siguranță față de rezistența de durată:

$$c_d = c_\tau^{\frac{1}{N}} = \sqrt[N]{c_\tau}. \tag{19}$$

În tabelul 1 sînt indicate valorile coeficientului de siguranță față de durata de distrugere c_τ pentru cîteva trepte reprezentative $c_d \in [1{,}00\,;\ 1{,}65]$, iar în tabelul 2 sînt indicate valorile coeficientului de siguranță față de rezistența tehnică de durată c_d de asemenea pentru cîteva trepte reprezentative $c_\tau \in [1{,}0\,;\ 10{,}0]$, toate valorile respective fiind *calculate* atît pentru mărimea $N \in [4{,}4\,;\ 8{,}8]$ cunoscută pentru cazul ce se studiază în lucrarea de față*, cît și pentru mărimea ipotetică $N \in [1{,}0\,;\ 4{,}0]$. Din analiza datelor incluse în tabelele 1 și 2, date care sînt ilustrate grafic în figura 5, rezultă următoarele concluzii mai importante:

— valoarea minimă a coeficientului de siguranță față de rezistența tehnică de durată $c_{d\,min} = 1{,}20$ asigură un coeficient de siguranță față de durata de distrugere $c_\tau \geqslant 2{,}230$ pentru oricare valoare $N \geqslant 4{,}4$, acesteia din urmă corespunzîndu-i temperaturi maxime de lucru ale peretelui metalic al tubulaturilor, executate dintr-un oțel Cr/Mo de tip 2,25/1,00, care îndeplinesc condiția $t_{max} \leqslant 704°C = 1300°F$ și durate de distrugere ale tubulaturilor respective care satisfac condiția:

$$\tau_r = c_\tau \tau_{calc} \geqslant 2{,}230\ \tau_{calc}, \tag{20}$$

pentru $\tau_{calc} = 100\,000$ h rezultînd

$$\tau_r \geqslant 223\,000 \text{ h}, \tag{21}$$

iar pentru τ_r cunoscut obținîndu-se:

$$\tau_{calc} \leqslant 0{,}4484\ \tau_r < 0{,}5\ \tau_r; \tag{22}$$

* Vezi figura 3 în lucrarea [6].

Tabelul 1

Valorile coeficientului de siguranță c_τ (vezi formula 12)

Temperatura de calcul			N \ c_d	$c_{d\,min} = 1{,}00$	$c_{d\,min} = 1{,}20$	$c_{d\,min} = 1{,}32$	$c_{d\,med} = 1{,}50$	$c_{d\,med} = 1{,}65$
t, în °C	T, în K	T', în °F						
538	811	1 000	8,8	1,000	4,975	11,509	35,448	82,008
566	839	1 050	7,5	1,000	3,925	8,022	20,925	42,769
593	866	1 100	7,2	1,000	3,716	7,381	18,529	36,803
621	894	1 150	6,3	1,000	3,153	5,749	12,863	23,450
649	922	1 200	5,9	1,000	2,932	5,145	10,938	19,193
677	950	1 250	5,2	1,000	2,580	4,236	8,235	13,518
704	977	1 300	4,4	1,000	2,230	3,392	5,953	9,055
Peste	Peste	Peste	4,0	1,000	2,073	3,035	5,062	7,412
704	977	1 300	3,0	1,000	1,728	2,299	3,375	4,492
			2,0	1 000	1,440	1,742	2,250	2,722
			1,0	1,000	1,200	1,320	1,500	1,650

Tabelul 2

Valorile coeficientului de siguranță c_d (vezi formula 19)

Temperatura de calcul			c_τ \ N	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
t, în °C	T, în K	T', în °F											
538	811	1 000	8,8	1,000	1,081	1,132	1,170	1,200	1,225	1,247	1,266	1,283	1,299
566	839	1 050	7,5	1,000	1,096	1,157	1,203	1,239	1,269	1,296	1,319	1,340	1,359
593	866	1 100	7,2	1,000	1,101	1,164	1,212	1,250	1,282	1,310	1,334	1,356	1,376
621	894	1 150	6,3	1,000	1,116	1,190	1,246	1,291	1,328	1,361	1,391	1,417	1,441
649	922	1 200	5,9	1,000	1,124	1,204	1,264	1,313	1,354	1,390	1,422	1,451	1,477
677	950	1 250	5,2	1,000	1,142	1,235	1,305	1,362	1,411	1,453	1,491	1,525	1,557
704	977	1 300	4,4	1,000	1,170	1,283	1,370	1,441	1,502	1,556	1,604	1,647	1,687
Peste	Peste	Peste	4,0	1,000	1,189	1,316	1,414	1,495	1,565	1,626	1,681	1,732	1,778
704	977	1 300	3,0	1,000	1,259	1,442	1,587	1,709	1,817	1,912	2,000	2,080	2,154
			2,0	1,000	1,414	1,732	2,000	2,236	2,449	2,645	2,828	3,000	3,162
			1,0	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000	6,000	7,000	8,000	9,000	10,000

aşadar, pentru $c_d = c_{d\,min} = 1{,}20$, practic poate fi valorificată mai puţin de jumătate (sub 50%) din durata de distrugere prin fluaj a tubulaturilor serpentinelor de reacţie executate din oţelurile Cr/Mo de tip 2,25/1,00, rezultînd o *apreciabilă disponibilitate* de durată de serviciu:

$$\Delta\tau_s = \tau_r - \tau_{calc} \leqslant 223\,000 - 100\,000 = 123\,000 \text{ h} \quad (23)$$

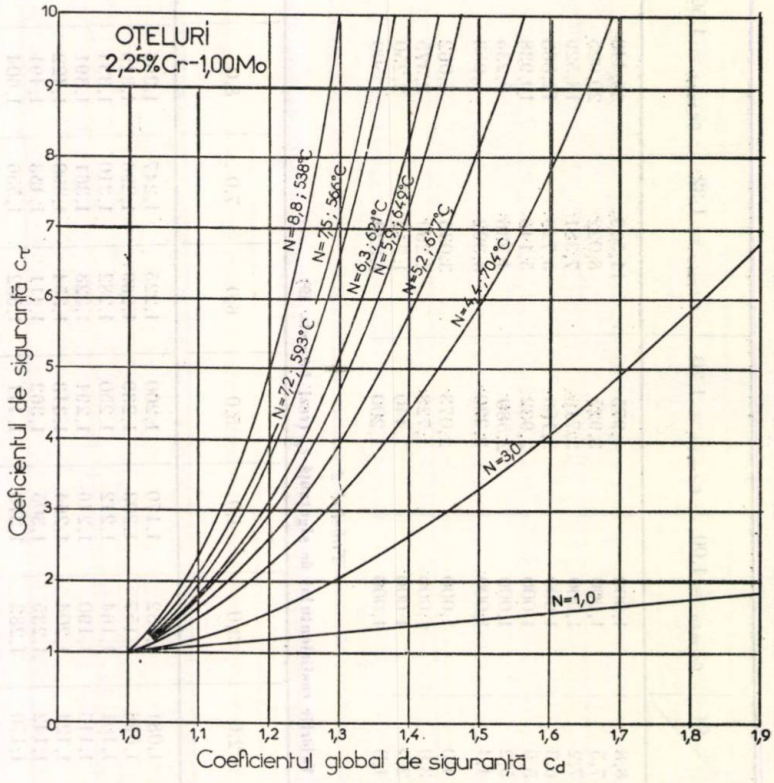


Fig. 5. — Nomograma corelării coeficienţilor de siguranţă c_d şi c_τ.

pentru $1{,}00 < c_d < c_{d\,min} = 1{,}20$;

— valoarea uzuală medie a coeficientului de siguranţă faţă de rezistenţa tehnică de durată $c_{d\,med} = 1{,}50$ asigură un coeficient de siguranţă faţă de durata de distrugere $c_\tau \geqslant 5{,}953$ pentru oricare valoare $N \geqslant 4{,}4$, deci

$$\tau_r = c_\tau \tau_{calc} \geqslant 5{,}953\ \tau_{calc}, \quad (24)$$

pentru $\tau_{calc} = 100\,000$ h rezultînd

$$\tau_r \geqslant 595\,300 \text{ h}, \quad (25)$$

iar pentru τ_r cunoscut obţinîndu-se

$$\tau_{calc} \leqslant 0{,}1680\ \tau_r < 0{,}2\ \tau_r; \quad (26)$$

așadar, pentru $c_d = c_{d\,med} = 1{,}50$, practic poate fi valorificată mai puțin de 20% din durata de distrugere prin fluaj a tubulaturilor serpentinelor de reacție executate din oțelurile Cr/Mo de tip 2,25/1,00, rezultînd o *considerabilă disponibilitate* de durată de serviciu:

$$\Delta\tau_s = \tau_r - \tau_{calc} \leqslant 595\,300 - 100\,000 = 495\,300 \text{ h} \tag{27}$$

pentru $1{,}00 < c_d < c_{d\,med} = 1{,}50$;

— pentru $c_d \geqslant 1{,}081$ corespunde $c_\tau \geqslant 2,\ 000$ în oricare caz caracterizat prin valoarea $N \in [1{,}0;\ 8{,}8]$, deci

$$\tau_r = c_\tau \tau_{calc} \geqslant 2\ \tau_{ca'c}, \tag{28}$$

pentru $\tau_{calc} = 100\,000$ rezultînd

$$\tau_r \geqslant 200\,000 \text{ h}, \tag{29}$$

iar pentru τ_r cunoscut obținîndu-se

$$\tau_{calc} \leqslant 0{,}5\ \tau_r; \tag{30}$$

așadar, pentru $c_d = 1{,}081$, practic poate fi valorificată numai jumătate (50%) din durata de distrugere prin fluaj a tubulaturilor serpentinelor de reacție executate din oțelurile Cr/Mo de tip 2,25/1,00, rezultînd o *destul de mare disponibilitate* de durată de serviciu:

$$\Delta\tau_s = \tau_r - \tau_{calc} \leqslant 200\,000 - 100\,000 \text{ h} = 100\,000 \text{ h} \tag{31}$$

pentru $1{,}00 < c_d < 1{,}081$.

Primită la redacție la 27 august, 1979

NOTAȚII UTILIZATE

σ_{max} — efortul unitar normal maxim corespunzător solicitării la presiune interioară a elementelor tubulare, în N/mm²;

σ_a — rezistența admisibilă a materialului de bază, în N/mm², evaluată conform [10; 14]; în condiții de fluaj, $\sigma_a \leqslant \sigma_d^t/c_d$;

$\sigma_{as} \leqslant \varphi\sigma_a$ — rezistența admisibilă a sudurii (materialului de adaos), în N/mm², evaluată conform [10];

$\varphi = \sigma_{as}/\sigma_a \leqslant 1{,}00$ — coeficientul de rezistență al sudurii, evaluat conform [10; 11; 17];

t — temperatura de calcul a peretelui metalic, în °C sau în K;

$\sigma_{t\,max}$ — efortul unitar inelar (circumferențial) maxim din peretele elementului tubular presurizat, în condiții de fluaj, la temperatura t, în N/mm²;

C — factor constant;

τ — timpul, în general, în h, ani etc.;

τ_s — durata de serviciu, în h, ani etc.; în general, în calculele practice se admite $\tau_s = 8\,000$ h/an;

τ_r — durata de distrugere (rupere) prin fluaj, în h, ani etc.;

$\sigma_d = R_d$, $\sigma_s = R_s$ — rezistența tehnică de durată, în N/mm²;

$\sigma^{t,°C}_{r/\tau_r,h} = \sigma^{t,°C}_{\tau_r,\text{în } h} = R^{t,°C}_{r/\tau_r,h}$ — simbolul standardizat al rezistenței tehnice de durată, în N/mm²; de exemplu, pentru $\tau_r = 100\,000$ h și $t = 570$°C, simbolul respectiv se scrie astfel: $\sigma^{570}_{r/100\,000} = R^{570}_{r/100\,000}$;

$\sigma^{°C}_{s/\tau_s,h} = \sigma^{t,\text{în °C}}_{\tau_s,\text{în } h} = R^{t,°C}_{s/\tau_s,h}$ — rezistența tehnică de durată corespunzătoare unei durate de distrugere $\tau_r = \tau_s$, în N/mm²; de exemplu, pentru $\tau_s = 80\,000$ h ($= \tau_r$) și $t = 570$°C, simbolul respectiv se scrie astfel: $\sigma^{570}_{s/80\,000} = R^{570}_{s/80\,000}$;

$c_d \leqslant \varphi \dfrac{\sigma^t_d}{\sigma_{max}} = \varphi \dfrac{\sigma^t_d}{\sigma_{as}} = \dfrac{\sigma^t_d}{\sigma_a}$ — coeficientul global de siguranță ($c_{d\,min}$ — minim, $c_{d\,med}$ — mediu sau $c_{d\,max}$ — maxim) față de rezistența tehnică de durată;

ϑ — unghiul de pantă, respectiv unghiul de înclinare (în coordonate logaritmice) al dreptelor $\sigma^t_d = \sigma^t_d(\tau)$;

$N = (\operatorname{tg}\vartheta)^{-1}$ — contrapanta (în coordonate logaritmice, a) dreptelor $\sigma^t_d = \sigma^t_d(\tau)$;

τ_{calc} — durata de serviciu de calcul, în h, ani etc.;

$\sigma^t_{d\,med}$ — valoarea medie a domeniului (benzii) de împrăștiere (dispersie) a tuturor rezultatelor experimentale determinate (și utilizate în calculele practice), pînă în prezent, pentru rezistența tehnică de durată σ^t_d normată (standardizată), în N/mm²;

$\sigma^t_{d\,min}$, $\sigma^t_{d\,max}$ — valoarea minimă (inferioară), respectiv valoarea maximă (superioară) a domeniului (benzii) de împrăștiere (dispersie) a rezultatelor experimentale determinate, pînă în prezent, pentru rezistența tehnică de durată σ^t_d normată (standardizată), în N/mm²;

$\Delta\tau_s$ — durata de serviciu disponibilă (efectivă) dincolo de durata de serviciu de calcul, în h, ani etc.

BIBLIOGRAFIE

1. C. Holzhauer, *La longévité prise comme élément fondamental de calcul des ouvrages se rapportant a la vapeur surchauffée*, APAVE, **49**, *162* (1968), p. 41—48.
2. W. Ruttmann, *Werkstoff im Dampfkesselbau und chemischen Apparatebau : Bedeutung der Anderung der Langzeitwerte in Dampfkesselbau*, Chemie Ingenieur Technik, **40**, *17* (1968), p. 863.
3. A. Pavel, *Posibilități de prelungire a duratei efective de serviciu, dincolo de durata de serviciu de calcul, la conductele calde tehnologice și termoenergetice*, Producerea, transportul și distribuția energiei electrice și termice, ODE—București, *5* (1970), p. 199—213.
4. A. Pavel, *Sécurité technique du fonctionnement des conduites chaudes technologiques et thermoénérgetiques audelà de la durée de service calculée*, Revue Roumaine des Sciences Techniques-Série de mécanique appliqués, **21**, *2* (1976), p. 277—295.
5. F. R. Larson, J. Miller, Trans. ASME, **74**, *5* (1952), p. 765.
6. A. Pavel, *Calculul mecanic al tubulaturii rectilinii a serpentinelor de reacție ale cuptoarelor tehnologice petrochimice*, Revista de chimie, **29**, *9* (1978), p. 877—886.
7. A. Pavel, *Elemente de inginerie mecanică și întreținerea utilajelor tehnologice petrochimice*. Vol. 1, fascicula 1. Ploiești, Institutul de petrol și gaze, 1976.
8. *Ergebnisse deutscher Zeitstandversuche langer Dauer*, Düsseldorf, Verlag Stahleisen M.B.H., 1969.

9. Colectiv ICEM — București, *Cercetări pentru caracterizarea tubulaturii din oțel ASTM A-200—66 Grad 22 utilizată pentru vehicularea unui mediu de hidrocarburi și hidrogen la temperaturi de* 490—530°C, București, Institutul de cercetări metalurgice (ICEM), 1976.
10. A. Pavel, *Materiale și rezistențe admisibile folosite în construcția de utilaje pentru industria petrolieră prelucrătoare și petrochimică*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1967.
11. A. Pavel, *Elemente de inginerie mecanică și întreținerea utilajelor tehnologice petrochimice.* Vol. I, fascicula 2. Ploiești, Institutul de petrol și gaze, 1976.
12. A. Pavel, *Oțelurile în construcția conductelor termoenergetice*, București, Oficiul de documentare energetică, 1971.
13. *ASME Boiler and pressure vessel code. Section II. Material specifications. Part. A-Ferrous*, ASME, New York, 1974 a. 1977.
14. *ASME Boiler and pressure vessel code. Section VIII. Rules for construction of pressure vessel*, Division 1, ASME, New York, 1974 a. 1977.
15. API RP 530, *API Recommended pratice for calculation of heater-tube thickness in petroleum refineries*, First Edition-October 1958, New York, 1958.
16. *ASTM—ASME Special Technical Publication No.151 : Report on the elevated-temperature properties of chromiummolybdenum steels*, ASTM, Philadelphia, 1953.
17. C4—73, *Prescripții tehnice pentru proiectarea, execuția, instalarea, exploatarea, repararea și verificarea recipientelor metalice stabile sub presiune*, București, Editura tehnică, 1974 și ISCIR, OID, 1978.
18. Colectiv ICEM — București, *Cercetări pentru caracterizarea tubulaturii din oțel ASTM A-200—66 Grad 22 utilizată pentru vehicularea unui mediu de hidrocarburi și hidrogen la temperaturi de* 490—530°C, București, Institutul de cercetări metalurgice (ICEM), 1976.
19. *Ruhrstahl. Warmfeste Stähle. Ruhrstahl A. G.*, Henrichshütte Hattinge, Ruhr, 1960.
20. Technischer Überwachungs Verein-Essen, *Techniche Vorschriften für Dampfkessel-Anlagen, Teil* 1 : *Werkstoffe*, Köln-Berlin, Carl Heymann Verlag A.G., 1960.
21. P. Aussum, *Vorschriften und Regeln der Technick für Druckgefässe* VEB, Halle (Saale), Wilhelm Knapp Verlag, 1959
22. W. Kuntscher ș.a., *Hilfs— und Nachschlagebuch Technishe Baustähle*, VEB, Halle (Saale), Wilhelm Knapp Verlag, 1958.
23. K. Wellinger ș.a., *Werkstoff-Tabellen der Metale*, Stuttgart, Alfred Kröner Verlag, 1972.
24. A. Pavel, *Elemente de inginerie mecanică și întreținerea utilajelor tehnologice petrochimice*, Vol. I + II, fascicula 3. Tabele, Ploiești, Institutul de petrol și gaze, 1977.

Felix Zandman, Salomon Redner, James W. Dally, PHOTOELASTIC COATINGS (Învelişuri fotoelastice*). Published jointly by The Iowa State University Press (Ames, Iowa), Society for Experimental Stress Analysis (Westport, Connecticut), 1977

Metoda învelişurilor fotoelastice (birefringente) este o extindere a fotoelasticităţii clasice sau tradiţionale (prin transmisie) la măsurarea deformaţiilor de pe suprafaţa structurilor bi- şi tri-dimensionale. De aceea ea se mai numeşte şi fotoelasticitatea prin reflexie.

Prezenta monografie, pe care o recenzăm, este publicată de către Comitetul societăţii pentru analiza experimentală a tensiunilor cu scopul de a furniza, în special inginerilor şi proiectanţilor, un mijloc eficient şi un ajutor în activitatea lor de proiectare a unor elemente constructive corespunzătoare din punct de vedere mecanic. Scrisă de un grup de autori binecunoscuţi prin activitatea lor în acest domeniu, cartea îşi îndeplineşte cu succes misiunea propusă.

Primele două capitole ale lucrării sînt dedicate fundamentelor metodei. Astfel, capitolul I (Proprietăţile luminii şi teoria elementară a fotoelasticităţii) se ocupă cu teoria generală a fotoelasticităţii valabilă atît fotoelasticităţii prin transmisie, cît şi fotoelasticităţii prin reflexie. În capitolul II (Teoria elementară a învelişurilor fotoelastice) se pleacă de la ipoteza transmiterii directe a deformaţiilor de la structură la stratul (învelişul) fotoelastic şi uniformitatea distribuţiei acestor deformaţii în sensul grosimii stratului. Cu acest model idealizat sînt obţinute relaţiile dintre deformaţiile principale în strat şi în structură, precum şi relaţiile reprezentînd răspunsul stratului fotoelastic la solicitarea structurii. Sînt date cîteva procedee privind separarea tensiunilor, printre care amintim metoda incidenţei oblice şi metoda integrării numerice.

Capitolul III (Materiale) se ocupă de proprietăţile materialelor folosite ca straturi fotoelastice, calibrarea şi selectarea acestor materiale precum şi tehnica aplicării straturilor.

În capitolul IV (Aparatura şi dispozitivele folosite) aparatul de bază care permite măsurarea deformaţiilor în stratul fotoelastic este aparatul de fotoelasticitate (polariscopul) prin reflexie. Cînd acest aparat este înzestrat şi cu sisteme optice corespunzătoare (aparat de fotografiat, sursă de lumină, compensatori etc.), el are următoarele posibilităţi :

a) Măsurarea în orice punct de pe suprafaţa stratului a direcţiilor principale ale deformaţiilor (parametrul izoclinelor), mărimea tensiunii (sau deformaţiei) tangenţiale maxime (izocromatele în incidenţă normală), precum şi mărimea şi semnul deformaţiilor principale (izocromatele în incidenţă oblică).

b) Măsurarea deformaţiilor statice şi dinamice atît în domeniul elastic, cît şi în cel plastic.

c) Cercetarea distribuţiei de deformaţii se poate face pe suprafeţe mari (cum ar fi aripile şi fuselajul avionului) şi pe suprafeţe mici (zonele unde apar concentrări de tensiuni).

d) Măsurătorile cantitative, obţinute relativ uşor, au aplicaţie în industrie şi realizează o precizie de măsurare foarte bună (2 grade pentru direcţiile deformaţiilor principale şi $\pm 10.10^{-6}$ m/m pentru mărimea deformaţiilor).

Aparatura produsă de firma Vishay, la care se referă în primul rînd monografia în discuţie, prezintă şi alte avantaje, de exemplu : adaptarea aparatului de bază la un dispozitiv stroboscopic sau la un dispozitiv cu fotocelulă pentru furnizarea de date observabile direct sau înregistrate ale fenomenului de deformare statică sau dinamică.

Capitolul V (Parametrii care influenţează analiza datelor) este o extindere a procedeelor analitice prezentate în cap. II, conţinînd influenţa unor parametri care afectează răspunsul stratului fotoelastic. Aceşti parametri se referă la influenţa grosimii stratului fotoelastic şi a nepotrivirii coeficienţilor lui Poisson ai stratului şi structurii studiate. Sînt stabiliţi factorii de corecţie corespunzători. Tot aici se mai studiază şi influenţa variaţiei deformaţiilor, a variaţiei de temperatură, precum şi a stării dinamice de tensiune asupra stratului fotoelastic.

În capitolul VI (Aplicaţii în industrie şi cercetarea ştiinţifică) sînt prezentate aplicaţiile tehnicilor învelişurilor fotoelastice la o largă gamă de probleme industriale de analiză experimentală a tensiunilor şi deformaţiilor. Cu toate acestea, din cauza spaţiului limitat al cărţii, unele exemple sînt tratate sumar, iar altele sînt omise. Printre exemplele prezentate amintim : aplicarea metodei la : studiul tensiunilor şi deformaţiilor statice şi dinamice din construcţiile aerospaţiale şi de pe suprafaţa vaselor de presiune, construcţii civile şi miniere, construcţia de maşini şi alte echipamente care se cer optimizate din punctul de vedere al rezistenţei lor şi al economiei de materiale, răşini epoxidice armate cu fibre de sticlă etc. Metoda este susceptibilă aplicării şi

* În literatura de specialitate românească, în locul cuvîntului „învelişuri" se poate găsi unul din cuvintele : „straturi", „acoperiri", „lacuri", semnificînd traducerea cuvîntului „coatings".

în cercetarea ştiinţifică fundamentală, lucrarea prezentînd ca exemple : determinarea deformaţiilor plastice, studiul propagării fisurilor, studiul concentrărilor de tensiuni în domeniul elastoplastic, studiul comportării materialelor compozite şi a altor fenomene dificile sau imposibil de analizat prin alte metode.

În ultimul capitol VII (Dezvoltări viitoare) autorii prezintă o serie de preocupări de perspectivă care se impun pentru dezvoltarea metodei învelişurilor fotoelastice. Printre acestea amintim preocupările privind găsirea unor materiale polimere birefringente cu proprietăţi mecanice şi optice variate, precum şi confecţionarea unor aparate şi dispozitive accesorii cu un grad de rezoluţie şi mai ridicat decît cele existente.

Monografia se încheie cu o listă cuprinzînd 63 de referinţe bibliografice (cărţi şi periodice) dintre cele mai reprezentative din lume în domeniul pe care-l abordează.

Teodor Huidu

N. POSEA, *Rezistenţa materialelor*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979, 814 p.

La baza proiectării economice şi raţionale a structurilor de rezistenţă stau atît concepţiile teoretice privind determinarea stărilor de tensiune şi stărilor de deformaţie şi ruperea materialelor, cît şi concepţiile de ordin practic privind dimensionarea optimă. Aceste concepţii sînt cuprinse în mecanica solidelor deformabile ; în practică, ele sînt predate în cadrul cursurilor universitare sub denumirea de rezistenţa materialelor.

Prof. Nicolae Posea, şeful Catedrei de discipline mecanice generale de la Institutul de petrol şi gaze din Ploieşti, prezintă un volum care depăşeşte cu mult cuprinsul obişnuit al unui curs de rezistenţa materialelor, fiind introduse şi o serie de probleme specifice altor discipline (statica construcţiilor, teoria elasticităţii, teoria plasticităţii, stabilitatea sistemelor elastice, teoria plăcilor curbe subţiri etc.) ; în felul acesta, studenţii cu profil mecanic (cărora le este destinat, în special, acest curs) pot să-şi formeze o cultură generală pentru calculul maşinilor şi utilajelor moderne pe care vor trebui să le conceapă şi să le realizeze.

Cartea este împărţită în 25 capitole şi anume : 1. Noţiuni fundamentale şi obiectul rezistenţei materialelor ; 2. Diagrame de eforturi la structuri static determinate alcătuite din bare ; 3. Grinzi cu zăbrele ; 4. Întindere şi compresiune simplă ; 5. Caracteristici geometrice ale suprafeţelor plane ; 6. Analiza stărilor de tensiune şi deformaţie. Energia potenţială de deformaţie ; 7. Teorii de rezistenţă ; 8. Încovoierea barelor drepte ; 9. Deformarea barelor solicitate la încovoiere. Sisteme static nedeterminate la încovoiere ; 10. Torsiunea ; 11. Solicitări compuse ; 12. Calculul deplasărilor la solicitări compuse ; 13. Teoria generală a sistemelor static nedeterminate ; 14. Calculul barelor în domeniul plastic ; 15. Flambajul barelor drepte ; 16. Bare curbe ; 17. Elemente de teoria elasticităţii ; 18. Solicitări variabile ; 19. Plăci plane circulare încărcate simetric ; 20. Calculul vaselor şi conductelor în teoria de membrană ; 21. Teoria de momente pentru rezervoare cilindrice încărcate simetric ; 22. Tuburi cu pereţi groşi şi discuri în rotaţie uniformă ; 23. Torsiunea barelor cu pereţi subţiri ; 24. Metoda elementului finit ; 25. Noţiuni introductive despre fluaj şi relaxare. Această sumară trecere în revistă pune în evidenţă cuprinsul foarte variat şi deosebit de bogat al acestei cărţi. În cele 13 anexe de la sfîrşit se dau unele elemente de calcul matriceal (care fac lucrarea independentă de alte lucrări), tabele şi diagrame.

Toate capitolele (chiar unele paragrafe) sînt urmate de probleme propuse, pentru care se dau indicaţii şi răspunsuri în anexă.

Bibliografia cuprinde 62 titluri.

Dintre cele mai importante probleme tratate menţionăm calculul eforturilor (atît prin metoda eforturilor, cît şi prin metoda deplasărilor), calculul tensiunilor şi calculul deplasărilor pentru structuri static determinate şi pentru structuri static nedeterminate ; fenomenelor de stabilitate şi vibraţii li se acordă, de asemenea, atenţia cuvenită.

Metodele matriceale de calcul, care pot conduce la calculul automat, sînt utilizate cu precădere, nu numai în cadrul metodei elementelor finite ci şi pentru calculul tuturor mărimilor care trebuie determinate.

Diferitele aspecte ale modelelor matematice utilizate sînt scoase mereu în evidenţă, se subliniază mereu ipotezele făcute, cititorul fiind astfel deprins să adapteze cunoştinţele căpătate şi la rezolvarea altor probleme cu care poate fi confruntat.

Lucrarea se adresează atît studenţilor din institutele de învăţămînt tehnic superior, cît şi inginerilor proiectanţi din domeniul construcţiilor civile şi industriale, construcţiilor de maşini, de nave, de avioane etc. ; prin conţinutul ei teoretic şi aplicativ, ea va deveni, cu siguranţă, o carte de referinţă.

P. P. Teodorescu, V. Ille

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 39, nr. 4 — iulie—august 1980

SUMAR

STUDII pag.

MIRCEA ARICIUC, Formularea problemei la limită în tensiuni în cazul modelului liniar al cristalelor moleculare cu structura complexă. Teorema de unicitate 467

VIOREL NICOLAE, VETURIA CHIROIU, Unde de suprafaţă într-un semispaţiu vîscoelastic stratificat 473

MIHAI POPESCU, Asupra unei reprezentări asimptotice privind integrarea ecuaţiei de mişcare a rachetei în mediu rezistent 485

AL. D. STAN, ER. DELLA-GIACOMO, Mişcarea nestaţionară printr-un spaţiu inelar 501

NGUYEN XUAN MINH, TEODOR OROVEANU, Asupra transportului prin conducte al petrolului brut saturat cu gaze 511

MIHAI BUCULEI, Ecuaţii de mişcare globale pentru multipolii elastocinematici ai mecanismelor plane 521

IOAN CRĂCIUN, Contribuţii la sinteza sistemelor în lanţ şi ramificate ce execută vibraţii de torsiune. II 535

IOSIF TEMPEA, Sinteza structurală a lanţurilor cinematice plane articulate cu $N=4$ contururi şi grad de libertate $L_3=5$ „total" sau „parţial" 543

ECATERINA BORCIA, Caracterizarea răspunsului principalelor tipuri de pămînturi la solicitări seismice. I. Caracterizarea proprietăţilor elastice şi disipative 559

N. TRUICĂ, M. MITRACHE, Un arc elicoidal cilindric cu rigiditate progresivă cu sarcina, destinat suspensiei Dacia 1302. II. Rezultate experimentale 571

ŞTEFAN STANCIU, Asupra utilizării regulatorului radial la lagăre radiale hidrostatice 583

GEORGE DOBRE, Calculul dimensiunilor flancării la o roată dinţată şi la cremaliera generatoare conjugată în cazul angrenajelor cilindrice cu dinţi drepţi 597

GL. ABRUDAN, GH. ACHIMAŞ, FL. CIŞMAŞIU, Stabilirea profilului de ieşire la matriţe destinate extrudării la cald a burghielor elicoidale 603

A. PAVEL, Evaluarea posibilităţii de prelungire a duratei efective de serviciu, dincolo de durata de serviciu de calcul la serpentinele de reacţie ale cuptoarelor tubulare tehnologice petrochimice. II 611

RECENZII 629

SUMAR

FORMULAREA PROBLEMEI LA LIMITĂ ÎN TENSIUNI ÎN CAZUL MODELULUI LINIAR AL CRISTALELOR MOLECULARE CU STRUCTURA COMPLEXĂ. TEOREMA DE UNICITATE

de MIRCEA ARICIUC
Institutul de construcții București

În lucrare se formulează problema la limită în tensiuni, în cadrul modelului liniar de tip Voigt-Duhem-Cosserat al cristalelor moleculare cu structură complexă, considerate omogene și izotrope din punct de vedere al răspunsului material, cazul dinamic și se demonstrează unicitatea soluției problemei formulate.

Există o vastă clasă de structuri cristaline formate din molecule care se caracterizează printr-o pronunțată izolare de natură geometrică și prin existența unor legături intramoleculare extrem de puternice. Structurile cristaline caracterizate de aceste proprietăți sînt numite cristale moleculare [5]. Din această largă clasă a cristalelor moleculare fac parte și majoritatea compușilor organici și după cum se afirmă în [5] se poate spune fără exagerare (făcînd abstracție de eventualele excepții nesemnificative) că între mecanica și fizica cristalelor moleculare și mecanica și fizica cristalelor organice se poate pune semnul identității. Proprietățile caracteristice ale structurii geometrice ale clasei menționate arată că fiecare moleculă a unui cristal molecular este geometric izolată, de unde rezultă că forțele corespunzătoare legăturilor intramoleculare sînt mult mai intense decît cele care corespund interacțiunilor intermoleculare. Moleculele cristalelor moleculare, în marea majoritate a cazurilor, sînt neutre din punct de vedere electric, de unde rezultă că interacțiunea dintre formațiunile caracteristice ale structurii considerate se realizează prin forțe de tip Van der Waals cu rază mică de acțiune în raport cu dimensiunile liniare ale cristalului [1]. Atît rezultatele experimentale, cît și cele teoretice arată că energia de interacțiune a moleculelor care formează structura cristalină considerată depinde considerabil atît de pozițiile reciproce ale centrelor de masă ale moleculelor, cît și de orientarea reciprocă a particulelor amintite. Este deci evident că în cazul cristalelor moleculare formate în general din molecule cu structură complexă, asimilarea moleculelor cu centre punctiforme de atracție sau respingere nu reprezintă o aproximare satisfăcătoare. În vederea elaborării unui model discret, continuu sau cvasicontinuu al acestor tipuri de materiale trebuie să ținem seama de proprietățile menționate ale elementelor constituente și să avem în vedere faptul că mișcările intramoleculare ale atomilor care formează moleculele cristalelor moleculare au amplitudini mult mai mici decît ampli-

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 4, 1980, P. 467–472

tudinile corespunzătoare mișcărilor centrelor de masă ale moleculelor și mișcărilor care caracterizează rotațiile acestor molecule în jurul centrelor lor de masă. Faptele geometrice, cinematice și dinamice menționate mai sus arată că în marea majoritate a cazurilor, cristalele moleculare pot fi privite ca fiind sisteme cristaline formate din molecule rigide cu șase grade de libertate, parametri cinematici ai unei molecule fiind componentele vectorului care caracterizează deplasările centrului de masă a moleculei și componentele unui vector axial care descrie orientarea moleculei în spațiu.

Conform datelor experimentale, cu excepția unui strat extrem de subțire situat în vecinătatea frontierei corpului, cristalele moleculare au o structură periodică regulată, care poate fi descrisă cu ajutorul unei rețele Bravais complexe [4].

Corpul la care ne referim este deci un cristal molecular finit cu structură complexă periodică, format din N celule de tip Bravais, în fiecare celulă găsindu-se $P+1$ particule de natură diferită, aceste particule pot fi atomi sau molecule neutre din punct de vedere electric, în consecință forțele care acționează între ele sînt forțe de tip Van der Waals, cu rază mică de acțiune în raport cu dimensiunile liniare ale cristalului, particulele fiind înzestrate cu șase grade de libertate, trei corespunzînd mișcării de translație, iar trei mișcării de rotație. Folosind aceste fapte și avînd în vedere numai acele elemente ale clasei considerate, care pot fi caracterizate geometric cu ajutorul unei rețele tridimensionale Bravais complexă, în [1] am elaborat un model discret de tip Voigt-Duhem-Cosserat, în [2] am elaborat un model continuu neliniar, iar în [3] am obținut modelul continuu liniar în cazul cristalului omogen și izotrop. Făcînd legătura între modelul continuu liniar și modelul cvasi-continuu, obținut prin continuizarea modelului discret, reiese că în domeniul undelor acustice foarte lungi, comportarea cristalelor moleculare, supuse la mici deformații, poate fi descrisă satisfăcător cu ajutorul unui model continuu liniar de tip Voigt-Duhem-Cosserat, elaborat pe baza unei densități de energie a deformației care depinde pe lîngă mărimile cinematice care descriu cristalul molecular cu structură complexă și de gradientul spațial de primul ordin al vectorului care descrie deplasările de translație a centrului de masă a particulelor dintr-o celulă.

Ecuațiile care caracterizează modelul liniar al unui astfel de corp, conform lui [3] sînt :

$$\begin{cases} \rho \ddot{u}_k = T_{kl,l} + f_k , & j \ddot{\Phi}_k = H_k + g_k , \\ \underset{\alpha\beta}{\rho}\ \underset{\beta}{\ddot{u}_k} = -\underset{\alpha}{T_k} + \underset{\alpha}{f_k} , & \underset{\alpha\beta}{j}\ \underset{\beta}{\ddot{\Phi}_k} = \underset{\alpha}{H_k} + \underset{\alpha}{g_k} , \end{cases} \tag{1}$$

$$T_{kl}\ n_l = T_k , \tag{2}$$

$$U = \frac{1}{2}\tilde{\lambda} e_{kk}\, e_{ll} + \tilde{\mu}\, e_{kl}\, e_{kl} + \frac{1}{2} c\, \varphi_k\, \varphi_k + \frac{1}{2}\ \underset{\alpha\beta}{a}\ \underset{\alpha}{w_k}\ \underset{\beta}{w_k} + \underset{\alpha}{d}\ \varphi_k\ \underset{\alpha}{\Phi_k} + \tag{3}$$

$$+ \frac{1}{2}\ \underset{\alpha\beta}{c}\ \underset{\alpha}{\Phi_k}\ \underset{\beta}{\Phi_k} ,$$

$$\begin{cases} T_{kl} = \lambda\, e_{mm}\ \delta_{kl} + 2\,\tilde{\mu}\, e_{kl} + \delta_{[kK}\underset{\alpha}{X_K}\ \underset{\alpha}{T_{l]}} + e_{klm}\, H_m\,, \\ \underset{\alpha}{T_k} = \underset{\alpha\beta}{a}\ \underset{\beta}{w_k}\,, \\ H_k = c\,\varphi_k + \underset{\alpha}{d}\ \underset{\alpha}{\Phi_k}\,, \\ \underset{\alpha}{H_k} = \underset{\alpha}{d}\ \varphi_k + \underset{\alpha\beta}{c}\ \underset{\beta}{\Phi_k}\,, \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} e_{kl} = \frac{1}{2}\,(u_{k,l} + u_{l,k})\,, \quad \omega_{kl} = \frac{1}{2}\,(u_{k,l} - u_{l,k}), \\ \underset{\alpha}{w_k} = \underset{\alpha}{u_k} - \omega_{kl}\ \underset{\alpha}{X_l}\,, \quad \underset{\alpha}{E_k} = e_{kl}\ \underset{\alpha}{X_l} + \underset{\alpha}{w_k}\,, \\ k_{kl} = e_{kl} + \varphi_{kl}\,, \quad \varphi_{kl} = \Phi_{kl} - \omega_{kl}\,, \\ \Phi_k = -\,e_{klm}\,\Phi_{lm}\,, \quad \varphi_k = -\,e_{klm}\ \varphi_{lm}\,, \ \underset{\alpha}{\Phi_k} = -\,e_{klm}\ \underset{\alpha}{\Phi_{lm}}\,. \end{cases} \tag{5}$$

Mărimile care apar în relațiile (1) — (5) au semnificația mecanică din [1], [2], [3], de asemenea am folosit relația de însumare a lui Einstein pentru indicii latini, iar indicii grecești iau valori de la 1 la P.

Pentru rezolvarea unei probleme la limită în tensiuni, în cazul dinamic, în cadrul modelului continuu liniar de tip Voigt-Duhem-Cosserat al cristalului molecular cu structură complexă, mai presupunem următoarele :

Fie $\mathcal{D} + \Gamma$ o regiune regulată în sensul lui Kellog a spațiului cu frontieră Γ și fie $f_k(\vec{x}, t)$, $\underset{\alpha}{f_k}\,(\vec{x}, t)$, $g_k\,(\vec{x}, t)$ și $\underset{\alpha}{g_k}\,(\vec{x}, t)$ funcții de clasă C° pentru $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D}$ și $0 \leqslant t$, fie $T_k\,(\vec{x}, t)$ funcții date de clasă C° pentru $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D}$, și fie $U_k\,(\vec{x})$, $V_k(\vec{x})$, $\underset{\alpha}{U_k}\,(\vec{x})$, $\underset{\alpha}{V_k}(\vec{x})$, $U_{kl}\,(\vec{x})$, $V_{kl}\,(\vec{x})$, $\underset{\alpha}{U_{kl}}\,(\vec{x})$, $\underset{\alpha}{V_{kl}}\,(\vec{x})$, funcții date de clasă C° pentru $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D}$. Problema la limită în tensiuni, în cazul dinamic, constă în determinarea funcțiilor T_{kl}, $\underset{\alpha}{T_k}$, H_k, $\underset{\alpha}{H_k}$, e_{kl}, $\underset{\alpha}{w_k}$, φ_k și $\underset{\alpha}{\Phi_k}$ de clasă C^1 pentru $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D}$ și $0 \leqslant t$, a funcțiilor $u_k\,(\vec{x}, t)$ de clasă C^2 pentru $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D} + \Gamma$ și $0 \leqslant t$, și a funcțiilor $\underset{\alpha}{u_k}\,(\vec{x}, t)$, $\Phi_{kl}\,(\vec{x}, t)$, $\underset{\alpha}{\Phi_{kl}}\,(\vec{x}, t)$ de clasă C^1 în raport cu x_1, x_2, x_3 și de clasă C^2 în raport cu t pentru $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D} + \Gamma$ și $0 \leqslant t$ care satisfac ecuațiile de mișcare (1).

Funcțiile pe care trebuie să le determinăm, vor trebui să satisfacă condițiile la limită (2), ecuațiile constitutive (4), relațiile geometrice (5), precum

și următoarele condiții inițiale :

$$\begin{cases} u_k(\vec{x}, 0) = U_k(\vec{x}), & \dot{u}_k(\vec{x}, 0) = V_k(\vec{x}), \\ \underset{\alpha}{u_k}(\vec{x}, 0) = \underset{\alpha}{U_k}(\vec{x}), & \underset{\alpha}{\dot{u}_k}(\vec{x}, 0) = \underset{\alpha}{V_k}(\vec{x}), \\ \Phi_{kl}(\vec{x}, 0) = U_{kl}(\vec{x}), & \dot{\Phi}_{kl}(\vec{x}, 0) = V_{kl}(\vec{x}), \\ \underset{\alpha}{\Phi_{kl}}(\vec{x}, 0) = \underset{\alpha}{U_{kl}}(\vec{x}), & \underset{\alpha}{\dot{\Phi}_{kl}}(\vec{x}, 0) = \underset{\alpha}{V_{kl}}(\vec{x}). \end{cases} \tag{6}$$

TEOREMĂ. *Problema la limită în tensiuni, în cazul modelului liniar, caz dinamic, are soluție unică, dacă densitatea energiei de deformație U din* (3) *este o formă pătratică pozitiv definită.*

Demonstrație. Pentru demonstrarea teoremei de unicitate să observăm că din relațiile (4), care dau ecuațiile constitntive ale modelului, și din expresia densității de energie a deformației în cazul corpului omogen și izotrop (3) rezultă următoarea formă pentru U :

$$U = \frac{1}{2} T_{kl} e_{kl} + \frac{1}{2} \underset{\alpha}{T_k} \underset{\alpha}{W_k} + \frac{1}{2} H_k \varphi_k + \frac{1}{2} \underset{\alpha}{H_k} \underset{\alpha}{\Phi_k}, \tag{7}$$

care este o formă pătratică pozitiv definită, deoarece în urma deformării, orice porțiune a corpului înmagazinează energie.

În cazul corpului de care ne ocupăm, presupus fiind omogen și izotrop din punct de vedere al răspunsului material, energia cinetică are următoarea formă [2] :

$$T = \frac{1}{2} \rho v_k v_k + \frac{1}{2} \underset{\alpha\beta}{\rho} \underset{\alpha}{v_k} \underset{\beta}{v_k} + \frac{1}{2} j \dot{\Phi}_k \dot{\Phi}_k + \frac{1}{2} \underset{\alpha\beta}{j} \underset{\alpha}{\dot{\Phi}_k} \underset{\beta}{\dot{\Phi}_k}. \tag{8}$$

Ținînd seama de (1), (2), (4) și de forma (7) a densității energiei de deformare, rezultă următoarea lege globală de conservare a energiei mecanice :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\mathcal{D}} \left[\rho \frac{v_k v_k}{2} + \underset{\alpha\beta}{\rho} \frac{\underset{\alpha}{v_k} \underset{\beta}{v_k}}{2} + j \frac{\dot{\Phi}_k \dot{\Phi}_k}{2} + \underset{\alpha\beta}{j} \frac{\underset{\alpha}{\dot{\Phi}_k} \underset{\beta}{\dot{\Phi}_k}}{2} + U \right] \mathrm{d}V = \tag{9}$$

$$= \int_{\mathcal{D}} [f_k v_k + \underset{\alpha}{f_k} \underset{\alpha}{v_k} + g_k \dot{\Phi}_k + \underset{\alpha}{g_k} \underset{\alpha}{\dot{\Phi}_k}] \mathrm{d}V + \int_{\Gamma} T_k v_k \, \mathrm{d}S.$$

Vom presupune că problema la limită formulată ar avea două soluții : $u_k^{(1)}(\vec{x}, t)$, $\underset{\alpha}{u_k^{(1)}}(\vec{x}, t)$, $\Phi_k^{(1)}(\vec{x}, t)$, $\underset{\alpha}{\Phi_k^{(1)}}(\vec{x}, t)$ respectiv $u_k^{(2)}(\vec{x}, t)$, $u_k^{(2)}(\vec{x}, t)$, $\Phi_k^{(2)}(\vec{x}, t)$ $\underset{\alpha}{\Phi_k^{(2)}}(\vec{x}, t)$ și să notăm cu $u_k^*(\vec{x}, t)$, $\underset{\alpha}{u_k^*}(\vec{x}, t)$, $\Phi_k^*(\vec{x}, t)$, $\underset{\alpha}{\Phi_k^*}(\vec{x}, t)$ soluția

problemei la limită construită astfel :

$$\begin{cases} u_k^*(\vec{x}, t) = u_k^{(1)}(\vec{x}, t) - u_k^{(2)}(\vec{x}, t), \\ \underset{\alpha}{u_k^*}(\vec{x}, t) = \underset{\alpha}{u_k^{(1)}}(\vec{x}, t - u_k^{(2)}(\vec{x}, t), \\ \Phi_k^*(\vec{x}, t) = \Phi_k^{(1)}(\vec{x}, t) - \Phi_k^{(2)}(\vec{x}, t), \\ \underset{\alpha}{\Phi_k^*}(\vec{x}, t) = \underset{\alpha}{\Phi_k^{(1)}}(\vec{x}, t) - \underset{\alpha}{\Phi_k^{(2)}}(\vec{x}, t) . \end{cases} \tag{10}$$

Avînd în vedere ecuațiile (1), (2), (4), (5), (6) pentru densitatea energiei de deformație U^* care corespunde funcțiilor $u_k^*(\vec{x}, t)$, $\underset{\alpha}{u_k^*}(\vec{x}, t)$ $\Phi_k^*(\vec{x}, t)$, $\underset{\alpha}{\Phi_k^*}(\vec{x}, t)$, vom obține o relație asemănătoare pentru legea de conservare a energiei mecanice cu (9), în care membrul drept este indentic nul, adică

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}}\left[\rho\frac{v_k^* v_k^*}{2} + \underset{\alpha\beta}{\rho}\frac{\underset{\alpha}{v_k^*}\underset{\beta}{v_k^*}}{2} + j\frac{\dot{\Phi}_k^*\dot{\Phi}_k^*}{2} + \underset{\alpha\beta}{j}\frac{\underset{\alpha}{\dot{\Phi}_k^*}\underset{\beta}{\dot{\Phi}_k^*}}{2} + U^*\right]dV = 0. \tag{11}$$

Relația (11) arată că valoarea integralei din membrul stîng a egalității precedente nu depinde de timp, rezultă că această valoare se reduce la o constantă în raport cu t. Ținînd seama de faptul că $v_k^*(\vec{x}, 0) = 0$, $\underset{\alpha}{v_k^*}(\vec{x}, 0) = 0$, $\dot{\Phi}_k^*(\vec{x}, 0) = 0$, $\underset{\alpha}{\dot{\Phi}_k^*}(\vec{x}, 0) = 0$, $e_{kl}^*(\vec{x}, 0) = 0$, $\underset{\alpha}{w_k^*}(\vec{x}, 0) = 0$, relații care rezultă din (10) și din (5), avem că $U^*(\vec{x}, 0) = 0$. Astfel am arătat că constanta menționată în raport cu t, care era o funcție de $\vec{x}$ este identic nulă și avem :

$$\int_{\mathcal{D}}\left[\rho\frac{v_k^* v_k^*}{2} + \underset{\alpha\beta}{\rho}\frac{\underset{\alpha}{v_k^*}\underset{\beta}{v_k^*}}{2} + j\frac{\dot{\Phi}_k^*\dot{\Phi}_k^*}{2} + \underset{\alpha\beta}{j}\frac{\underset{\alpha}{\dot{\Phi}_k^*}\underset{\beta}{\dot{\Phi}_k^*}}{2} + U^*\right]dV = 0. \tag{12}$$

Avînd în vedere faptul că ρ, $\underset{\alpha\beta}{\rho}$, j, $\underset{\alpha\beta}{j}$ sînt constante pozitive, iar U este o formă pătratică pozitiv definită, rezultă că relația (12) poate fi satisfăcută, dacă și numai dacă :

$$U^*(\vec{x}, t) = 0 \tag{13}$$

pentru orice $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D}$ și orice t pentru care $0 \leqslant t$. $U^*(\vec{x}, t)$ fiind o formă pătratică pozitiv definită, rezultă că relația (13) poate fi satisfăcută atunci și numai atunci cînd:

$$e^*_{kl}(\vec{x}, t) = 0, \quad \underset{\alpha}{w^*_k}(\vec{x}, t) = 0, \quad \Phi^*_k(\vec{x}, t) = 0 \quad \underset{\alpha}{\Phi^*_k}(\vec{x}, t) = 0, \tag{14}$$

pentru orice $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D}$ și pentru orice t cu $0 \leqslant t$.

Din relațiile (5) și din faptul că $u^*_k(\vec{x}, 0) = 0$, $\underset{\alpha}{u^*_k}(\vec{x}, 0) = 0$, $\Phi^*_k(\vec{x}, 0)$ $\underset{\alpha}{\Phi^*_k}(\vec{x}, 0) = 0$, rezultă că relațiile (14) pot fi satisfăcute atunci și numai atunci cînd avem:

$$u^*_k(\vec{x}, t) = 0, \quad \underset{\alpha}{u^*_k}(\vec{x}, t) = 0, \quad \Phi^*_k(\vec{x}, t) = 0, \quad \underset{\alpha}{\Phi^*_k}(\vec{x}, t) = 0, \tag{15}$$

pentru orice $(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D}$ și pentru orice t cu $0 \leqslant t$.

Din relațiile (15) rezultă că:

$$\begin{cases} u^{(1)}_k(\vec{x}, t) = u^{(2)}_k(\vec{x}, t), \\ \underset{\alpha}{u^{(1)}_k}(\vec{x}, t) = \underset{\alpha}{u^{(2)}_k}(\vec{x}, t), \\ \Phi^{(1)}_k(\vec{x}, t) = \Phi^{(2)}_k(\vec{x}, t), \\ \underset{\alpha}{\Phi^{(1)}_k}(\vec{x}, t) = \underset{\alpha}{\Phi^{(2)}_k}(\vec{x}, t). \end{cases} \tag{16}$$

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Observație. Așa cum am mai menționat, datorită faptului că în urma unei deformări reale, orice porțiune a solidului înmagazinează energie, densitatea energiei de deformare U este, într-adevăr, o formă pătratică pozitiv definită, dar valorile constantelor de material în cazul nostru al modelului liniar, omogen și izotrop, $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, c, d, $\underset{\alpha}{a}$, $\underset{\alpha\beta}{c}$, nu pot fi arbitrare, ele fiind supuse la anumite restricții.

Primită la redacție la 7 martie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. M., Ariciuc, E., Soós, *Un model discret de tip Voigt-Duhem-Cosserat al cristalelor moleculare cu structură complexă*, St. cerc. mat., **28**, *1*, p. 9–30 (1976).
2. M., Ariciuc, E., Soós, *Un model continuu neliniar de tip Voigt-Duhem-Cosserat al cristalelor moleculare cu structură complexă*, St. cerc. mat., **27**, *6*, p. 627–650 (1975).
3. M. Ariciuc, E. Soós, *Un model continuu liniar de tip Voigt-Duhem-Cosserat al cristalelor moleculare cu structură complexă. Legătura între modelul discret și modelul continuu* St. cerc. mat., **27**, *5*, p. 507–513 (1975).
4. M. Born, K. Huang, *Dynamical theory of crystal lattices*, Clarendon Press, Oxford, 1954.
5. А. И. Китайгородский, *Молекулярные кристаллы*, Изд. Наука, Москва, 1971.

UNDE DE SUPRAFAȚĂ ÎNTR-UN SEMISPAȚIU VÎSCOELASTIC STRATIFICAT

de VIOREL NICOLAE și VETURIA CHIROIU

Institutul de fizică și tehnologia materialelor, București

Lucrarea studiază problema propagării undelor de suprafață în medii vîscoelastice stratificate. Reducînd ecuațiile de mișcare la două sisteme matriceale diferențiale corespunzătoare undelor Love și undelor Rayleigh pe un strat oarecare, se scrie soluția pe întreg semispațiul prin racordarea deplasărilor și a tensiunilor normale pe suprafețele de separație dintre straturi. Se dă o metodă de determinare a vitezelor de propagare a undelor Rayleigh și Love.

1. INTRODUCERE

Propagarea undelor de suprafață în medii stratificate de tipul pămîntului, cu implicații importante în seismologie, pun în evidență capacitatea mediului de a transporta energie la distanțe mari de sursă. Mișcarea la suprafața mediului constă fie într-o mișcare transversală fără componentă verticală (unde Love), fie într-o mișcare eliptică transversală (unde Rayleigh). Problema propagării undelor de suprafață în medii stratificate elastice a fost studiată de Takeuchi și Saito [1]. O monografie privind studiul matematic al problemelor de seismologie a fost elaborată de R. Burridge [2].

În această lucrare se formulează problema propagării undelor de suprafață în medii stratificate, adică în semispațiul infinit ale cărui proprietăți fizico-mecanice depind numai de una din coordonate.

Considerăm semispațiul vîscoelastic raportat la un sistem cartezian de coordonate $Ox_1x_2x_3$ avînd originea pe suprafața liberă, iar axa Ox_3 perpendiculară pe ea. În problemele de geofizică planul Ox_1x_2 este suprafața pămîntului, iar axa Ox_3 este verticală și orientată în jos. Avînd în vedere că în practică structura geofizică este cunoscută pînă la o adîncime H, se modelează mediul stratificat ca fiind format din N straturi vîscoelastice omogene și izotrope așezate pe un semispațiu cu proprietăți similare. Desigur că această modelare aplicată unei configurații geofizice reale date, presupune calcularea unor constante medii ale mediului prin echivalări energetice.

2. SISTEMUL DE ECUAȚII

Ecuațiile de mișcare sînt următorele

$$\sigma_{kl,l} = \rho \ddot{u}_k . \tag{2.1}$$

Ecuațiile constitutive tridimensionale corespunzătoare modelului Kelvin-Voigt pentru un strat oarecare considerat omogen și izotrop sînt [3]:

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 3K(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),$$

$$\left(\sigma_{kl} - \frac{1}{3}\,\sigma_{mm}\,\delta_{kl}\right) = 2\,G\left(1 + \tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\left(\varepsilon_{kl} - \frac{1}{3}\,\varepsilon_{mm}\,\delta_{kl}\right), k, l = 1,2,3, \tag{2.2}$$

unde K este modulul compresibilității elastice, G este modulul de elasticitate transversal, iar τ este timpul de întîrziere.

Ecuațiile (2.2) se mai pot scrie sub forma

$$\frac{1}{2\,G}\;\sigma_{kl} = \left(\frac{\nu}{1-2\nu} - \frac{\tau}{3}\frac{d}{\mathrm{d}t}\right)(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\,\delta_{kl} +$$

$$+\left(1 + \tau\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\varepsilon_{kl}, \quad k, l = 1,2,3, \tag{2.3}$$

unde ν este coeficientul lui Poisson.

Presupunem că starea de deplasări u_k, $k = 1,2,3$, și starea de tensiuni σ_{kl}, $k, l = 1, 2, 3$, au forma:

$$u_1 = \mathrm{Re}\,\{U_1(x_3)\,exp\,[\mathrm{i}\,(\omega\,t - a x_1)]\},$$

$$u_2 = \mathrm{Re}\,\{U_2(x_3)\,exp\,[\mathrm{i}\,(\omega\,t - a'\,x_1)]\}, \tag{2.4}$$

$$u_3 = \mathrm{Re}\,\{U_3(x_3)\,exp\,[\mathrm{i}(\omega\,t - a x_1)]\},$$

$$\sigma_{kl} = \mathrm{Re}\,\{T_{kl}(x_3)\,exp\,[\mathrm{i}(\omega t - a x_1)], \quad k, l = 1,2,3,$$

$$(k, l) \neq (1,2), (k, l) \neq (2,3),$$

$$\sigma_{12} = \mathrm{Re}\,\{T_{12}(x_3)\,exp\,[\mathrm{i}(\omega\,t - a' x_1)], \tag{2.5}$$

$$\sigma_{23} = \mathrm{Re}\,\{T_{23}(x_3)\,exp\,[\mathrm{i}(\omega\,t - a' x_1)].$$

unde a și a' sînt două numere reale reprezentînd numerele de undă, iar ω este un număr complex. Partea reală a lui, ω_1, reprezintă pulsația undelor iar partea imaginară h arată că amplitudinile descresc în timp, ca e^{-ht}. În reprezentarea de mai sus s-a presupus că toate mărimile sînt independente de coordonata x_2, iar reprezentările $2.5)_2$ și $(2.5)_3$ s-au considerat

compatibile conform ecuațiilor constitutive (2.3) cu cîmpul de deplasări $(2.4)_2$. Introducînd reprezentările (2.4), (2.5) în ecuațiile de echilibru (2.1) și în ecuațiile constitutive (2.3), obținem

$$
\begin{aligned}
&-\mathrm{i}\,a\,T_{11} + T_{13,3} = -\rho\,\omega^2\,U_1,\\
&-\mathrm{i}\,a\,T_{13} + T_{33,3} = -\rho\,\omega^2\,U_3\,,\\
&-\mathrm{i}\,a'\,T_{12} + T_{23,3} = -\rho\,\omega^2\,U_2\,,
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2G}\,T_{11} = -\mathrm{i}\,a\,\alpha\,U_1 + \beta\,U_{3,3}\,,\\
&\frac{1}{2G}\,T_{33} = -\mathrm{i}\,a\,\beta\,U_1 + \alpha\,U_{3,3},\\
&\frac{1}{G}\,T_{13} = (1+\mathrm{i}\,\omega\,\tau)\,(-\mathrm{i}\,a\,U_3 + U_{1,3}),\\
&\frac{1}{G}\,T_{12} = (1+\mathrm{i}\,\omega\tau)\,(-\mathrm{i}\,a')\,U_2, \frac{1}{G}\,T_{23} = (1+\mathrm{i}\,\omega\,\tau)\,U_{2,3}\,,
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

unde am notat

$$
\begin{aligned}
&\alpha = \frac{1-\nu}{1-2\,\nu} + \frac{2}{3}\,\mathrm{i}\,\omega\,\tau, \qquad \beta = \frac{\nu}{1-2\,\nu} - \frac{1}{3}\,\mathrm{i}\omega\,\tau,\\
&\gamma = \alpha^2 - \beta^2 = \left(\frac{1}{1-2\,\nu} + \frac{1}{3}\,\mathrm{i}\,\omega\,\tau\right)(1+\mathrm{i}\,\omega\,\tau).
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Relațiile $(2.6)_3$, $(2.7)_4$ și $(2.7)_5$ formează următorul sistem de ecuații:

$$
\begin{aligned}
&U_{2,3} = \frac{1}{G(1+\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\,T_{23}\,,\\
&T_{23,3} = -\rho\,\omega^2\,U_2 + \mathrm{i}\,a'\,T_{12} = [a'^2\,(1+\mathrm{i}\,\omega\,\tau) - \rho\,\omega^2]\,U_2.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Notînd necunoscutele

$$
\mathbf{v} = \left\| \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} U_2 \\ T_{23} \end{matrix} \right\|, \tag{2.10}
$$

sistemul capătă forma

$$\partial_3 \begin{Vmatrix} v_1 \\ \\ v_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{1}{G(1+\mathrm{i}\,\omega\,\tau)} \\ \\ a'^2 G(1+\mathrm{i}\,\omega\,\tau)-\rho\,\omega^2 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} v_1 \\ \\ v_2 \end{Vmatrix}. \tag{2.11}$$

Din primele două relaţii (2.7) rezultă

$$-2G\gamma\,\mathrm{i}\,a\,U_1 = \alpha\,T_{11} - \beta\,T_{33}. \tag{2.12}$$

Explicitînd T_{11} din această relaţie şi introducînd-o în relaţia $(2.6)_1$ rezultă

$$T_{13,3} = \left(\frac{2G\gamma}{\alpha}\,a^2 - \rho\,\omega^2\right) U_1 + \frac{\beta}{\alpha}\,\mathrm{i}\,a\,T_{33}. \tag{2.13}$$

Introducem următoarele notaţii:

$$\mathbf{y} = \begin{Vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \mathrm{i}\,U_1 \\ T_{33} \\ U_3 \\ \mathrm{i}T_{13} \end{Vmatrix}. \tag{2.14}$$

Relaţiile $(2.7)_2$ şi (2.13) în noile notaţii se scriu

$$y_{3,3} = \frac{a\beta}{\alpha}\,y_1 + \frac{1}{2G\alpha}\,y_2,$$

$$y_{4,3} = \left(\frac{2G\gamma}{\alpha}\,a^2 - \rho\,\omega^2\right) y_1 - \frac{a\beta}{\alpha}\,y_2. \tag{2.15}$$

Din $(2.7)_3$ şi $(2.6)_2$ rezultă relaţia

$$U_{1;3} = \mathrm{i}\,a\,U_3 + \frac{1}{G(1+\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\,T_{13}, \tag{2.16}$$

care, împreună cu $(2.6)_2$, devin

$$y_{1,3} = -a\,y_3 + \frac{1}{G(1+\mathrm{i}\,\omega\,\tau)}\,y_4,$$

$$y_{2;3} = -\rho\,\omega^2 y_3 + a\,y_4. \tag{2.17}$$

Ecuațiile (2.15) și (2.17) formează un sistem de forma

$$\mathbf{y}_{,3} = \mathbf{A}\,\mathbf{y}, \tag{2.18}$$

unde am notat prin $\mathbf{A}$ matricea

$$\mathbf{A} = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & -a & \dfrac{1}{G(1+\mathrm{i}\,\omega\,\tau)} \\ 0 & 0 & -\rho\,\omega^2 & a \\ \dfrac{a\,\beta}{\alpha} & \dfrac{1}{2\,G\,\alpha} & 0 & 0 \\ \dfrac{2\,G\,\gamma}{\alpha}\,a^2 - \rho\,\omega^2, & -\dfrac{a\,\beta}{\alpha} & 0 & 0 \end{array} \right\|. \tag{2.19}$$

Introducem notațiile

$$\gamma_P^2 = \frac{\rho}{2G\,\alpha}, \quad \mathrm{Re}\ \gamma_P > 0,$$

$$\gamma_S^2 = \frac{\rho}{G(1+\mathrm{i}\omega\tau)}, \quad \mathrm{Re}\ \gamma_S > 0,$$

$$\nu_P^2 = a^2 - \frac{\rho}{2G\alpha}\,\omega^2, \quad \mathrm{Re}\ \nu_P > 0, \tag{2.20}$$

$$\nu_S^2 = a^2 - \frac{\rho}{G(1+\mathrm{i}\,\omega\tau)}\,\omega^2, \quad \mathrm{Re}\ \nu_S > 0,$$

$$\nu_S'^2 = a'^2 - \frac{\rho}{G\,(1+\mathrm{i}\omega\tau)}\,\omega^2, \quad \mathrm{Re}\ \nu_S' > 0.$$

Sistemul de ecuații (2.11) are soluția generală de forma

$$\mathbf{v} = A\,\mathbf{v}_1\,\mathrm{e}^{-\nu_S' x_3} + B\,\mathbf{v}_2\,\mathrm{e}^{\nu_S' x_3},$$

$$\mathbf{v}_1 = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ -\nu_S'\,G\,(\alpha-\beta) \end{array} \right\|, \quad \mathbf{v}_2 = \left\| \begin{array}{c} 1 \\ \nu_S'\,G\,(\alpha-\beta) \end{array} \right\|. \tag{2.21}$$

De asemenea, sistemul de ecuații (2.19) are soluția generală de forma

$$\mathbf{y} = A\,\mathbf{w}_1\,\mathrm{e}^{\nu_P' x_3} + B\,\mathbf{w}_2\,\mathrm{e}^{\nu_P x_3} + C\,\mathbf{w}_3\,\mathrm{e}^{-\nu_S x_3} + D\,\mathbf{w}_4\,\mathrm{e}^{\nu_S x_3},$$

$$\mathbf{w}_1 = \begin{Vmatrix} a \\ 2G(\alpha-\beta)\left(a^2 - \frac{1}{2}\omega^2\gamma_S^2\right) \\ -\nu_P \\ -2G(\alpha-\beta)\,a\,\nu_P \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{Vmatrix} a \\ 2G(\alpha-\beta)\left(a^2 - \frac{1}{2}\omega^2\gamma_S^2\right) \\ \nu_P \\ 2G(\alpha-\beta)\,a\,\nu_P \end{Vmatrix},$$

(2.22)

$$\mathbf{w}_3 = \begin{Vmatrix} -\nu_S \\ -2G(\alpha-\beta)\,a\,\nu_S \\ a \\ 2G(\alpha-\beta)\left(a^2 - \frac{1}{2}\omega^2\gamma_S^2\right) \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{w}_4 = \begin{Vmatrix} \nu_S \\ 2G(\alpha-\beta)\,a\nu_S \\ a \\ 2G(\alpha-\beta)\left(a^2 - \frac{1}{2}\omega^2\gamma_S^2\right) \end{Vmatrix}.$$

În relațiile (2.21) și (2.22) constantele A, B, C, D sînt deocamdată arbitrare.

3. CONDIȚII LA LIMITĂ. VITEZA DE GRUP

Mediul stratificat este format din N straturi, avînd diferite grosimi și diferite constante vîscoelastice, așezate pe semispațiul vîscoelastic. Identificăm x_3 cu z. Configurația straturilor este arătată în figura 1.

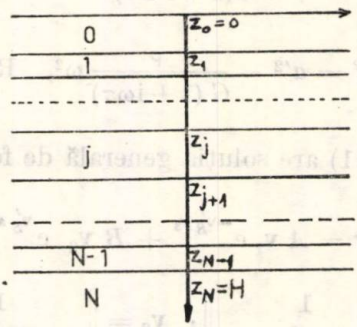


Fig. 1

Constantele fizico-mecanice corespunzătoare fiecărui strat, cît și soluțiile sistemelor de ecuații se notează cu indicele stratului respectiv pus în paranteze.

Condițiile la limită se consideră astfel ca pe suprafața $z = 0$ să nu existe tensiuni, deci

$$v_2^{(0)} = 0 \qquad \text{pentru } z = 0,$$

$$y_2^{(0)} = y_4^{(0)} = 0 \qquad \text{pentru } z=0. \tag{3.1}$$

De asemenea, tensiunile tind către 0 cînd $z \to \infty$, astfel încît

$$\lim_{z\to\infty} v_2^{(N)} = 0,$$

$$\lim_{z\to\infty} y_2^{(N)} = \lim_{z\to\infty} y_4^{(N)} = 0. \tag{3.2}$$

Soluția generală pentru stratul (j) este de forma

$$\mathbf{v}^{(j)} = \mathbf{V}^{(j)}(z)\ \mathbf{a}^{(j)},$$

$$j = 0,1,2,\dots N-1, \tag{3.3}$$

$$\mathbf{y}^{(j)} = \mathbf{W}^{(j)}(z)\ \mathbf{b}^{(j)},$$

unde matricele $\mathbf{V}^{(j)}(z)$ și $\mathbf{W}^{(j)}(z)$ sînt definite pe coloane de vectorii

$$\mathbf{V}^{(j)}(z) = \left(\mathbf{v}_1^{(j)}\ e^{-\nu_S'^{(j)}(z-z_j)}, \mathbf{v}_2\ e^{\nu_S'^{(j)}(z-z_j)}\right),\ \mathbf{W}^{(j)}(z) = \tag{3.4}$$

$$= \left(\mathbf{w}_1^{(j)}\ e^{-\nu_P^{(j)}(z-z_j)}, \mathbf{w}_2^{(j)}\ e^{\nu_P^{(j)}(z-z_j)}, \mathbf{w}_3^{(j)}\ e^{-\nu_S^{(j)}(z-z_j)}, \mathbf{w}_4^{(j)}\ e^{\nu_S^{(j)}(z-z_j)}\right),$$

$$j = 0,1,2,\dots N-1,$$

ar vectorii $\mathbf{a}^{(j)}$, $\mathbf{b}^{(j)}$ conțin constantele arbitrare definite de relațiile (2.21) și respectiv (2.22). O mențiune specială trebuie făcută pentru $\mathbf{V}^{(N)}(z)$ și respectiv $\mathbf{W}^{(N)}(z)$. Avînd în vedere condițiile la limită (2.3), vectorii constantelor $\mathbf{a}^{(N)}$ respectiv $\mathbf{b}^{(N)}$ conțin una, respectiv două componente, iar matricele corespunzătoare soluției (3.3) pentru stratul N sînt

$$\mathbf{V}^{(N)}(z) = e^{-\nu_S'^{(N)}(z-z_N)}\ \mathbf{v}_1^{(N)},$$

$$\mathbf{W}^{(N)}(z) = \left(\mathbf{w}_1^{(N)}\ e^{-\nu_P^{(N)}(z-z_N)}, \mathbf{w}_3^{(N)}\ e^{-\nu_S^{(N)}(z-z_N)}\right). \tag{3.5}$$

Relațiile (3.4) pentru $z=z_j$ și respectiv pentru $z=z_{j+1}$ devin

$$\mathbf{V}^{(j)}(z_j) = (\mathbf{v}_1^{(j)}, \mathbf{v}_2^{(j)}),$$

$$\mathbf{V}^{(j)}(z_{j+1}) = (\mathbf{v}_1^{(j)} e^{-\nu_S'^{(j)} h_j}, \mathbf{v}_2^{(j)} e^{\nu_S'^{(j)} h_j}),$$

$$\mathbf{W}^{(j)}(z_j) = (\mathbf{w}_1^{(j)}, \mathbf{w}_2^{(j)}, \mathbf{w}_3^{(j)}, \mathbf{w}_4^{(j)}),$$

$$\mathbf{W}^{(j)}(z_{j+1}) = (\mathbf{w}_1^{(j)} e^{-\nu_P^{(j)} h_j}, \mathbf{w}_2^{(j)} e^{\nu_P^{(j)} h_j}, \mathbf{w}_3^{(j)} e^{-\nu_S^{(j)} h_j}, \mathbf{w}_4^{(j)} e^{\nu_S^{(j)} h_j}). \quad (3.6)$$

Impunem soluției (3.3) condițiile la limită (3.1) și condițiile de racordare a soluției pe suprafețele de separare $z = z_j$, $j = 1,2,\ldots N$, adică egalitatea deplasărilor și a tracțiunilor pe aceste suprafețe. Aceste condiții pentru soluția sistemului (2.11) sînt următoarele:

$$\begin{aligned}
&v_2^{(0)}(0) = (V_{21}^{(0)}(0), V_{22}^{(0)}(0))\,\mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{V}_2^{(0)}\,\mathbf{a}^{(0)} = 0,\\
&\mathbf{V}^{(0)}(z_1)\,\mathbf{a}^{(0)} - \mathbf{V}^{(1)}(z_2)\,\mathbf{a}^{(1)} = 0,\\
&\mathbf{V}^{(1)}(z_2)\,\mathbf{a}^{(1)} - \mathbf{V}^{(2)}(z_2)\,\mathbf{a}^{(2)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathbf{V}^{(j)}(z_{j+1})\,\mathbf{a}^{(j)} - \mathbf{V}^{(j+1)}(z_{j+1})\,\mathbf{a}^{(j+1)} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathbf{V}^{(N-1)}(z_N)\,\mathbf{a}^{(N-1)} - \mathbf{V}^{(N)}(z_N)\,\mathbf{a}^{(N)} = 0.
\end{aligned} \quad (3.7)$$

Sistemul obținut fiind omogen impunem condiția de existență a soluției nebanale, adică de anulare a determinantului atașat sistemului

$$\det \begin{Vmatrix}
\mathbf{V}_2^{(0)} & 0 & 0 \ldots . & 0 & 0\\
\mathbf{V}^{(0)}(z_1), & -\mathbf{V}^{(1)}(z_1) & 0 \ldots . & 0 & 0\\
0 & \mathbf{V}^{(1)}(z_2) & -\mathbf{V}^{(2)}(z_2) & 0 & 0\\
\ldots . & \ldots . & \ldots . & \ldots & \ldots\\
0 & 0 & 0 & \mathbf{V}_{(z_N)}^{(N-1)} & -\mathbf{V}_{(z_N)}^{(N)}
\end{Vmatrix} = 0. \quad (3.8)$$

Procedînd în mod analog, condițiile pentru soluția sistemului (2.18) sînt următoarele:

$$\begin{Vmatrix} y_2^{(0)}(0) \\ y_4^{(0)}(0) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} W_{21}^{(0)}(0), & W_{22}^{(0)}(0), & W_{23}^{(0)}(0), & W_{24}^{(0)}(0) \\ W_{41}^{(0)}(0), & W_{42}^{(0)}(0), & W_{43}^{(0)}(0), & W_{44}^{(0)}(0) \end{Vmatrix} \mathbf{b}^{(0)} = \mathbf{W}_{24}^{(0)}\,\mathbf{b}^{(0)} = 0,$$

$$\mathbf{W}^{(0)}(z_1)\,\mathbf{b}^{(0)} - \mathbf{W}^{(1)}(z_1)\,\mathbf{b}^{(1)} = 0,$$

$$\mathbf{W}^{(1)}(z_2)\,\mathbf{b}^{(1)} - \mathbf{W}^{(2)}(z_2)\,\mathbf{b}^{(2)} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathbf{W}^{(j)}(z_{j+1})\,\mathbf{b}^{(j)} - \mathbf{W}^{(j+1)}(z_{j+1})\,\mathbf{b}^{(j+1)} = 0, \tag{3.9}$$

$$\mathbf{W}^{(N-1)}(z_N)\,\mathbf{b}^{(N-1)} - \mathbf{W}^{(N)}(z_N)\,\mathbf{b}^{(N)} = 0.$$

Anulînd determinantul atașat matricei sistemului, obținem

$$\det \begin{Vmatrix} \mathbf{W}_{24}^{(0)} & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 \\ \mathbf{W}^{(0)}(z_1), & -\mathbf{W}^{(1)}(z_1) & 0 & \ldots 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{W}^{(1)}(z_2), & -\mathbf{W}^{(2)}(z_2) & \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \mathbf{W}_{(z_N)}^{(N-1)} & -\mathbf{W}_{(z_N)}^{(N)} \end{Vmatrix} = 0. \tag{3.10}$$

Ecuațiile (3.8) și (3.10) permit determinarea unor funcții complexe

$$\omega = \varphi(a) = \varphi_1(a) + \mathrm{i}\,\varphi_2(a),$$

$$\omega = \psi(a') = \psi_1(a') + \mathrm{i}\,\psi_2(a'), \tag{3.11}$$

ce caracterizează vitezele de propagare a undelor Rayleigh și a undelor Love. Vitezele de fază și de grup sînt

$$v_f = \frac{\varphi_1(a)}{a}, \quad v_g = \frac{\mathrm{d}\,\varphi_1}{\mathrm{d}\,a} \tag{3.12}$$

pentru undele Rayleigh și

$$v_f' = \frac{\psi_1(a')}{a'}, \qquad v_g' = \frac{\mathrm{d}\,\psi_1}{\mathrm{d}a'} \tag{3.13}$$

pentru undele Love.

După determinarea funcțiilor $\varphi(a)$ și $\psi(a')$ se introduc aceste valori în sistemele (3.7) și respectiv (3.9), apoi impunînd condiții la limită suplimentare sistemelor de ecuații, de exemplu, condiții la limită în deplasări pe suprafața $z = 0$ sau $z = H$, aceste sisteme permit determinarea soluției și implicit a matricei de transfer în funcție de modelarea sistemului mecanic.

4. DETERMINAREA VITEZELOR DE PROPAGARE A UNDELOR LOVE

Se consideră spaţiul Hilbert $L^2_{\mathscr{K}}[0, \infty)$ al claselor de funcţii de pătrat sumabil cu valori în corpul numerelor complexe $\mathscr{K}$, în care produsul scalar este definit astfel

$$< v_1, v_2 > = \int_0^\infty v_1(z)\, \overline{v_2(z)}\, \mathrm{d}z. \tag{4.1}$$

Se consideră ecuaţia

$$L(\varepsilon)\, u(\varepsilon) = \lambda(\varepsilon)\, M(\varepsilon)\, u(\varepsilon), \tag{4.2}$$

unde $L(\varepsilon)$ şi $M(\varepsilon)$ sînt operatori în spaţiul $L^2_{\mathscr{K}}[0, \infty)$ care depind de un parametru mic $\varepsilon \in \mathscr{K}$ şi satisfac relaţiile

$$\begin{aligned} < Lu, v > &= < u, \overline{L}\, v >, \\ < Mu, v > &= < u, \overline{M} v >. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Diferenţiind (4.2) în raport cu ε, obţinem

$$\left(\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\varepsilon}\right) u + L\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varepsilon}\right) = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\varepsilon} Mu + \lambda \left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\varepsilon}\right) u + \lambda M \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varepsilon}. \tag{4.4}$$

Înmulţind scalar la dreapta ecuaţia (4.4) cu $\bar{u}$ obţinem

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\varepsilon} u, \bar{u} \right\rangle + \left\langle L \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varepsilon}, \bar{u} \right\rangle &= \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\varepsilon} < Mu, \bar{u} > + \\ + \lambda \left\langle \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\varepsilon} u, \bar{u} \right\rangle &+ \lambda \left\langle M \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varepsilon}, \bar{u} \right\rangle. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Observăm că

$$\left\langle L \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varepsilon}, \bar{u} \right\rangle = \lambda \left\langle M \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\varepsilon} u, \bar{u} \right\rangle, \tag{4.6}$$

astfel că ecuaţia (4.5) se reduce la

$$\left\langle \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\varepsilon} u, \bar{u} \right\rangle = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\varepsilon} < Mu, \bar{u} > + \lambda \left\langle \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\varepsilon} u, \bar{u} \right\rangle. \tag{4.7}$$

Considerăm un mediu stratificat avînd modulul de elasticitate trans versal G, coeficientul de vîscozitate $\eta = G\tau$ şi densitatea ρ, funcţii de z

Sistemul de ecuații (2.11) care descrie propagarea undelor Love în medii stratificate se reduce prin eliminarea necunoscutei v_2 la o singură ecuație

$$-\partial_z\left[(G+\mathrm{i}\,\omega\eta)\,\partial_z v_1\right]+a'^2\,(G+\mathrm{i}\,\omega\,\eta)\,v_1=\rho\,\omega^2 v_1, \tag{4.8}$$

iar necunoscuta v_1 satisface condițiile la limită

$$\left.\partial_z v_1\right|_{z=0}=0,$$

$$\lim_{z\to\infty}\partial_z v_1=0. \tag{4.9}$$

Identificăm ecuația (4.2) cu (4.8) astfel că operatorii $L(\varepsilon)$, $M(\varepsilon)$ și funcțiile $u(\varepsilon)$, $\lambda(\varepsilon)$ sînt

$$L=-\partial_z\left[G+\mathrm{i}\omega\,\eta)\,\partial_z\cdot\,\right]+a'^2\,(G+\mathrm{i}\,\omega\,\eta),\quad \lambda=\omega^2,$$

$$M=\rho,\qquad u=v_1. \tag{4.10}$$

Condițiile la limită (4.9) asigură satisfacerea relațiilor (4.3). În ipoteza că ω și a' sînt funcții de ε, relația (4.7) aplicată în acest caz ne dă

$$2\,a'\frac{\mathrm{d}\,a'}{\mathrm{d}\,\varepsilon}\int_0^\infty(G+\mathrm{i}\;\omega\;\eta)\,v_1^2\,\mathrm{d}z+\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\,\varepsilon}\left(a'^2\int_0^\infty\eta\,v_1^2\;\mathrm{d}z+\int_0^\infty\eta\,(\partial_z\;v_1)^2\;\mathrm{d}z\right)=$$

$$=2\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\,\varepsilon}\int_0^\infty\rho\,v_1^2\,\mathrm{d}z \tag{4.11}$$

sau

$$\mathrm{d}\omega=2\,a'\frac{\displaystyle\int_0^\infty(G+\mathrm{i}\,\omega\,\eta)\;v_1^2\;\mathrm{d}z}{\displaystyle 2\omega\int_0^\infty\rho\,v_1^2\,\mathrm{d}z-\mathrm{i}\,a'^2\int_0^\infty\eta\,v_1^2\,\mathrm{d}z-\mathrm{i}\int_0^\infty\eta(\partial_z\,v_1)^2\,\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}a'. \tag{4.12}$$

Această relație diferențială permite să se determine cum variază ω dacă a' variază în jurul unei valori pentru care s-a determinat soluția. Dacă timpul de întîrziere τ se consideră independent de z, atunci relația (4.12) capătă următoarea formă simplificată :

$$\mathrm{d}\omega=\frac{a'\,(1+\mathrm{i}\,\omega\,\tau)^2}{\omega\left(1+\dfrac{1}{2}\,\mathrm{i}\,\omega\,\tau\right)}\,\frac{\displaystyle\int_0^\infty G\;v_1^2\,\mathrm{d}z}{\displaystyle\int_0^\infty\rho\;v_1^2\;\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}a'. \tag{4.13}$$

Prin acest procedeu se determină mai precis viteza de grup. De asemenea, se poate vedea ce efect au variațiile mici a funcțiilor $\rho(z)$ și $G(z)$ asupra pulsației ω. Această informație este de mare utilitate în determinarea acestor funcții pe baza datelor experimentale.

Primită la redacție la 1 februarie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. H. Takeuchi, M. Saito, *Seismic surface waves in Methods of computational physics*, B.A. Bolt, editor, Academic Press, N.Y., 1972.
2. R. Burridge, *Some mathematical topics in seismology*, Courant Inst. of Math. Sci. N.Y. University, 1976.
3. A.M. Freudental, H. Geiringer, *The mathematical theories of the inelastic continuum*, Handbuch der Physik, band VI, Springer Verlag, 1958.

ASUPRA UNEI REPREZENTĂRI ASIMPTOTICE PRIVIND INTEGRAREA ECUAȚIEI DE MIȘCARE A RACHETEI ÎN MEDIU REZISTENT

de MIHAI POPESCU
Institutul național pentru creație științifică și tehnică

În lucrare se prezintă o metodă care permite reprezentarea asimptotică a soluțiilor ecuației de mișcare a rachetei în mediu rezistent. În prima parte se deduc ecuațiile de mișcare pentru un proces optimal reprezentînd consumul minim de combustibil pentru faza activă a traiectoriei. Sîntem conduși astfel la un sistem de ecuații integrale Volterra, neliniare, de ordinul doi.
Folosind teoremele inegalităților integrale se evaluează domeniul de variație al parametrilor de stare pentru mișcarea considerată.

1. ECUAȚIA LUI MEȘCERSKI

Vom considera problema mișcării solidului de masă variabilă enunțînd-o sub următoarea formă generală :

Să considerăm la momentul t, solidul S de masă m precum și un număr de i corpuscule, fiecare dintre ele avînd cîte o masă $\Delta \mu_i$.

Masa m a solidului variază cu timpul prin captare de corpusculi de mase $\Delta \mu_i$ sau prin eliminare din masa sa a unor atari corpusculi.

Se consideră că acești corpusculi fac parte integrantă din masa $\Sigma m_j = m$ a solidului S.

Asupra solidului S precum și asupra corpusculilor lucrează un sistem de forțe date.

Ne propunem să găsim ecuațiile de mișcare ale sistemului de puncte alcătuită din solidul S și din corpusculi de masă $\Delta \mu_i$ sub acțiunea rezultantei forțelor exterioare față de un reper fix T.

În momentul arbitrar t vectorul principal al cantității de mișcare are expresia :

$$\bar{Q}(t) = \sum_i \Delta \mu_i \bar{u}_i^1 + \sum_j m_j \bar{u}_j(t), \tag{1.1}$$

prin $\bar{u}_i^1$ notînd viteza corpusculilor de masă $\Delta \mu_i$ la momentul t, iar $\bar{u}_j$ viteza punctelor m_j ale solidului S.

Vectorul principal al cantității de mișcare la momentul $t + \Delta t$ are expresia

$$\bar{Q}(t+\Delta t) = \sum_i \Delta \mu_i \bar{u}_i^2 + \sum_j m_j \bar{u}_j(t+\Delta t). \tag{1.2}$$

Dacă considerăm reperul mobil T_1 legat de solidul S, expresia acceleraţiei faţă de T va fi:

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_r^j + \bar{a}_c^j, \tag{1.3}$$

unde

$\bar{a}_t$ reprezintă acceleraţia de transport a punctelor materiale;

$\bar{a}_r^j$ — acceleraţia relativă;

$\bar{a}_c^j$ — acceleraţia lui Coriolis.

Vom putea scrie:

$$\sum_j m_j [\bar{u}_j(t+\Delta t) - \bar{u}_j(t)] = \sum_j m_j \Delta \bar{u}_j = \sum_j m_j (\bar{a}_t + \bar{a}_r^j + \bar{a}_c^j) \Delta t -$$

$$- \sum_k m_k(\bar{a}_t + \bar{a}_r^k + \bar{a}_c^k) + \sum_k m_k(\bar{u}_k^2 - \bar{u}_k^1), \tag{1.4}$$

unde indicele k are semnificaţia numărului de particule ce fac parte în momentul arbitrar t din punctele materiale ale solidului, iar $\bar{u}_k^1$ şi $\bar{u}_k^2$ vitezele acestor particule în momentul t şi $t + \Delta t$.

Aşadar, ţinînd seama de aceste expresii:

$$\Delta \bar{Q} = \bar{Q}(t+\Delta t) - \bar{Q}(t) = \sum_i \Delta \mu_i (\bar{u}_i^2 - \bar{u}_i^1) + \sum_j m_j (\bar{a}_t + \bar{a}_r^j + \bar{a}_c^j) \Delta t -$$

$$- \sum_k \Delta \mu_k(\bar{a}_t + \bar{a}_r^k + \bar{a}_c^k) + \sum_k \Delta \mu_k(\bar{u}_k^2 - \bar{u}_k^1). \tag{1.5}$$

Împărţind expresia (1.5) prin Δt, obţinem

$$\frac{\triangleright Q}{\Delta t} = \bar{a}_t \sum_j m_j + \sum_j m_j \bar{a}_c^j + \sum_j m_j \bar{a}_r^j + \sum_i \frac{\Delta \mu_i}{\Delta t} (\bar{u}_i - \bar{u}_i^1) + \sum_k \frac{\Delta \mu_k}{\Delta t} (\bar{u}_k^1 - \bar{u}_k^1). \tag{1.6}$$

Făcînd presupunerea $\Delta \mu_k \to 0$ la $\Delta t \to 0$ şi deoarece $\frac{\Delta \bar{Q}}{\Delta t} \to \bar{P}$ cînd $\Delta t \to 0$, obţinem expresia

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{R}, \tag{1.7}$$

unde $\bar{F}$ este rezultanta forţelor exterioare ce acţionează asupra solidului, iar $\bar{R}$ forţa reactivă, avînd expresia

$$\bar{R} = \bar{J} - \sum_j m_j \bar{a}_r^j + \bar{\Phi}, \tag{1.8}$$

unde am notat

$$\bar{J} = -2 \sum \bar{\omega} \times m \bar{u}_r^i, \tag{1.9}$$

J fiind forța lui Coriolis.

Ecuația (1.7) reprezintă ecuația de mișcare față de un triedru de referință a unui solid cu masa variabilă.

În cazul rachetei, particulele sînt eliminate, lucru care, evident, nu schimbă ecuațiile de mișcare (1.7). Comparînd ecuuația (1.7) cu ecuația generală de mișcare a unui solid liber se vede că în ecuația de mișcare a rachetei apar în plus :

a) forța egală cu Φ aplicată în centrul maselor eliminate în intervalul de timp T;

b) forțele de presiune ale aerului pe pereții rachetei.

Referindu-se la mișcarea ascendentă a rachetei, Meșcerski [1] consideră accelerațiile și vitezele relative nule, astfel încît ecuația (1.7) devine :

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{R}, \tag{1.10}$$

unde $\bar{F}$ este rezultanta acțiunii forțelor exterioare, iar $\bar{\Phi}$ forța de reacție, avînd expresia

$$\bar{\Phi} = \frac{dm}{dt}\bar{v}_r, \tag{1.11}$$

unde $\bar{v}_r$ este viteza relativă de ejecție a gazelor.

Proiectînd ecuația (1.11) pe verticală și ținînd seama de forțele ce acționează asupra rachetei, adică forța de greutate $G = mg$ și P — forța de rezistență frontală a rachetei, obținem ecuația

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = -m\bar{g} - \bar{P} - \frac{dm}{dt}\bar{v}_r. \tag{1.12}$$

2. ECUAȚIA DE MIȘCARE A RACHETEI

Vom stabili ecuația de mișcare a rachetei pentru regimul optimal, presupunînd consum minim de combustibil pe porțiunea activă a traiectoriei. Această problemă a fost tratată prima dată de Godard, fiind apoi reluată de Obert [2]. Rezultatul obținut de Obert poate fi obținut prin metode variaționale, cu remarca că raportul dintre viteza inițială de lansare și viteza de ejecție a gazelor este considerat neglijabil, fiind mic în raport cu unitatea.

Rezistența la înaintare R a rachetei în mișcarea pe verticală este dată de

$$R = P + mg. \tag{2.1}$$

Astfel, ecuația (1.12) devine :

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = -\bar{R} - \frac{dm}{dt}\bar{v}_r. \tag{2.2}$$

Considerăm racheta la înălțimea x la suprafața Pămîntului, parcurgînd distanța mică dx = constant. Presupunem, de asemenea, că timpul de trecere prin acest interval este suficient de mic, astfel încît putem presupune densitatea atmosferică constantă și mărimea mdv, de asemenea, constantă.

Introducem, împreună cu variabila t, noua variabilă x.

Cu aceste presupuneri determinăm legea optimală de mișcare a rachetei din condiția ca să obținem consum minim de combustibil. Ținînd seama că pe o porțiune dx suficient de mică condiția de consum minim de masă poate fi scrisă $\frac{dm}{dx} = 0$, considerînd mărimile mdv și dx constante, prin diferențierea după viteza c a relației (2.3) se obține

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{R}{v}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{mg + P}{v}\right) = 0. \tag{2.4}$$

Rezistența la înaintare este dată de expresia $P = \frac{1}{2} C \rho v^2 \delta$, unde ρ este densitatea (masa specifică a aerului), S — secțiunea transversală maximă a rachetei, iar C un coeficient constant de rezistență adimensional, așa încît vom obține din (2.4):

$$mg = \frac{1}{2} C \rho S v^2, \tag{2.5}$$

relație ce exprimă că greutatea rachetei este egală cu forța de rezistență a mediului.

Ecuația (2.2) devine în acest caz:

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} = -S\rho C v^2 - \frac{dm}{dt}\bar{v}_r. \tag{2.6}$$

Vom considera mișcarea rachetei într-un mediu în care densitatea variază după legea $\rho = \rho_0 e^{-\alpha x}$, unde ρ_0 este densitatea la momentul $t=0$, iar viteza de ejecție a gazelor este constantă, avînd valoarea $-u$, unde $u > 0$.

Presupunînd legea liniară de variație a masei:

$$m = m_0(1 - kt), \tag{2.7}$$

ecuația de mișcare a rachetei într-un mediu rezistent neomogen devine:

$$m_0(1 - kt)\frac{d^2x}{dt^2} - km_0\frac{dx}{dt} + \rho_0 SCe^{-\alpha x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = km_0 u. \tag{2.8}$$

Dezvoltarea ulterioară a calculelor are ca scop obţinerea unei soluţii pentru ecuaţia neliniară (2.8). Se ajunge la integrarea unui sistem de ecuaţii integrale de tip Volterra neliniar de ordinul doi.

Folosirea unor teoreme ale inegalităţiilor integrale ne permit să evaluăm limite admisibile pentru spaţiu şi viteza rachetei în mişcarea considerată.

Fie condiţiile iniţiale $t = 0$, $v = v_0$, $s = 0$.

3. INTEGRAREA ECUAŢIEI DE MIŞCARE

Considerăm două cazuri şi anume :

1) NEGLIJAREA REZISTENŢEI

Această ipoteză este justificată de faptul că la începutul mişcării viteza v fiind mică, rezistenţa nu poate fi o contribuţie prea mare, iar la viteze mari densitatea ρ fiind foarte mică, rezistenţa va fi, de asemenea, neglijabilă faţă de ceilalţi termeni ai ecuaţiei.

În cazul acesta ecuaţia (2.8) devine :

$$m_0(1 - kt)\dot{v} = km_0 (v+u). \tag{3.1.1}$$

Prin integrare se obţine pentru v expresia :

$$v = -\frac{kut}{1 - kt} + v_0, \tag{3.1.2}$$

de unde, printr-o nouă integrare, avem

$$x = - ut - \frac{u}{k} \ln (1 - kt) + v_0 t. \tag{3.1.3}$$

2) CONSIDERAREA REZISTENŢEI

Prin împărţire cu $m_0(1 - kt)$, ecuaţia (2.8) devine :

$$\ddot{x} = + H(t)\dot{x} = f(x, \dot{x}, t), \tag{3.2.1}$$

unde am notat :

$$H(t) = - \frac{k}{1 - kt} \; ; \; f\ (x, \dot{x}, t) = \frac{km_0 u - \rho_0 SC\, e^{-\alpha x}\, \dot{x}^2}{m_0(1 - kt)}. \tag{3.2.3}$$

Fie

$$L(t) = e^{-\frac{1}{2}\int H(s)ds.}$$

Cu substituția $x = L(t)\,y$ și notînd

$$B(t) = -\frac{1}{2}\dot{H}(t) - \frac{1}{4}H^2(t),$$

$$r(y \cdot \dot{y}, t) = [L^{-1}(t)\,f(x, \dot{x}, t)\,|_{\dot{x}=L(t)\left(\dot{y}-\frac{1}{2}Hy\right)}^{x=L(t)y} \tag{3.2.4}$$

(3.2.1) se scrie

$$\ddot{y} + B(t)y = r(y, \dot{y}, t). \tag{3.2.5}$$

Considerăm ecuația

$$\ddot{y} + [B(t) + A(t)]\,y = A(t)y + r(y, \dot{y}, t). \tag{3.2.6'}$$

Fie ecuația omogenă :

$$\ddot{y} + [B(t) + A(t)]\,y = 0 \tag{3.2.6'}$$

cu soluțiile particulare y_1 și y_2. Cu ajutorul substituției

$$y = B^{-\frac{1}{4}}u,$$

ecuația (3.2.6′) devine

$$u'' + \left(B + A + \frac{5}{16}B^2\,B^{-12} - \frac{1}{4}B^{-1}\,B''\right)u - \frac{1}{2}B^1\,B'\,u' = 0. \tag{3.2.7}$$

Dacă luăm

$$A = \frac{1}{4}B^{-1}\,B'' - \frac{5}{16}B^{-2}\,B^{12},$$

ecuația (3.2.7) se reduce la

$$u'' - \frac{1}{2}B^{-1}\,B'\,u' + Bu = 0. \tag{3.2.7'}$$

Efectuînd schimbarea

$$\psi = \int_0^t B^{\frac{1}{2}}(s)\,\mathrm{d}s, \tag{3.2.8}$$

(3.2.7′) se transformă în

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}^2 \psi} + u = 0, \tag{3.2.9}$$

cu soluția generală

$$u(t) = C_1 \cos \psi(t) + C_2 \sin \psi(t), \tag{3.2.10}$$

C_i $(i = 1,2)$ constante arbitrare,
unde

$$N_1(t) = \cos \psi(t); \quad N_2(t) = \sin \psi(t); \; V(t) = B^{-\frac{1}{4}}(t)$$

sau, revenind la substituția anterioară, soluția ecuației omogene se scrie

$$y(t) = V(t)\,[C_1 N_1(t) + C_2\, N_2(t)].$$

Se vede ușor că $N_i(t)$ satisface condiția

$$N_1(0) = 1, \qquad N_2(0) = 0.$$

Considerînd sistemul fundamental de soluții normal în 0, vom avea

$$y_1(0) = 1, \qquad \dot{y}_1(0) = 0,$$
$$y_2(0) = 0, \qquad \dot{y}_2(0) = 1.$$

Se obține în acest mod valoarea constantelor C_1 și C_2 și atunci

$$y_1(t) = V(t)\,[V^{-1}(0)\, N_1(t) - \dot{V}(0)\, N_2(t)],$$
$$y_2(t) = V(t)\, V(0) N_2(t). \tag{3.2.11}$$

Soluția ecuației (3.2.6) este dată de

$$y(t) = y_1(t)\, a(t) + y_2(t)\, b\,(t). \tag{3.2.12}$$

Întrucît y_1 și y_2 formează un sistem fundamental de soluții, $a(t)$ și $b(t)$ se calculează din sistemul :

$$y_1\, \dot{a} + y_2 \dot{b} = 0,$$
$$\dot{y}_1\, \dot{a} + \dot{y}_2\, \dot{b} = A(y_1 a + y_2 b) = + r(y_1 a + y_2 b, \dot{y}_1 + \dot{y}_2\, b_1, t). \tag{3.2.13}$$

Ținînd seama de expresiile

$$y_1(t) = V(t)\,[V^{-1}(0)\, N_1(t) - \dot{V}(0)\, N_2(t)],$$
$$\dot{y}_1(t) = \dot{V}(t)\,[V^{-1}(0)\, N_1(t) - \dot{V}(0)\, N_2(t)] - V^{-1}(t)[V^{-1}(0)\, N_2(t) - \dot{V}(0)\, N_1(t)],$$
$$y_2(t) = V(t) \quad V(0)\, N_2(t), \tag{3.2.14}$$
$$\dot{y}_2(t) = V\,(0)\,[\dot{V}(0)\, N_2(t) + V^{-1}(t)\, N_1(t)]$$

și efectuînd calculele sistemul (3.2.13), rezultă

$$a(t) = y_0 - \int_0^t y_2 A(y_1 a + y_2 b)\,ds - \int_0^t y_2\, r(y_1 a + y_2 b, \dot{y}_1 a + \dot{y}_2 b, s)\,ds,$$

$$b(t) = y_0 + \int_0^t y_1 A(y_1 a + y_2 b)\,ds + \int_0^t y_1 r(y_1 a + y_2 b, \dot{y}_1 a + \dot{y}_2 b, s)ds \tag{3.2.15}$$

sau, revenind la variabila inițială x

$$a(t) = L^{-1}(0)\, x_0 - \int_0^t y_2 A(y_1 a + y_2 b)\,ds - \int_0^t y_2 L^{-1} f(L(y_1 a + y_2 b), L\Big[\Big(\dot{y}_1 - \\ - \frac{1}{2} H y_1\Big) a + \Big(\dot{y}_2 - \frac{1}{2} H y_2\Big) b\Big], s\Big)ds,$$

$$b(t) = L^{-1}(0)\Big[\dot{x}_0 + \frac{1}{2} H(0)\, x_0\Big] + \\ + \int_0^t y_1 A(y_1 a + y_2 b)\,ds + \int_0^t y_1 L^{-1} f(L(y_1 a + y_2 b),\ L\Big[\Big(\dot{y}_1 - \frac{1}{2} H y_1\Big) a + \\ + \Big(\dot{y}_2 - \frac{1}{2} H y_2\Big) b\Big], s\Big)\,ds. \tag{3.2.16}$$

Sistemul (3.2.16) este un sistem de ecuații integrale Volterra neliniare de ordinul doi.

Cu notațiile

$$\eta(t) = \max(|y_1(t)|, |y_2(t)|),$$

$$\eta_1(t) = |L(t)|\,\eta(t), \tag{3.2.17}$$

$$\eta_2(t) = |L(t)| \max\Big(|\dot{y}_1 - \frac{1}{2} H y_1|,\ |\dot{y}_2 - \frac{1}{2} H y_2|\Big),$$

$$w(t) = 2\,\eta^2(t)\,|Q(t),$$

se găsește

$$\eta(t) = \frac{2}{k}\sqrt{1-kt}\ |\sin(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})|,$$

$$\eta_1(t) = \frac{2}{k}|\sin(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})|, \tag{3.2.18}$$

$$\eta_2(t) = \frac{1}{1-kt}\cos(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}),$$

$$w(t) = \frac{1}{1-kt}\sin^2(\ln(1-kt)).$$

Se obţin astfel inegalităţile

$$|a| \leqslant \int_0^t \eta^2 |A|(|a| + |b|)\,ds + \int_0^t \eta |L^{-1}|)\, f(L(y_1 a + y_2 b)\, L\left[\left(\dot{y}_1 - \frac{1}{2} H y_1\right)a + \right.$$

$$\left. + \left(\dot{y}_2 - \frac{1}{2} H y_2\right) b\right], s)|\,ds,$$

(3.2.19)

$$|b| \leqslant v_0 + \int_0^t \eta^2 |Q|(|a| + |b|)\,ds + \int_0^t \eta |L^{-1}|\,|f(L(y_1 a + y_2 b),\ L\left[\left(\dot{y}_1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2} H y_1\right) a + \left(\dot{y}_2 - \frac{1}{2} H y_2\right) b\right], s)|\,ds.$$

De asemenea, putem scrie

$$\left| f(L(y_1 a + y_2 b),\ L\left[\left(\dot{y}_1 - \frac{1}{2} H y_1\right) a + \left(\dot{y}_2 - \frac{1}{2} H y_2\right) b\right], s)\right| =$$

$$= \left| \frac{k m_0 u - \rho_0 S C \left\{L\left[\left(\dot{y}_1 - \frac{1}{2} H y_1\right) a + \left(\dot{y}_2 - \frac{1}{2} H y_2\right) b\right]\right\}^2 exp[-\alpha L(y_1 a + y_2 b)]}{m_0(1 - kt)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{S \rho_0 C \left\{L\left[\left(\dot{y}_1 - \frac{1}{2} H y_1\right) a + \left(\dot{y}_2 - \frac{1}{2} H y_2\right) b\right]\right\}^2}{m_0(1-kt)} \leqslant \frac{S \rho_0 C}{m_0(1-kt)} \eta_2^2 (|a| + |b|)^2.$$

(3.2.20)

Pentru a folosi o evaluare cît mai apropiată de valoarea reală vom folosi teorema 1 a inegalităţii integrale [2].

TEOREMA 1. *Fie funcţia $u(t)$ continuă, ne-negativă pentru $t \geqslant t_0$ şi funcţia $k(u, t)$ continuă şi ne-negativă pentru $t \geqslant t_0$, $u \geqslant 0$.*

Presupunem că avem inegalitatea

$$u(t) \leqslant C_1 + \int_{t_0}^t [w(s)\, u(s) + K(u(s), s)]\,ds, \qquad C_1 > 0 \qquad (1')$$

și în plus că există o funcție continuă și ne-negativă pentru toți $t \geqslant t_0$, $\tilde{v}(t) > 0$ *și fie* $g(u)$ *o funcție continuă ne-negativă și crescătoare în raport cu* $u \geqslant 0$, *ceea ce implică că există* $u_0 \in [0, C_1]$ *astfel ca* $g(u_0) > 0$.

În aceste conditii :

1.1. *Dacă este satisfăcută inegalitatea*

$$K\left[\sigma \exp\left(\int_{t_0}^{t} w(s)\,\mathrm{d}s\right), t\right] \exp\left(-\int_{t_0}^{t} w(s)\mathrm{d}s\right) \leqslant \tilde{v}(t)\, g(\sigma) \quad t \geqslant t_0,\ \sigma \geqslant 0 \tag{1}$$

atunci pentru toți $t \in [t_0, T)$ *este satisfăcută inegalitatea*

$$u(t) \leqslant G^{-1}\left[G(c_1) + \int_{t_0}^{t} \tilde{v}(s)\,\mathrm{d}s\right] \exp\left(\int_{t_0}^{t} w(s)\,\mathrm{d}s\right), \tag{2}$$

unde G^{-1} *este funcția inversă a lui*

$$G(u) = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)} \quad 0 < u_0 \leqslant c_1 \leqslant u \tag{3}$$

și valoarea lui T *este determinată de relația*

$$\int_{c_0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)} = G(c_1) + \int_{c_0}^{T} \tilde{v}(s)\,\mathrm{d}s.$$

1.2. *Dacă în plus există constanta* $\tilde{c} > 0$ *astfel ca*

$$\int_{t_0}^{\infty} \tilde{v}(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{\tilde{c}}^{T} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)},$$

atunci are loc inegalitatea (1) *în intervalul* $[t_0, \infty)$, *adică pentru toți* $c \in (0, \tilde{c})$ *avem* $T = \infty$.

În cazul problemei considerate, dacă facem notațiile

$$|a(t)| + |b(t)| = u(t),$$

ne propunem să determinăm $K(|a| + |b|, t)$ astfel încît să fie satisfăcută inegalitatea :

$$2\eta(t)\,|L^{-1}(t)\,|f(\ldots)| \leqslant K(|a| + |b|, t).$$

Deoarece avem

$$f(x, \dot{x}, t) \leqslant \frac{S\,\rho_0\,C}{m_0(1-kt)}\,\eta_2^2(t)\,(|a| + |b|)^2$$

se poate scrie

$$2\eta(t)\,|\,L^{-1}(t)\,|\,|f(x,\dot{x},t)\,| \leqslant 2\eta\,(t)\,L^{-1}\,(t)|\frac{S\,\rho_0\,C}{m_0(1-kt)},\,\eta_2^2(t)\,(|\,a\,|+|\,b\,|)=$$

$$=K(|\,a\,|+|\,b\,|,t). \tag{3.2.21}$$

Luînd

$$K(u(t),t)=\frac{4\,\rho_0\,SC}{m_0(1-kt)^2}\cos^2\,(\ln\,(1-kt)^{\frac{1}{2}})\,|\sin\,(\ln\,(1-kt)^{\frac{1}{2}})|u^2,$$

se obţine o inegalitate de forma

$$u(t)\leqslant v_0+\int_0^t[w(s)\,u(s)+K(u(s),s)]\,\mathrm{d}s,$$

deci o inegalitate de tipul (1′).

Va trebui să fie satisfăcută inegalitatea (1) din teorema (I)

$$K\left[\sigma\exp\left(\int_0^t w(s)\,\mathrm{d}s\right),t\right]\exp\left(-\int_0^t w(s)\,\mathrm{d}s\right)\leqslant\tilde{v}(t)\,g(\sigma)$$

$$\int_0^t w(s)\,\mathrm{d}s=\frac{1}{k}\,[\sin\,(\ln\,(1-kt)^{\frac{1}{2}})-\ln\,(1-kt)]$$

$$\exp\left(\int_0^t w(s)\mathrm{d}s\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{k}\sin(\ln(1-kt))}\;\mathrm{e}^{-\ln(1-kt)^{\frac{1}{k}}}.$$

Ca urmare a acestor valori, rezultă

$$K\left[\exp\left(\int_0^t w(s)\,\mathrm{d}s\right),t\right]\exp\left(-\int_0^t w(s)\,\mathrm{d}s\right)=\sigma^2(1-kt)^{-\frac{1}{k}}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{k}\sin(\ln(1-kt))}\times$$

$$\times\frac{4\,\rho_0\,SC}{km_0(1-kt)}\left|\sin(\ln\,(1-kt)^{\frac{1}{2}}\right|\cos^2\,(\ln\,(1-kt)^{\frac{1}{2}})\leqslant$$

$$\leqslant\sigma^2\,(1-kt)^{-\frac{1}{k}}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{k}\sin\,|\ln(1-kt)\,|}\cdot\frac{4\,\rho_0\,SC}{km_0(1-kt)}\,|\sin\,(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}|\times$$

$$\times\cos^2\,(\ln\,(1-kt)^{\frac{1}{2}}) \tag{3.2.22}$$

sau

$$K\left[\sigma \exp\left(\int_0^t w(s)\,\mathrm{d}s\right), t\right] \exp\left(-\int_0^t w(s)\,\mathrm{d}s\right) \leqslant \tag{3.2.23}$$

$$\leqslant -\sigma^2 \frac{4\rho_0 SC}{km_0(1-kt)^2} \sin\left(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}\right) \cos^2\left(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Dacă luăm

$$g(\sigma) = \sigma^2,$$

$$\tilde{v}(t) = -\frac{4\rho_0 SC}{km_0(1-kt)^2} \sin\left(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}\right) \cos^2\left(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}\right), \tag{3.2.24}$$

se obţine

$$\int_0^t \tilde{v}(s)\,\mathrm{d}s = -\frac{4\rho_0 SC}{km_0} \int_0^t \frac{1}{(1-ks)^2} \cos^2\left(\ln(1-ks)^{\frac{1}{2}}\right) \sin\left(\ln(1-ks)^{\frac{1}{2}}\right) \mathrm{d}s =$$

$$= -\frac{8\rho_0 SC}{k^2 m_0}\left[\frac{7}{65} + \frac{8}{65(1-kt)} \cos\left(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{14}{65(1-kt)} \sin\left(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{13(1-kt)} \sin^3\left(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{3}{13(1-kt)} \cos^3\left(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}\right)\right],$$

$$G^{-1}\left[G(C_1) + \int_0^t \tilde{v}(s)\,\mathrm{d}s\right] = \frac{1}{\frac{1}{u_0} - \left[G(C_1) + \int_0^t \tilde{v}(s)\,\mathrm{d}s\right]}.$$

Rezultă

$$G(c_1) + \int_0^t \tilde{v}(s)\,\mathrm{d}s = -\frac{1}{C_1} + \frac{1}{u_0} - \frac{8\rho_0 SC}{k^2 m_0}\left[\frac{7}{65} + \frac{8}{65(1-kt)} \cos\left(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{14}{65(1-kt)} \sin\left(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{2}{13(1-kt)} \sin^3\left(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{13(1-kt)} \cos^3\left(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}\right)\right.$$

şi

$$G^{-1}\left[G(C_1)+\int_0^t \tilde{v}(s)\,ds\right]= \tag{3.2.25}$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{v_0}+\frac{8\rho_0 SC}{k^2 m_0}\left[\frac{7}{65}+\frac{8}{65(1-kt)}\cos(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})-\frac{14}{65(1-kt)}\sin(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})+\right.}$$

$$\left.+\frac{2}{13(1-kt)}\sin^3(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})-\frac{3}{13(1-kt)}\cos^2(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})\right].$$

Formulele (1'), (1) şi (3.2.22) vor fi numite formule fundamentale.

În cele ce urmează ne propunem să găsim nişte funcţii de timp care majorează spaţiul parcurs de rachetă şi viteza acesteia.

TEOREMA 2. *Dacă formulele fundamentale sînt adevărate şi condiţiile teoremei 1 sînt indeplinite, atunci sînt îndeplinite inegalităţile*

$$|x(t)|\leqslant \eta_1(t)\,G^{-1}\left[G(C_1)+\int_0^t v(s)\,ds\right]\exp\left(\int_0^t w(s)\,ds\right),$$

$$|\dot{x}(t)|\leqslant \eta_2(t)\,G^{-1}\left[G(C_1)+\int_0^t v(s)\,ds\right]\exp\left(\int_0^t w(s)\,ds\right). \tag{3.2.26}$$

Ţinînd seama de această teoremă, vom obţine în cazul nostru :

$$|x(t)|\leqslant \frac{\frac{2}{k}\,|\sin(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})|\,(1-kt)^{-\frac{1}{k}}\,e^{\frac{1}{k}\sin(\ln(1-kt))}}{\frac{1}{v_0}+\frac{8S\rho_0 C}{k^2 m_0}\left[\frac{7}{65}+\frac{8}{65(1-kt)}\cos(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})-\frac{14}{65(1-kt)}\sin(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})+\right.}$$

$$\left.+\frac{2}{(13(1-kt)}\sin^3(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})-\frac{3}{13(1-kt)}\cos^3(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})\right]$$

$$|\dot{x}(t)|\leqslant \frac{\cos(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})\,(1-kt)^{-\frac{1}{k}-1}\,e^{\frac{1}{k}\sin(\ln(1-kt))}}{\frac{1}{v_0}+\frac{8S\rho_0 C}{k^2 m_0}\left[\frac{7}{65}+\frac{8}{65(1-kt)}\cos(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})-\frac{14}{65(1-kt)}\sin(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})+\right.} \tag{3.2.27}$$

$$\left.+\frac{2}{13(1-kt)}\sin^3(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})-\frac{3}{13(1-kt)}\cos^3(\ln(1-kt)^{\frac{2}{2}})\right].$$

Formulele (3.2.27) permit o evaluare a marginii superioare a spațiului și vitezei în fiecare moment.

Reprezentarea asimptotică a soluției ecuației 2.8.

TEOREMA 3. *Dacă formulele fundamentale sînt menținute și presupunerile teoremei 2 sînt satisfăcute, atunci există constantele a și b, astfel încît soluțiile au următoarea reprezentare asimptotică*

$$x(t) = L(t)\, y_1(t)\, a^* + L(t)\, y_2(t)\, b^*,$$

$$\dot{x}(t) = L(t)\left[\dot{y}_1(t) - \frac{1}{2} H(t)\, y_1(t)\right] a^* + L(t)\left[\dot{y}_2(t) - \frac{1}{2} H(t)\, y_2(t)\right]. \tag{3.2.28}$$

Într-adevăr, vom arăta acest lucru pentru

$$a(t) = L^{-1}(0)\, x_0 - \int_0^{\infty} y_2 A(y_1 a + y_2 b)\, ds - \int_0^{\infty} y_2 L^{-1} f(x(s), x(s), s)\, ds -$$

$$- \int_{\infty}^{t} y_2 A(y_1 a + y_2 b)\, ds - \int_{\infty}^{t} y_2 L^{-1} f(x(s), \dot{x}(s), s)\, ds.$$

Primele integrale din membrul drept sînt mărginite potrivit concluziilor anterioare, iar celelalte două tind către 0 atunci cînd $t \to \infty$.

Cu aceasta soluțiile ecuației (2.8) au următoarea reprezentare asimptotică :

$$x(t) = [\cos(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}) - \sin(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}\, a^* + \frac{2}{k} \sin(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}})\, b^*,$$

$$\dot{x}(t) = \frac{k}{2(1-kt)} [\sin(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}) + \cos(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}]\, a^* +$$

$$+ \frac{1}{1-kt} [\sin(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}} - \cos(\ln(1-kt)^{\frac{1}{2}}]\, b^*.$$

Relația (3.2.27) demonstrează mărginirea soluției ecuației lui Meșcerski în cazul neliniar considerat.

Această relație (3.2.27) ne permite să aflăm o margine superioară pentru spațiul parcurs de rachetă și a vitezei acesteia în fiecare moment al mișcării.

Astfel se observă din (3.2.27) că la momentul inițial vom obține $|x(0)| = 0$ și $|\dot{x}(0)| = v_0$, ceea ce corespunde cu condițiile inițiale impuse.

Pentru a afla spațiul pe verticală parcurs de rachetă pe porțiunea activă a traiectoriei precum și a vitezei sale este necesar să determinăm

timpul de urcare al rachetei pe porţiunea activă a traiectoriei, ceea ce rezultă din legea de schimbare a masei $t_a = \frac{m_0 - m_E}{k}$, unde m_E este greutatea rachetei fără combustibil. În acest fel, sistemul de ecuaţii integrale neliniar de tip Volterra se transformă într-un sistem de ecuaţii integrale neliniare de tip Fredholm.

Primită la redacţie la 3 mai 1979

BIBLIOGRAFIE

1. V. S. Novoselov, *Analiticeskaia mehanica sistem s peremenimi massami*, Leningradskovo Universiteta, 1969.
2. A. A. Kosmodemianskii, *Mehanica tel peremenoi massi*, Moscova Ucipedghiz, 1955.
3. V. Vâlcovici, *Mecanică teoretică*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1968.
4. R. Gutowski, Arch. Mech. Stos., *7* (1971).

MIŞCAREA NESTAŢIONARĂ PRINTR-UN SPAŢIU INELAR

de AL. D. STAN,
Institutul de petrol şi gaze, Ploieşti

ER. DELLA-GIACOMO
Institutul de cercetare ştiinţifică şi inginerie tehnologică pentru industria electrotehnică, Bucureşti

În tehnică sînt situaţii cînd un fluid se mişcă nestaţionar printr-un spaţiu inelar. Un asemenea caz se întîlneşte la pompele de extracţie, unde pistonul şi cilindrul pompei formează un spaţiu cu peretele interior mobil. Coeficientul de rezistenţă la spaţiul inelar cu pereţii ficşi depinde de timp şi de raportul razelor celor două suprafeţe cilindrice. La spaţiul inelar cu peretele cilindric interior mobil, debitul şi volumul de fluid scurse prin spaţiul inelar depind de raportul razelor celor două suprafeţe cilindrice. Există un raport al acestor raze care face ca parametrii amintiţi să fie maximi.

1. INTRODUCERE

În multe probleme practice se cere cunoaşterea parametrilor mişcării nestaţionare a unui fluid vîscos printr-un spaţiu inelar. O asemenea situaţie apare, de exemplu, la pompajul de adîncime, unde, prin spaţiul dintre piston şi cilindrul pompei, are loc o mişcare nestaţionară a fluidelor vîscoase. Această problemă a fost abordată în mai multe lucrări [2,3,4]. În lucrarea [3] se obţine soluţia integrală a debitului de fluid scurs printre piston şi cilindrul pompei, luîndu-se în considerare şi excentricitatea acestora. Mai recent, în lucrarea [4], se obţin pentru doi cilindri coaxiali elementele mişcării nestaţionare. Cazul mişcării staţionare a fost prezentat în [5], lucrare în care se arată că pierderea de presiune într-un spaţiu inelar excentric este mai mică decît în spaţiul fără excentricitate. Soluţiile obţinute în lucrările [3,4] presupun că gradientul de presiune este independent de timp. Această presupunere este conformă cu realitatea deoarece se poate admite că presiunea care se exercită asupra spaţiului inelar, la pompajul de adîncime, se menţine constantă fiind dată de coloana de fluid de la nivelul pompei pînă la suprafaţă.

În această lucrare se consideră cazul mişcării într-un spaţiu inelar cu un perete mobil, determinîndu-se profilul de viteze şi debitul de fluid care se scurge prin spaţiul inelar.

2. ASPECTUL MATEMATIC AL PROBLEMEI

Integrarea ecuaţiei de mişcare a fluidului în spaţiul cuprins între doi cilindri de raze R_1 şi R_2 (fig. 1), a fost făcută în lucrarea [4] presupunînd mişcarea laminară şi nestaţionară.

S-a presupus de asemenea că cilindrul de rază R_1 se mișcă cu o viteză $v_1(t)$, iar cel de rază R_2 este fix.

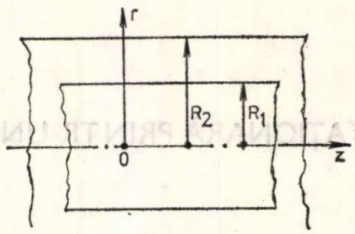


Fig. 1

Soluția acestei probleme, obținută cu ajutorul transformatei finite a lui Hankel, are forma:

$$\bar{v} = \pi \sum_n \frac{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n)\, B_0(\alpha_n \bar{r})}{J_0^2(\alpha_n \bar{R}_1) - \mathcal{J}_0^2(\alpha_n)} \, e^{-\alpha_n^2 \bar{t}} \left[\frac{\pi}{2} J_0(\alpha_n) \int_{\bar{R}_1}^{1} \bar{r}\, \bar{v}\, (\bar{r})\, B_0(\alpha_n \bar{r})\, d\bar{r} + \right.$$

$$\left. + J_0(\alpha_n \bar{R}_1) \int_0^{\bar{t}} \varphi(\tau)\, e^{-\alpha_n^2 \tau}\, d\tau - J_0(\alpha_n) \int_0^{\bar{t}} \psi(\tau)\, e^{-\alpha_n^2 \tau}\, d\tau \right] - \varphi(\bar{t}), \qquad (2.1)$$

unde α_n sînt rădăcinile ecuației

$$J_0(\alpha_n)\, Y_0(\alpha_n k) - Y_0(\alpha_n)\, J_0(\alpha_n k) = 0. \qquad (2.2)$$

În ecuația (2.2) s-a notat cu J_0 funcția Bessel de primă speță de de ordin zero, iar Y_0 reprezintă funcția Bessel de speța a doua tot de ordinul zero.

În (2.1) s-au folosit variabilele adimensionale

$$\bar{r} = \frac{r}{R_2}, \quad \bar{t} = \frac{\nu t}{R_2^2}, \qquad (2.3)$$

unde $k = R_1/R_2$, t reprezintă timpul, iar ν vîscozitatea cinematică a fluidului. S-au introdus de asemenea notațiile

$$\varphi(\bar{t}) = \mathcal{R} \int_0^{\bar{t}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}\, d\bar{t}, \qquad (2.4)$$

$$\psi(\bar{t}) = \bar{V}_1(\bar{t}) + \varphi(\bar{t}), \qquad (2.5)$$

$$\bar{p} = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \bar{V}_1(\bar{t}) = \frac{v_1(t)}{U}, \quad \bar{z} = \frac{z}{R_2}, \qquad (2.6)$$

în care U este o viteză constantă convenabil aleasă, $\mathcal{R}$ numărul lui Reynolds definit cu viteza U și lungimea caracteristică R_2, ρ densitatea flui-

dului, iar p presiunea. $B_0(\alpha_n \cdot \bar{r})$ este definit prin

$$B_0(\alpha_n \cdot \bar{r}) = J_0(\alpha_n \bar{r})\ Y_0(\alpha_n \bar{R}_1) - Y_0(\alpha_n \bar{r})\ J_0(\alpha_n \bar{R}_1), \tag{2.7}$$

unde $\bar{R}_1 = R_1/R_2$.

Viteza $\bar{v}(\bar{r}) = \bar{u}$ satisface următoarele condiții la limită :

$$\text{la } \bar{r} = \bar{R}_1,\ \bar{u} = \psi(\bar{t}) \text{ și la } \bar{r} = 1,\ \bar{u} = \varphi(\bar{t}). \tag{2.8}$$

Pentru simplificarea calculelor se va presupune că gradientul de presiune $\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}$, deci și $\frac{\partial p}{\partial z}$, nu depinde de timp.

Rădăcinile ecuației (2.2) s-au determinat folosind pentru J_0 și Y_0 dezvoltările polinomiale din [1]. De exemplu, pentru J_0 și $\alpha \leqslant 3$, se poate folosi relația :

$$J_0(\alpha) = 1 - 2{,}2499997\left(\frac{\alpha}{3}\right)^2 + 1{,}2656208\left(\frac{\alpha}{3}\right)^4 -$$

$$- 0{,}3163866\left(\frac{\alpha}{3}\right)^6 + 0{,}0444479\left(\frac{\alpha}{3}\right)^8 - 0{,}00394444\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{10} +$$

$$+ 0{,}0002100\left(\frac{\alpha}{3}\right)^{12} + \varepsilon,$$

eroarea de calcul ε fiind mai mică decît $5 \cdot 10^{-8}$.

Folosind dezvoltări similare pentru Y_0, s-a făcut o separare a rădăcinilor ecuației determinîndu-se apoi prin metoda înjumătățirii intervalului rădăcinile cu o eroare de 10^{-6}. Tabelul 1 conține valorile primelor opt rădăcini pentru $k = 0{,}2\ ;\ 0{,}4\ ;\ 0{,}6\ ;\ 0{,}8$.

Tabelul 1

k	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7	α_8
0,2	3,8160	7,786	11,732	15,670	19,604	23,536	27,466	31,396
0,4	5,1840	10,44	15,668	20,929	26,168	31,406	36,643	41,880
0,6	7,828	15,694	23,553	31,409	39,265	47,119	54,974	62,828
0,8	15,698	31,411	47,120	62,829	78,538	94,246	109,956	125,663

Presupunînd că gradientul de presiune nu depinde de timp, funcția $\varphi(\bar{t})$ are forma

$$\varphi(\bar{t}) = \mathscr{R}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}\bar{t}, \tag{2.9}$$

i ar dacă ambii cilindri sînt consideraţi fixi ($V_1(t) = 0$), atunci $\varphi(\bar{t}) = \psi(\bar{t})$ şi (2.1) devine :

$$\bar{v} = \pi \sum_n \frac{\alpha_n^2 J_0(\alpha_n)\, B_0(\alpha_n \bar{r})}{J_0^2(\alpha_n \bar{R}_1) - I_0^2(\alpha_n)} e^{-\alpha_n^2 \bar{t}} \left\{ \frac{\pi}{2} J_0(\alpha_n) \int_{\bar{R}_1}^1 \bar{r}\, \bar{v}(\bar{r})\, B_0(\alpha_n \bar{r})\, d\bar{r} + \right.$$

$$\left. + [J_0(\alpha_n \bar{R}_1) - J_0(\alpha_n)] \left(\frac{1 - e^{-\alpha_n^2 \bar{t}}}{\alpha_n^4} - \bar{t} \frac{e^{-\alpha_n^2 \bar{t}}}{\alpha_n^2} \right) \mathscr{R} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \right\} - \mathscr{R} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \bar{t}. \tag{2.10}$$

Folosind expresia (A—4) din anexa lucrării se obţine pentru cazul cilindrilor fixi :

$$\bar{v}(\bar{r}) = - \frac{\mathscr{R}}{8} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} f(\bar{r}, k) \tag{2.11}$$

unde $f(\bar{r}, k) = 1 - \bar{r}^2 + \dfrac{k^2 - 1}{\ln k} \ln \bar{r}$,

iar $\mathscr{R}$ este numărul Reynolds definit cu viteza U şi lungimea $2 R_2$.

Variaţia funcţiei $f(\bar{r}, k)$ este prezentată în figura 2. Se observă că ea prezintă un maxim în raport cu $\bar{r}$ pentru $\bar{r} = \sqrt{\dfrac{k^2 - 1}{2 \ln k}}$.

Cu notaţiile introduse mai înainte, se poate scrie :

$$\frac{\bar{v}}{\mathscr{R} \dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}} = - \pi \sum_n \alpha_n^2 \frac{J_0(\alpha_n)\, B_0(\alpha_n \bar{r})}{J_0^2(\alpha_n \bar{R}_1) - J_0^2(\alpha_n)} e^{-\alpha_n^2 \bar{t}} \left\{ \frac{\pi}{16} f(\bar{r}, k) \int_{\bar{R}_1}^1 \bar{r} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot f(\bar{r}, k)\, B_0(\alpha_n \bar{r})\, d\bar{r} + [J_0(\alpha_n \bar{R}_1) - J_0(\alpha_n)] \left(\frac{1 - e^{-\alpha_n^2 \bar{t}}}{\alpha_n^4} - \bar{t} \frac{e^{-\alpha_n^2 \bar{t}}}{\alpha_n^2} \right) \right\} - \bar{t}. \tag{2.12}$$

Un mare interes pentru practică îl prezintă coeficientul de rezistenţă. Expresia acestuia se găseşte plecînd de la pierderea de presiune scrisă sub forma

$$\Delta p = \rho \frac{U_m^2}{2} \frac{l}{2 R_2 (1 - k)} \lambda \tag{2.13}$$

şi viteza medie definită prin relaţia

$$\pi R_2^2 (1 - k^2)\, U_m = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} v r\, dr. \tag{2.14}$$

În relațiile de mai sus s-a notat cu U_m viteza medie și cu λ coeficientul de rezistență din spațiul inelar.

Din combinarea celor două expresii se obține

$$\lambda = \frac{(1-k^2)(1-k)}{16[A+\bar{t}(1-k)^2]} \cdot \frac{64}{\mathcal{R}}, \tag{2.15}$$

unde $\mathcal{R}$ reprezintă numărul Reynolds definit cu viteza medie U_m și lungimea $2R_2$, iar cu A s-a notat

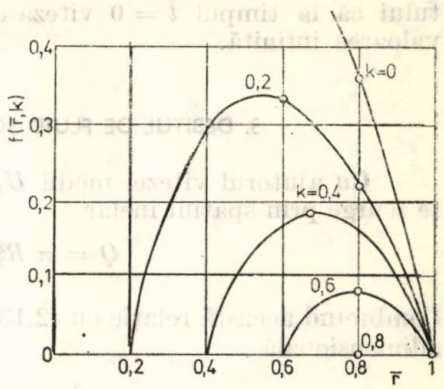


Fig. 2

$$A = -2\int_k^1 \left(\frac{\bar{v}}{\mathcal{R}\dfrac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}} + \bar{t} \right) \bar{r}\, d\bar{r}.$$

În figura 3 se prezintă variația raportului $\lambda\mathcal{R}/64$ funcție de timp și parametrul k. Dacă se notează cu λ_s coeficientul de rezistență pentru spațiul inelar în care există o mișcare staționară, se observă că variația coeficientului sus menționat este identică cu variația raportului λ/λ_s.

În tabelul 2 se prezintă comparativ valorile raportului $\mathcal{R} \cdot \lambda_s/64$ calculat cu formula propusă în [5] și cu formula obținută în această lucrare. Se observă că diferențele sînt nesemnificative și se datoresc faptului că în calculele prezentate nu s-au luat decît primele 12 rădăcini ale ecuației (2.2), iar calcularea lui λ s-a făcut la timpul $\bar{t} = 0{,}00001$ și nu la $\bar{t} = 0$.

Coeficientul de rezistență eλ_s coincide la momentul $\bar{t} = 0$ cu cel cor spunzător mișcării staționare deoarece, în acest moment, distribuția vitezei în spațiul inelar este identică cu aceea la mișcarea staționară. Se observă de asemenea că pentru un tub cu secțiune circulară, în cazul mișcării nestaționare, din cauza fap-

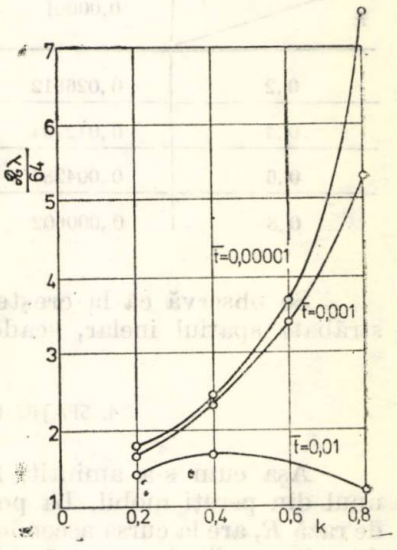


Fig. 3

Tabelul 2

k	0,2	0,4	0,6	0,8
$\mathcal{R}\,\lambda_s/64$	1,803754	2,466490	3,733878	7,493881
$\mathcal{R}\lambda/64$	1,803690	2,479553	3,731865	7,471359

tului că la timpul $\bar{t} = 0$ viteza este nulă, coeficientul de rezistență are valoarea infinită.

3. DEBITUL DE FLUID SCURS PRIN SPAȚIUL INELAR

Cu ajutorul vitezei medii U_m se poate calcula debitul de fluid care se scurge prin spațiul inelar

$$Q = \pi R_2^2(1 - k^2)\, U_m. \tag{3.1}$$

Combinînd această relație cu (2.13) și (2.14) se obține următoarea expresie adimensională

$$\frac{Q}{(\pi \Delta p R_2^4/\mu l)} = A + \bar{t}(1 - k^2). \tag{3.2}$$

În tabelul 3 sînt date valorile raportului din membrul stîng al relației (3.2), în funcție de k și $\bar{t}$

Tabelul 3

k \ $\bar{t}$	0,00001	0,0001	0,001	0,01
0,2	0,026612	0,026656	0,02713	0,032831
0,4	0,012704	0,012734	0,013175	0,018571
0,6	0,004287	0,004318	0,004664	0,009264
0,8	0,000602	0,000620	0,000848	0,003721

Se observă că la creșterea parametrului k, debitul de fluid care străbate spațiul inelar, scade, dar crește odată cu timpul.

4. SPAȚIU INELAR CU PERETE MOBIL

Așa cum s-a amintit, la pompajul de adîncime, spațiul inelar are unul din pereți mobil. La pompele tip P, suprafața cilindrică interioară de rază R, are la cursa ascendentă a garniturii de prăjini viteza $v(t)$, direcția de mișcare fiind contrară mișcării fluidului. Din această cauză, pentru același gradient de presiune realizat pe spațiul inelar, la cursa ascendentă debitul de fluid este $Q - Q_a$, iar la cursa descendentă, $Q + Q_a$. Prin Q s-a notat debitul de fluid pentru spațiul inelar cu pereți fixi, iar Q_a reprezintă debitul de fluid antrenat de peretele mobil și provine din termenul $V \dfrac{\ln r}{\ln k}$ care apare în expresia vitezei (A — 4). Evident, V este valoarea pe care o are $v(t)$ în fiecare moment al mișcării.

Debitul Q_a este dat de expresia

$$Q_a = 2\pi \int_{R_1}^{R_2} V \frac{\ln r}{\ln k} r \, dr = \frac{\pi R_2^2}{2} V \frac{k^2 - 1 - 2k^2 \ln k}{\ln k}. \quad (4.1)$$

Dacă se notează cu $\overline{V}$ viteza medie pe intervalul $0 - T$ definită prin

$$\overline{V} = \frac{1}{T} \int_0^T V \, dt,$$

rezultă pentru volumul de fluid antrenat de peretele mobil

$$V_a = \frac{\pi R_2^2}{2} \overline{V} T \frac{k^2 - 1 - 2k^2 \ln k}{\ln k}. \quad (4.2)$$

Tabelul 4 conţine valorile raportului dintre V_a şi $0{,}5\,\pi R_2^2 \overline{V} T$ pentru diverse valori ale lui k

Tabelul 4

k	0,2	0,4	0,6	0,8	0,9992	0,9994	0,9996	0,9998
$\frac{V_a}{0{,}5\pi R_2^2 \overline{V} T}$	0,516480	0,596739	0,532872	0,333308	0,002398	0,001799	0,001199	0,000599

Valoarea maximă a volumului adimensional $V_a/0{,}5\,\pi R_2^2 \overline{V} T$, în raport cu parametrul k, se obţine prin derivarea în raport cu k a expresiei (4.2). Egalînd cu zero această derivată se obţine că valoarea lui k pentru care volumul de fluid scurs este maxim este dată de rădăcina ecuaţiei

$$1 + 2k^2 \ln k = k^2[4(\ln k)^2 + 1]. \quad (4.3)$$

Rezolvarea acestei ecuaţii trancendente s-a făcut prin metoda înjumătăţirii intervalului. S-a obţinut $k = 0{,}407935$, valoarea corespunzătoare a maximului volumului fiind 0,596815. Se observă că acest rezultat concordă foarte bine cu cel prezentat în tabelul 4. Se observă de asemenea că volumul antrenat de fluid este nul la $k=0$ şi la $k=1$. Acest lucru este evident deoarece la $k=0$ cilindrul interior al spaţiului inelar lipseşte, nefiind deci o antrenare a fluidului, iar la $k=1$, spaţiul inelar este inexistent.

5. CONCLUZII

Studiul problemelor legate de mişcarea nestaţionară a fluidelor vîscoase într-un spaţiu inelar prezintă deosebit interes din punct de vedere tehnic.

În lucrare se consideră cazul spațiului inelar cu pereții fixi și cazul în care un perete este mobil.

Pentru cazul unui spațiu inelar cu ambii pereți fixi, coeficientul de rezistență depinde de raportul razelor celor două suprafețe cilindrice și de timp. Se arată că pentru timpi mici, creșterea raportului razelor implică, ca și în cazul mișcării staționare, creșterea coeficientului de rezistență. De asemenea, debitul și volumul de fluid care se scurge prin spațiul inelar este dependent de raportul razelor.

În cazul în care una din suprafețele cilindrice este mobilă, volumul de fluid depinde în plus și de viteza peretelui. S-a stabilit că debitul și volumul de fluid antrenat sînt maxime atunci cînd raportul razelor este 0,407935.

ANEXA A

Proiectînd ecuația de mișcare a unui fluid pe axa Oz, se obține

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{A-1}$$

Prin integrare se obține imediat expresia lui v

$$v=\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}r^2+C_1\ln r+C_2, \tag{A-2}$$

constantele C_1 și C_2 determinîndu-se din condițiile

$$\begin{aligned} &\text{la } r=R_1 && v=V,\\ &\text{la } r=R_2 && v=0. \end{aligned} \tag{A-3}$$

După un calcul simplu se obține

$$C_1=\frac{V}{\ln\frac{R_1}{R_2}}-\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{R_1^2-R_2^2}{\ln\frac{R_1}{R_2}} \quad \text{și}$$

$$C_2=\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}\frac{R_1^2-R_2^2}{\ln\frac{R_1}{R_2}}-\frac{V}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\ln R_2-\frac{1}{4\mu}\frac{\partial p}{\partial z}R_2^2$$

și pentru $\bar{v}$

$$\bar{v}=\frac{\mathscr{R}}{8}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}}\left(\bar{r}^2-1-\frac{k^2-1}{\ln k}\ln\bar{r}\right)+\bar{V}\frac{\ln\bar{r}}{\ln k}, \tag{A-4}$$

unde am introdus variabilele adimensionale $\bar{v} = \frac{v}{U}$, $\bar{V} = \frac{V}{U}$, iar cu $\mathscr{R}$ am notat numărul Reynolds dat de viteza U şi lungimea $2R_2$, μ fiind vîscozitatea dinamică a fluidului.

Primită la redacţie la 28 februarie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1968.
2. G. Ioachim, C. Popa, *Exploatarea zăcămintelor de ţiţei*, Edit. tehnică, Bucureşti, 241—243.
3. T. Oroveanu, P. Ionescu, *Determinarea pierderilor de lichid prin spaţiul dintre piston şi cilindru la pompele de extracţie cu luarea în considerare a excentricităţii acestora*, Buletinul Institutului de Petrol, Gaze şi Geologie, **VI**, 65—73 (1960).
4. T. Oroveanu, *Asupra unor probleme de mişcare nestaţionară a unui fluid vîscos*, St. cerc. mec. apl., **31**. *2*, 429—442 (1972).
5. Al. D. Stan, *Curgerea laminară a fluidelor în spaţii inelare*, St. cerc. mec. apl., **38**, *5*, 637—648 (1979).

ASUPRA TRANSPORTULUI PRIN CONDUCTE AL PETROLULUI BRUT SATURAT CU GAZE

de NGUYEN XUAN MINH și TEODOR OROVEANU
Institutul de petrol și gaze, Ploiești

În lucrare se studiază un aspect al transportului prin conducte al petrolului brut saturat cu gaze și anume posibilitatea reducerii căderii de presiune în acest caz. Sînt examinate atît transportul în regim laminar, cît și acela în regim turbulent (în cele trei situații posibile și anume conducte netede, mixte și rugoase). Se arată că eficiența maximă a acestui procedeu se obține în cazul regimului laminar, în timp ce în regim turbulent în conducte rugoase eficiența este nulă. Procedeul este utilizabil, în principiu, pentru transportul la distanță al petrolului brut cu viscozitate mare.

1. Transportul prin conducte al petrolului brut cu viscozitate mare ridică anumite probleme datorită faptului că necesită presiuni de pompare ridicate. Pentru a se obține micșorarea acestor presiuni apare deci necesar să se reducă viscozitatea petrolului brut transportat. Acest lucru se poate realiza în mai multe moduri, dintre care amintim amestecarea cu petrol brut cu viscozitate mică, încălzirea înainte de introducerea în conductă și saturarea petrolului brut cu gaze, tot înainte de pomparea prin conductă. În cele ce urmează ne vom ocupa de acest ultim procedeu, care a fost luat în considerație din ce în ce mai frecvent în ultimii ani de către specialiștii în problemele de transport prin conducte. Într-adevăr, este cunoscut faptul că petrolul brut cu gaze în soluție are o viscozitate mai mică decît acela degazat; la o presiune dată, viscozitatea petrolului scade pe măsură ce cantitatea de gaze dizolvate crește și este minimă atunci cînd petrolul este saturat cu gaze. Prin urmare, dacă se alege o valoare convenabilă a presiunii de saturație și se menține pe toată lungimea conductei presiunea la o valoare superioară acesteia, petrolul va avea o viscozitate practic constantă și sensibil mai mică decît în cazul în care nu conține gaze în soluție.

Posibilitățile oferite de acest procedeu în sensul facilitării transportului la distanță al petrolului brut cu viscozitate mare, au condus la elaborarea unor studii teoretice și experimentale, ca de exemplu [1], [4] și [5], în vederea clarificării unor aspecte ale problemei. În cele ce urmează, ne vom concentra atenția asupra schimbării căderii de presiune pe lungimea conductei, atunci cînd se trece de la pomparea petrolului brut degazat la aceea a petrolului brut saturat cu gaze, în funcție de regimul de curgere. Acest studiu este necesar deoarece, așa cum se poate afirma, într-o oarecare măsură, de la bun început și așa cum vom arăta mai departe, procedeul la care ne referim nu este totdeauna eficace.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 4, 1980, P. 511–519

2. Pentru cazul în care regimul din conductă este laminar sau turbulent neted la valori relativ mici ale numărului lui Reynolds ($\mathscr{R} < 10^5$), căderea de presiune, exprimată în unităţi de lungime de coloană de lichid, poate fi exprimată prin formula

$$H = \beta \frac{Q^{2-m} \mu^m}{\rho^m d^{5-m}} l, \tag{1}$$

propusă de L. S. Leibenzon. Cu Q este notat debitul, cu μ viscozitatea dinamică, cu ρ masa specifică, ambele ale lichidului transportat, cu d diametrul interior al conductei şi cu l lungimea acesteia. Coeficientul β şi exponentul m depind de regimul din conductă. Astfel, pentru regimul laminar avem

$$\beta = \frac{128}{\pi g}, \quad m = 1, \tag{2}$$

lar în regim turbulent neted

$$\beta = \frac{0{,}241}{g}, \quad m = 0{,}25, \tag{3}$$

atunci cînd coeficientul de rezistenţă λ se determină cu ajutorul formule lui Blasius ($\mathscr{R} < 10^5$).

În cazul în care petrolul brut este saturat, cu gaze, viscozitatea şi masa sa specifică scad şi formula precedentă (1) se scrie

$$H_* = \beta \frac{Q_*^{2-m} \mu_*^m}{\rho_*^m d^{5-m}} l, \tag{4}$$

asteriscul fiind utilizat pentru notarea mărimilor care se schimbă ca valoare faţă de cele corespunzătoare din (1). Această notaţie afectează şi debitu deoarece Q_* reprezintă debitul total de lichid şi gaze dizolvate în el. Dacă notăm cu m_p debitul masic de petrol şi cu m_g debitul masic de gaze, avem relaţia evidentă

$$Q_* = \frac{m_p + m_g}{\rho_*}. \tag{5}$$

Putem scrie însă

$$m_p = \rho Q', \qquad m_g = \rho_g Q_g, \tag{6}$$

unde Q' reprezintă debitul de petrol brut degazat. Q_g debitul de volum de gaze, în condiţii normale şi ρ_g masa specifică a gazelor, de asemenea în condiţii normale.

Punînd

$$Q_g = \Phi\, Q', \tag{7}$$

unde Φ este factorul de gaze, formula (5) devine

$$Q_* = \frac{\rho + \Phi \rho_g}{\rho_*}\, Q', \tag{8}$$

după ce ţinem seama şi de relaţiile (6).

Revenind la formula (4), aceasta se scrie

$$H_* = \beta \frac{\left[\rho\left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right) Q'\right]^{2-m} \mu_*^m}{\rho_*^2 d^{5-m}}\, l \tag{9}$$

şi după împărţirea cu (1) obţinem

$$\frac{H_*}{H} = \left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right)^{2-m} \left(\frac{Q'}{Q}\right)^{2-m} \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^2 \left(\frac{\mu_*}{\mu}\right)^m. \tag{10}$$

Înainte de a aduce unele precizări cu privire la variaţia în funcţie de Φ a masei specifice ρ_* şi a viscozităţii μ_*, observăm că avem în orice caz $\rho_* < \rho$ şi $\mu_* < \mu$ ceea ce înseamnă că efectul scăderii masei specifice este negativ în timp ce efectul scăderii viscozităţii este pozitiv.

Atît pentru fixarea ideilor cît şi pentru a avea un criteriu de comparaţie mai precis între cele două genuri de transport, vom admite că debitul de petrol brut degazat transportat este acelaşi în ambele situaţii, ceea ce înseamnă că avem $Q' = Q$ şi

$$\frac{H_*}{H} = \left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right)^{2-m} \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^2 \left(\frac{\mu_*}{\mu}\right)^m. \tag{11}$$

Pentru a merge mai departe, este necesar să precizăm dependenţa masei specifice ρ_* şi a viscozităţii μ_* de factorul de gaze Φ. În conformitate cu [2], acceptăm următoarele relaţii

$$\rho_* = \rho\, e^{-b\Phi}, \qquad \mu_* = \mu\, e^{-a\Phi}, \tag{12}$$

coeficienţii experimentali a şi b variind, după [5], între limitele

$$a \approx 0{,}01 \div 0{,}1\,; \qquad b \approx 0{,}0005 \div 0{,}02, \tag{13}$$

în funcţie de natura petrolului brut considerat.

După înlocuirea în (11) a expresiilor (12) pentru ρ_* şi μ_* obţinem

$$\frac{H_*}{H} = \left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right)^{2-m} e^{(2b - ma)\Phi}, \tag{14}$$

relaţia care ne permite să tragem o serie de concluzii referitoare la cazurile examinate. Astfel, pentru regimul laminar, în care $m = 1$, rezultă

$$\frac{H_*}{H} = \left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right) e^{(2b-a)\Phi} \tag{15}$$

şi deoarece expresia din paranteză este foarte apropiată de unitate, raportul $\frac{\rho_g}{\rho}$ fiind de ordinul 10^{-3}, iar Φ de ordinul zecilor, valoarea raportului $\frac{H_*}{H}$ depinde în esenţă de funcţia exponenţială. Pentru ca acest raport să fie subunitar, respectiv să se obţină un efect pozitiv, trebuie deci să avem

$$2b - a < 0, \tag{16}$$

iar dacă ţinem seama de faptul că expresia din paranteză din (15) este supraunitară, mai apare şi condiţia suplimentară

$$e^{(a-2b)\Phi} > 1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}. \tag{17}$$

Trecînd la cazul regimului turbulent neted ($\mathscr{R} < 10^5$), în care $m = 0{,}25$, formula (14) devine

$$\frac{H_*}{H} = \left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right)^{1{,}75} e^{(2b-0{,}25a)\Phi} \tag{18}$$

şi raportul $\frac{H_*}{H}$ este subunitar dacă avem

$$2b - 0{,}25\ a < 0, \tag{19}$$

respectiv

$$e^{(0{,}25a-2b)\Phi} > \left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right)^{1{,}75}. \tag{20}$$

Rezultă deci că şi în acest caz pomparea petrolului brut saturat cu gaze poate să aibă un efect pozitiv, în condiţii ceva mai restrictive deoarece condiţia (16) ne dă $b < 0{,}5\ a$, în timp ce din (19) rezultă $b < 0{,}125\ al.$ Tot astfel, condiţia (20) este mai restrictivă decît (17).

Pentru a compara cele două cazuri, examinăm raportul

$$\frac{\left(\frac{H_*}{H}\right)_l}{\left(\frac{H_*}{H}\right)_{tn}} = \frac{e^{-0{,}75a\Phi}}{\left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right)^{0{,}75}} \tag{21}$$

unde indicele l înseamnă laminar, iar indicele tn turbulent neted. Se observă imediat că, oricare ar fi a, raportul definit prin (21) este subunitar, ceea ce înseamnă că transportul în regim laminar este mai eficient decît transportul în regim turbulent neted. Cu cît a și Φ au valori mai ridicate, cu atît transportul în regim laminar este mai avantajos ; mai remarcăm faptul că variația masei specifice, respectiv coeficientul b, nu exercită nici o influență asupra valorii raportului (21).

Formula (1) precum și acelea deduse cu ajutorul ei permit să se examineze și cazul regimului turbulent rugos pentru care avem $m = 0$ și

$$\beta = \frac{8\lambda}{\pi^2 g}. \tag{22}$$

Formula (14) devine deci

$$\frac{H_*}{H} = \left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right)^2 e^{2b\Phi} \tag{23}$$

și se observă că, oricare ar fi b și Φ, avem $H_* > H$. Prin urmare, în acest caz procedeul nu numai că nu prezintă nici un avantaj, ci dimpotrivă are un efect negativ, conducînd la sporirea căderii de presiune. Acest rezultat era de așteptat deoarece coeficientul de rezistență λ depinde numai de rugozitatea relativă. Deoarece λ este independent de numărul lui Reynolds, căderea de presiune nu depinde de variația viscozității. În formula (23) apare numai efectul variației masei specifice care, în conformitate cu formula generală (10), este negativ.

Pentru completarea acestor considerații au mai rămas de examinat cele două cazuri care nu pot fi studiate cu ajutorul formulei (1). Primul dintre acestea este regimul turbulent neted la valori mari ale numărului lui Reynolds ($\mathscr{R} > 10^5$), pentru care coeficientul de rezistență se poate exprima sub forma

$$\lambda = A + \frac{B}{\mathscr{R}^m}. \tag{24}$$

Una dintre cele mai cunoscute formule de acest gen este aceea a lui Nikuradse cu $A = 0{,}0032$, $B = 0{,}221$ și $m = 0{,}237$.

Un calcul simplu ne conduce la exprimarea căderii de presiune, în aceleași unități ca și mai înainte, sub forma

$$H = \alpha \frac{Q^2}{d^5} l + \beta \frac{Q^{2-m} \mu^m}{\rho^m d^{5-m}} l, \tag{25}$$

unde

$$\alpha = \frac{8A}{\pi^2 g}, \qquad \beta = \frac{8B}{4^m \pi^{2-m} g}. \tag{26}$$

De fapt, formula (25) conține formula (1), cu toate variantele ei ca pe niște cazuri particulare ($\alpha = 0$, B și m cu diverse valori corespunzătoare situațiilor studiate).

Procedînd ca mai înainte scriem, pentru transportul petrolului brut saturat cu gaze,

$$H_* = \alpha \frac{Q_*^2}{d^5} l + \beta \frac{Q_*^{2-m} \mu_*^m}{\rho_*^m d^{5-m}} l \tag{27}$$

şi obţinem raportul

$$\frac{H_*}{H} = \frac{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\mu_*^m d^m}{\rho_*^m Q_*^m}\right) Q_*^2}{\left(1 + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\mu^m d^m}{\rho^m Q^m}\right) Q^2} \tag{28}$$

sau, după ce utilizăm expresia (8) a debitului Q_*,

$$\frac{H_*}{H} = \left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right)^2 \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^2 \left(\frac{Q'}{Q}\right)^2 \frac{1 + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\mu_*^m d^m}{\rho_*^m Q_*^m}}{1 + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\mu^m d^m}{\rho^m Q^m}}, \tag{29}$$

formulă care corespunde cu (10).

Dacă admitem şi de data aceasta, din aceleaşi motive ca şi mai înainte, $Q' = Q$ şi introducem notaţiile

$$C = \frac{\mu^m d^m}{\rho^m Q^m}, \qquad C_* = \frac{\mu_*^m d^m}{\rho_*^m Q_*^m}, \tag{30}$$

găsim

$$\frac{H_*}{H} = \left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right)^2 \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^2 \frac{1 + \frac{\beta}{\alpha} C_*}{1 + \frac{\beta}{\alpha} C}. \tag{31}$$

Pe de altă parte, avem

$$\frac{C_*}{C} = \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^m \left(\frac{\mu_*}{\mu}\right)^m \left(\frac{Q}{Q_*}\right)^m = \frac{\left(\frac{\mu_*}{\mu}\right)^m}{\left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right)^m}, \tag{32}$$

de unde rezultă imediat $C_* < C$, deoarece $\mu_* < \mu$. În acest caz, există deci şi inegalitatea

$$\frac{1 + \frac{\beta}{\alpha} C_*}{1 + \frac{\beta}{\alpha} C} < 1. \tag{33}$$

Dacă punem condiția $H_* < H$, aceasta se relizează atunci cînd

$$\left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right)^2 \left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^2 < \frac{1 + \frac{\beta}{\alpha} C}{1 + \frac{\beta}{\alpha} C_*} \tag{34}$$

sau, dacă utilizăm prima formulă (12),

$$\left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right)^2 e^{2b\Phi} < \frac{1 + \frac{\beta}{\alpha} C}{1 + \frac{\beta}{\alpha} C_*} \cdot \tag{35}$$

Deoarece membrul drept al acestei ultime inegalități este supraunitar, așa cum rezultă din (33), iar paranteza din membrul stîng are o valoare cu puțin mai mare decît unitatea, realizarea inegalității (35) este posibilă pentru valori foarte mici ale coeficientului b. Prin urmare, în cazul acestui regim se poate realiza, în principiu, o micșorare a căderii de presiune cînd transportăm petrolul brut saturat cu gaze, dar mai puțin accentuată decît în cazul regimului laminar și numai pentru petrolurile brute la care b este foarte mic.

În cazul regimului turbulent mixt, în care coeficientul de rezistență λ depinde simultan de numărul lui Reynolds și de rugozitatea relativă, nu mai este posibil să se efectueze un calcul similar cu cele precedente, deoarece formulele existente pentru λ au o structură complicată. Citățm în acest sens formula cea mai utilizată și anume a lui Colebrook și White în care λ apare sub formă implicită.

O apreciere a situației se poate face însă scriind pentru H formula generală

$$H = \frac{8 Q^2 \lambda}{\pi^2 g d^5} l \tag{36}$$

precum și

$$H_* = \frac{8 Q_*^2 \lambda_*}{\pi^2 g d^5} l \tag{37}$$

de unde obținem

$$\frac{H^*}{H} = \left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right)\left(\frac{\rho}{\rho_*}\right)^2 \frac{\lambda_*}{\lambda}, \tag{38}$$

după ce utilizăm și formula (8) și admitem, ca și în cazurile precedente, $Q' = Q$.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖNYVTÁR 1343

Tot în cazul egalității debitelor de lichid degazat transportat, raportul numerelor lui Reynolds este

$$\frac{\mathcal{R}_*}{\mathcal{R}} = \left(1 + \Phi \frac{\rho_g}{\rho}\right) \frac{\mu}{\mu_*}, \tag{39}$$

așa cum se poate arăta cu ușurință. Prin urmare, deoarece paranteza este supraunitară și $\mu^* < \mu$, rezultă $\mathcal{R}_* > \mathcal{R}$. La această creștere a numărului lui Reynolds corespunde o scădere a coeficientului de rezistență și avem așadar $\lambda_* < \lambda$. Dacă această scădere a coeficientului de rezistență este mai accentuată decît aceea a masei specifice, se poate ajunge la $H_* < H$, deoarece, așa cum am mai precizat expresia $\Phi \frac{\rho_g}{\rho}$ are în general valori foarte mici. În orice caz, o apreciere cantitativ corectă se poate face numai prin exemple de calcul efectiv, se poate afirma că efectul pozitiv, respectiv micșorarea căderii de presiune, nu este important.

3. În încheierea acestor considerații, dăm și un exemplu de calcul, pentru regimul laminar, la care am arătat că eficiența pompării petrolului brut saturat cu gaze este maximă.

Considerăm astfel $\rho = 850$ kg/m ^{3}, $\rho_g = 0{,}72$ kg/m^3, $a = 0{,}02$, $b = 0{,}004$ și $\Phi = 17$ m^3 N/m^3. Aplicînd formula (15), obținem

$$\frac{H_*}{H} = \left(1 + 17 \frac{0{,}72}{850}\right) e^{-0{,}204} = 0{,}827,$$

deci o reducere cu 17,28 % a căderii de presiune.

În același timp, avem, dacă utilizăm formula (39),

$$\frac{\mathcal{R}_*}{\mathcal{R}} = \left(1 + 17 \frac{0{,}72}{850}\right) e^{0{,}34} = 1{,}425,$$

numărul lui Reynolds înregistrînd prin urmare o creștere apreciabilă și anume 42,5 %. Trebuie deci ca numărul lui Reynolds $\mathcal{R}$ pentru petrolul brut degazat să nu depășească valoarea 1614, pentru ca valoarea lui $\mathcal{R}_*$ să nu întreacă pe aceea critică. Dacă această condiție nu este realizată, se trece în regim turbulent și calculul precedent este lipsit de semnificație.

Mai precizăm că valoarea considerată a lui Φ corespunde la o presiune de 29,5 bari și o temperatură de 293°K [3].

4. În concluzie, putem afirma următoarele :

— eficiența maximă a transportului petrolului brut saturat cu gaze se realizează în regim laminar, reducerea căderii de presiune fiind în acest caz cea mai accentuată ;

— în regim turbulent, pentru conducte rugoase, acest procedeu nu are nici o eficiență ;

— în regim turbulent, pentru conducte netede și la valori moderate ale numărului lui Reynolds, transportul petrolului brut saturat cu gaze mai poate prezenta o oarecare eficiență ;

— în regim turbulent, pentru conducte netede, la valori mari ale numărului lui Reynolds și pentru conducte mixte, procedeul poate avea o eficiență, destul de redusă, numai în anumite condiții.

Primită la redacție la 20 februarie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. V. I. ANTIPEV, *O vlianii rastvorennogo v nefti gaza na proizvoditelnosti nefteprovoda*, Transport i hranenie nefti i gaza, *1* (1973).
2. G. I. FUKS, *Viazkosti i plasticinosti nefteproduktoprovodov*, Gostoptehizdat, Moskva, 1951.
3. G. MANOLESCU, *Fizica zăcămintelor de hidrocarburi*, Editura didactică și pedagogică, București, 1964.
4. V. I. ȚVETKOV, *O proizvoditelnosti truboprovodov, perekacivaiușcia gazonasișcennuiu nefti*, Transport i hranenie nefti i gaza, *11*, (1971).
5. V. I. ȚVETKOV, *Ob issledovanii truboprovodnogo transporta gazonasișcennoi nefti*, Transport i hranenie nefti i gaza, *5*, (1972).

ECUAȚII DE MIȘCARE GLOBALE PENTRU MULTIPOLII ELASTOCINEMATICI AI MECANISMELOR PLANE

de MIHAI BUCULEI
Universitatea din Craiova

Folosind teoria distribuțiilor, în lucrare se deduc ecuații de mișcare în deplasările longitudinale și transversale pentru multipolii elastocinematici ai mecanismelor plane. Se consideră în special cazul diadelor cu cuplă interioară de rotație. Ecuațiile de mișcare se deduc considerînd multipolul tip diadă ca o bară liniar elastică cu tangenta discontinuă în centrul cuplei interioare de rotație. Se dau condițiile la limită aferente.

În [2, 4, 5, 6], plecînd de la relațiile stabilite în [3] pentru cinetica solidelor liniar elastice în mișcare de rototranslație, s-au dedus ecuații de mișcare în deplasări pentru elementele cinematice ale mecanismelor plane sau spațiale. Esența metodei de analiză elastocinematică, propusă în lucrările citate mai sus, constă în rezolvarea ecuațiilor de mișcare scrise pentru fiecare element cinematic în parte. Interconectarea între diferite elemente cinematice se face prin scrierea condițiilor la limită aferente fiecărui element cinematic.

În lucrarea de față se scriu ecuații de mișcare în deplasări pentru întregul multipol elastocinematic, legătura prin cuple dintre elemente fiind descrisă cu ajutorul distribuțiilor Dirac și Heaviside și al șirurilor reprezentative corespunzătoare. Ecuațiile de mișcare propuse, deși formal mai complicate, dau o descriere mai exactă a comportării la vibrații a lanțului cinematic care compune multipolul, caracterizînd mai intim legăturile între elemente. În lucrarea de față se consideră cazul multipolilor tip diade cu cuple interioare de rotație, adică *RRR*, *RRT*, *TRT*. Se consideră că elementele cinematice sînt bare liniar elastice, omogene și izotope, cu secțiunea constantă.

1. GENERALITĂȚI. ENERGIA CINETICĂ ȘI LUCRUL MECANIC DE DEFORMAȚIE ELASTICĂ

Ne referim la diada *RRR* din figura 1. Așa cum se va constata ulterior, rezultatele stabilite sînt valabile pentru toți multipolii elastocinematici tip diade, cu cuple interioare de rotație. Elementele cinematice 1 și 2 sînt bare drepte liniar elastice, omogene, izotrope și cu secțiunea constantă.

Fie $OA = L_1$; $AB = L_2$; $L_1 + L_2 = L$. Fie s abscisa curbilinie pe linia poligonală OAB : $s \in [0\,;\, L]$. Fie $[\bar{\tau}_1\,;\, \bar{\nu}_1\,;\, \bar{\beta}_1]$ și $[\bar{\tau}_2\,;\, \bar{\nu}_2\,;\, \bar{\beta}_2]$ triedrele

Frenet ataşate elementelor OA şi respectiv AB, versorii β_1 şi β_2 fiind perpendiculare pe planul multipolului ($\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \bar{\beta}$).

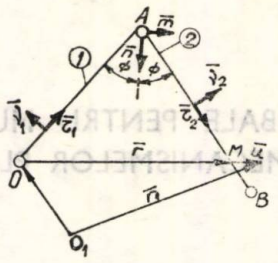


Fig .1. – Diada *RRR* multipol elastocinematic.

Se fac notaţiile

$$H(s - L_1) = \begin{cases} 0; & s < L_1 \\ 1; & s > L_1 \end{cases} \quad \text{— distribuţia Heaviside;}$$

$$\delta(s - L_1) = \begin{cases} 0; & s \neq L_1 \\ \infty; & s = L_1 \end{cases} \quad \text{— distribuţia Dirac;}$$

$$\bar{n} = \frac{\bar{\tau}_2(t) - \bar{\tau}_1(t)}{2\cos\Phi(t)}, \qquad t \text{ fiind timpul;}$$

$$\bar{m} = \bar{\beta} \times \bar{n};$$

ρ_1, ρ_2 = masele specifice ale elementelor 1 şi respectiv 2;
A_1, A_2 — ariile secţiunilor transversale ale elementelor 1 şi respectiv 2;
$\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$ — vitezele unghiulare instantanee ale elementelor 1 şi 2;
$\varepsilon_1(t)$, $\varepsilon_2(t)$ — acceleraţiile unghiulare instantanee ale elementelor 1 şi 2;
$\bar{v}_0(t)$, $\bar{a}_0(t)$ — viteza şi acceleraţia punctului 0;
$\bar{u}(s, t)$ — deplasarea liniar elastică a unui punct oarecare aparţinînd unuia dintre elementele multipolului.

Se poate scrie

$$\bar{\tau}(s, t) = \bar{\tau}_1(t) + 2\bar{n} \cdot \cos\Phi(t) \cdot H(s - L_1),$$

$$\bar{\nu}(s, t) = \bar{\nu}(t) + 2\bar{m} \cdot \cos\Phi(t) \cdot H(s - L_1),$$

$$\bar{u}(s, t) = u_1(s, t)\,\bar{\tau}(s, t) + u_2(s, t)\,\bar{\nu}(s, t),$$

$$\bar{v}_0 = v_{01}\,\bar{\tau}_1 + v_{02}\,\bar{\nu}_1, \qquad (1)$$

$$\bar{a}_0 = a_{01}\,\bar{\tau}_1 + a_{02}\,\bar{\nu}_1,$$

$$\omega(s, t) = \omega_1(t) + 2\,\dot{\Phi}(t) \cdot H(s - L_1); \quad \bar{\omega} = \omega\,\bar{\beta},$$

$$\varepsilon(s,t) = \varepsilon_1(t) + 2\,\ddot{\Phi}\,(t)\cdot H(s-L_1)\;;\;\bar{\varepsilon} = \varepsilon\,\bar{\beta},$$

$$\bar{r}(s,t) = [s + (L_1 - s)(1 + \cos 2\,\Phi)\,H\,(s-L_1)]\,\bar{\tau}_1 +$$

$$+ (s-L_1)\sin 2\Phi\cdot H(s-L_1)\cdot\bar{\nu}_1.$$

Fie $f_n(s)$ și $g_n(s)$ șiruri reprezentative, îndeplinind condițiile cunoscute, astfel ca

$$\lim_{n\to\infty} f_n(s) = H(s-L_1)\,;\;\lim_{n\to\infty} g_n(s) = \delta(s-L_1). \tag{2}$$

În cele ce urmează se vor sublinia cu o bară acele mărimi în care distribuțiile H și δ s-au înlocuit cu șiruri reprezentative.

Fie O_1 un punct fix în plan (fig. 1). Folosind relația

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{r} + \bar{u}, \tag{3}$$

rezultă energia cinetică a multipolului

$$T(t) = \lim_{n\to\infty}\left\{\{F_n(s)\cdot\int_0^L[\bar{v}_0^2 + (\underline{\bar{\omega}}\times\underline{\bar{r}})^2 + \left(\frac{\partial\,\bar{r}}{\partial\,t}\right)^2 +\right.$$

$$+\left(\frac{\partial\,\bar{u}}{\partial\,t}\right)^2 + (\underline{\bar{\omega}}\times\underline{\bar{u}})^2 + 2\,(\bar{v}_0\,;\underline{\bar{\omega}}\,;\underline{\bar{r}}) + 2\,\bar{v}_0\cdot\frac{\partial\,\bar{r}}{\partial\,t} +$$

$$+2\,\bar{v}_0\cdot\frac{\partial\,\bar{u}}{\partial\,t} + 2\,(\bar{v}_0\,;\underline{\bar{\omega}}\,;\underline{\bar{u}}) + 2\,(\underline{\bar{\omega}}\,;\underline{\bar{r}}\,;\frac{\partial\,\bar{r}}{\partial\,t}\Big) +$$

$$+2\Big(\underline{\bar{\omega}}\,;\underline{\bar{r}}\,;\frac{\partial\,\bar{u}}{\partial\,t}\Big) + 2(\underline{\bar{\omega}}\times\underline{\bar{r}})\,(\underline{\bar{\omega}}\times\underline{\bar{u}}) + 2\,\frac{\partial\,\bar{r}}{\partial\,t}\cdot\frac{\partial\,\bar{u}}{\partial\,t} + \tag{4}$$

$$\left.+2\Big(\frac{\partial\,\bar{r}}{\partial\,t}\,;\underline{\bar{\omega}}\,;\underline{\bar{u}}\Big) + 2\Big(\frac{\partial\,\bar{u}}{\partial\,t}\,;\underline{\bar{\omega}}\,;\underline{\bar{u}}\Big)\right]ds\Big\},$$

unde

$$F_n(s) = \frac{1}{2}[\rho_1 A_1 + (\rho_2 A_2 - \rho_1 A_1)\,f_n(s)].$$

Lucrul mecanic de deformație este dat de

$$L_d = \lim_{n\to\infty}\left\{F_n(s)\cdot\int_0^L\left[\frac{\partial}{\partial s}\,(\underline{\bar{u}}\cdot\underline{\bar{\tau}})\right]^2 ds + G_n(s)\cdot\int_0^L\left[\frac{\partial^2}{\partial\,s^2}\,(\underline{\bar{u}}\cdot\underline{\bar{\nu}})\right]^2 ds\right\}, \tag{5}$$

unde

$$G_n(s) = \frac{1}{2}[E_1 I_1 + (E_2 I_2 - E_1 I_1) \cdot f_n(s)],$$

E_1, E_2 — modulele Young corespunzătoare ale elementelor 1 și 2;
I_1, I_2 — momentele de inerție ale secțiunilor transversale ale elementelor 1 și 2 în raport cu fibrele neutre corespunzătoare încovoierii care produce deplasările u_1 și u_2.

Fie $\bar{f}(s, t) = X(s, t)\ \bar{\tau}(s, t) + Y(s, t)\ \bar{\nu}(s, t)$ forța exterioară pe unitatea de lungime, $s \in [0; L]$

Variația lucrului mecanic al forțelor exterioare este

$$\delta L_{ext} = \int_0^L \bar{f}(s, t) \cdot \delta \bar{u} \cdot ds, \tag{6}$$

în final obținîndu-se

$$\delta L_{ext} = \lim_{n \to \infty} \int_0^L \{[X - 4X \cos^2 \Phi(t) \cdot f_n(s) + 4 \cos^2 \Phi(t) \cdot f_n^2(s) \cdot X -$$

$$- 2Y \cos^2 \Phi(t) \cdot f_n(s) + Y \sin 2\Phi(t) \cdot f_n(s)] \cdot \delta u_1 +$$

$$+ [X \sin 2\Phi(t) \cdot f_n(s) - 2 \cos^2 \Phi(t) \cdot X \cdot f_n(s) + Y] \cdot \delta u_2 \}\ ds. \tag{7}$$

Din cele de mai sus se constată că specificul metodei propuse este de a considera diada cu cuplă interioară de rotație ca o bară cu geometrie discontinuu variabilă la abscisa curbilinie $s = L_1$. S-au folosit șirurile reprezentative pentru a da sens, în contextul clasic, operațiilor de integrare și pentru a folosi ulterior calculul variațional în limitele analizei clasice. De altfel folosirea șirurilor reprezentative oferă și o metodă eficace de rezolvare a ecuațiilor de mișcare ce vor fi deduse mai jos, ecuații ce în mod evident vor conține distribuții Heaviside, Dirac și derivate ale distribuției Dirac.

În cazul cînd încărcarea $\bar{f}(s, t)$ nu este o funcție continuă de abscisa curbilinie s, pentru scrierea ei se vor folosi distribuțiile H și δ.

Se remarcă de asemenea că unghiul de transmitere Φ este o funcție cunoscută de timp, ca rezultat al unei analize cinematice, apriorice, făcută în ipoteza rigidității elementelor. Acest lucru reprezintă în fond o aproximație, care însă nu afectează decît nesemnificativ precizia calculelor.

2. ECUAȚII DE MIȘCARE. CONDIȚII LA LIMITĂ

Scriind

$$T(t) = \lim_{n \to \infty} T_n(t); \qquad L_d = \lim_{n \to \infty} L_{d_n}(t),$$

$$\delta L_{ext} = \lim_{n \to \infty} \delta L_{ext}, n, \tag{8}$$

expresiile lui $T_n(t)$, $L_{d_n}(t)$, $\delta L_{ext,n}$ obținîndu-se imediat din (4), (5), (7), pentru deducerea ecuațiilor de mișcare în deplasările $u_1(s, t)$ și $u_2(s, t)$ se folosește principiul lui Hamilton din elastodinamică, sub forma

$$\lim_{n\to\infty} \delta \int_{t_0}^{t_1} (L_{d_n} - T_n - L_{ext,n})\, dt = 0. \tag{9}$$

Înlocuind expresiile cunoscute, procedînd la integrări prin părți repetate ținînd cont de condițiile de sincronism la momentele t_0 și t_1 ca și de condițiile la limită frecvente și considerînd variațiile δu_1 și δu_2 ca fiind arbitrare se obține sistemul de ecuații de mișcare în deplasări :

$$F_1(s, t) \cdot \frac{\partial^4 u_1}{\partial s^4} F_2(s, t) \cdot \frac{\partial^3 u_1}{\partial s^3} + F_3(s, t) \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + F_4(s, t) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial s} +$$

$$+ F_5(s, t) \cdot u_1 + F_6(s, t) \cdot \frac{\partial^4 u_2}{\partial s^4} + F_7(s, t) \cdot \frac{\partial^3 u_2}{\partial s^3} +$$

$$+ F_8(s, t) \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + F_9(s, t) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial s} + F_{10}(s, t) \cdot u_2 +$$

$$+ F_{11}(s, t) \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + F_{12}(s, t) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial t} + F_{13}(s, t) \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} +$$

$$+ F_{14}(s, t) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial t} + F_{15}(s, t) = 0, \tag{10}$$

$$G_1(s, t) \cdot \frac{\partial^4 u_1}{\partial s^4} + G_2(s, t) \cdot \frac{\partial^3 u_1}{\partial s^3} + G_3(s, t) \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} +$$

$$+ G_4(s, t) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial s} + G_5(s, t) \cdot u_1 + G_6(s, t) \cdot \frac{\partial^4 u_2}{\partial s^4} +$$

$$+ G_7(s, t) \cdot \frac{\partial^3 u_2}{\partial s^3} + G_8(s, t) \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2} + G_9(s, t) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial s} +$$

$$+ G_{10}(s, t) \cdot u_2 + G_{11}(s, t) \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + G_{12} \cdot \frac{\partial u_1}{\partial t} +$$

$$+ G_{13}(s, t) \cdot \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} + G_{14}(s, t) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial t} + G_{15}(s, t) = 0. \tag{11}$$

S-a notat

$$F_1(s,t) = -2\beta_1 \cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) + \beta_1 \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1),$$

$$F_2(s,t) = -8\beta_1 \cos^2\Phi \cdot \delta(s-L_1) + 3\beta_1 \sin 2\Phi \cdot \delta(s-L_1),$$

$$F_3(s,t) = -\Omega_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2} + 2\Omega_1 \cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) + 2\Omega_1 \cos\Phi \cdot H(s-L_1) -$$

$$-4\Omega_1 \cos^2\Phi \cdot H^2(s-L_1) - 12\beta_1 \cos^2\Phi \cdot \delta'(s-L_1) + 4\beta_1 \sin 2\Phi \cdot \delta'(s-L_1)$$

$$F_4(s,t) = \alpha\alpha_1 - 2\alpha\alpha_1 \cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) - 2\alpha\alpha_1 \cos\Phi \cdot H(s-L_1) +$$

$$+4\alpha\alpha_1 \cos^2\Phi \cdot H^2(s-L_1) + 4\Omega_1 \cos^2\Phi \cdot \delta(s-L_1) + 4\Omega_1 \cos\Phi \cdot \delta(s-L_1) -$$

$$-16\Omega_1 \cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) \cdot \delta(s-L_1) - 8\Omega_1 \cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) \cdot \delta'(s-L_1) -$$

$$-\Omega_1' + 2\cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) \cdot \Omega_1' + 2\cos\Phi \cdot H(s-L_1) \cdot \Omega_1' - 4\cos^2\Phi \cdot$$

$$\cdot H^2(s-L_1) \cdot \Omega_1' - 8\beta_1 \cos^2 \cdot \Phi \cdot \delta''(s-L_1) + 2\beta_1 \sin 2\Phi \cdot \delta''(s-L_1),$$

$$F_5(s,t) = -2\alpha\alpha_1 \cos^2\Phi \cdot \delta(s-L_1) - 2\alpha\alpha_1 \cos\Phi \cdot \delta(s-L_1) +$$

$$+8\alpha\alpha_1 \cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) \cdot \delta(s-L_1) + 2\Omega_1 \cos^2\Phi \cdot \delta'(s-L_1) + 2\Omega_1 \cos\Phi \cdot$$

$$\cdot \delta'(s-L_1) - 8\Omega_1 \cos^2\Phi \cdot \delta^2(s-L_1) + 2\cos^2\Phi \cdot \delta(s-L_1) \cdot \Omega_1' + 2\cos\Phi \cdot$$

$$\cdot \delta(s-L_1) \cdot \Omega_1' - 8\cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) \cdot \delta(s-L_1) \cdot \Omega_1' - 2\beta_1 \cos^2\Phi \cdot \delta'''(s-L_1) +$$

$$+\beta_1 \sin 2\Phi \cdot \delta'''(s-L_1) + \alpha\ddot{\Phi} \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1) + 2\alpha(\dot{\Phi})^2 \cos 2\Phi \cdot$$

$$H(s-L_1) - 2\alpha\ddot{\Phi} \sin 2\Phi \cdot H^2(s-L_1) - 4\alpha(\dot{\Phi})^2 \cos 2\Phi \cdot H^2(s-L_1) -$$

$$-4\alpha(\dot{\Phi})^2 \sin^2\Phi \cdot H^2(s-L_1) - \alpha\omega^2 + 4\omega^2 \alpha \cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) - 4\alpha\omega^2 \cos^2\Phi \cdot$$

$$\cdot H^2(s-L_1) - 2\alpha\omega\dot{\Phi} \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1) - 2\alpha\varepsilon \cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) + 2\alpha\omega \sin 2\Phi \cdot$$

$$\cdot \dot{\Phi} \cdot H(s-L_1) + \alpha\varepsilon \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1) + 2\alpha\omega \cos 2\Phi \cdot \dot{\Phi} \cdot H(s-L_1),$$

$$F_6(s,t) = \beta_1 - 4\beta_1 \cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) + 4\beta_1 \cos^2\Phi \cdot H^2(s-L_1),$$

$$F_7(s,t) = -16\beta_1 \cdot \cos^2\Phi \cdot \delta(s-L_1) + 40\beta_1 \cdot \cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) \cdot \delta(s-L_1),$$

$$F_8(s,t) = -\Omega_1 \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1) + 2\Omega_1 \cos\Phi \cdot H(s-L_1) -$$

$$-24\,\beta_1\cos^2\Phi\cdot\delta'(s-L_1)+64\cos^2\Phi\cdot\beta_1\cdot\delta^2(s-L_1)+64\,\beta_1\cos^2\Phi\cdot$$

$$\cdot H(s-L_1)\cdot\delta'(s-L_1);$$

$$F_9(s,t)=\alpha\alpha_1\sin 2\Phi\cdot H(s-L_1)-2\alpha\alpha_1\cos\Phi\cdot H(s-L_1)-2\,\Omega_1\sin 2\Phi\cdot$$

$$\cdot\delta(s-L_1)+4\Omega_1\cos\Phi\cdot\delta(s-L_1)-\sin 2\Phi\cdot H(s-L_1)\cdot\Omega_1'+2\,\Omega_1'\cdot\cos\Phi\cdot$$

$$\cdot H(s-L_1)-16\beta_1\cos^2\Phi\cdot\delta''(s-L_1)+120\beta_1\cdot\cos^2\Phi\cdot\delta(s-L_1)\cdot\delta'(s-L_1)+$$

$$+32\beta_1\cdot\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)\cdot\delta''(s-L_1)+8\beta_1\cos^2\Phi\cdot[\delta'(s-L_1)]^2,$$

$$F_{10}(s,t)=\alpha\alpha_1\sin 2\Phi\cdot\delta(s-L_1)-2\alpha\alpha_1\cos\Phi\cdot\delta(s-L_1)-\Omega_1\sin 2\Phi\cdot$$

$$\cdot\delta'(s-L_1)+2\Omega_1\cos\Phi\cdot\delta'(s-L_1)-\Omega_1'\sin 2\Phi\cdot\delta(s-L_1)+2\Omega_1'\cos\Phi\cdot$$

$$\cdot\delta(s-L_1)-4\beta_1\cos^2\Phi\cdot\delta'''(s-L_1)+16\beta_1\cos^2\Phi\cdot[\delta'(s-L_1)]^2+$$

$$+24\beta_1\cos^2\Phi\cdot\delta(s-L_1)\cdot\delta''(s-L_1)+8\beta_1\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)\cdot\delta'''(s-L_1)+$$

$$+\alpha\ddot{\Phi}\sin 2\Phi\cdot H(s-L_1)+2\alpha(\dot{\Phi})^2\cos 2\Phi\cdot H(s-L_1)-2\alpha\omega\cos^2\Phi\cdot$$

$$\cdot H(s-L_1)+\alpha\omega^2\sin 2\Phi\cdot H(s-L_1)-\alpha\varepsilon+4\alpha\varepsilon\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)-$$

$$-4\alpha\omega\sin 2\Phi\cdot H(s-L_1)\dot{\Phi}-4\alpha\varepsilon\cos^2\Phi\cdot H^2(s-L_1)+4\omega\dot{\Phi}\sin 2\Phi\cdot H^2(s-L_1),$$

$$F_{11}(s,t)=\alpha-4\alpha\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)+4\alpha\cos^2\Phi\cdot H^2(s-L_1),$$

$$F_{12}(s,t)=4\alpha\sin 2\Phi\cdot\dot{\Phi}\cdot H(s-L_1)-4\alpha\sin 2\Phi\cdot\dot{\Phi}\cdot H^2(s-L_1)+$$

$$+\alpha\omega\sin 2\Phi\cdot H(s-L_1)-2\alpha\sin 2\Phi\cdot H(s-L_1),$$

$$F_{13}(s,t)=-4\alpha\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1),$$

$$F_{14}(s,t)=6\alpha\sin 2\Phi\cdot\dot{\Phi}\cdot H(s-L_1)-\alpha\omega+2\alpha\omega\cos\Phi\cdot H(s-L_1)-$$

$$\alpha\omega+8\alpha\omega\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1),$$

$$F_{15}(s,t)=\alpha a_{01}-2\alpha a_{01}\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)+2\alpha v_{01}\sin 2\Phi\cdot\dot{\Phi}\cdot$$

$$\cdot H(s-L_1)-\alpha v_{01}\cdot\dot{\Phi}\cdot H(s-L_1)-2\alpha a_{02}\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)+2\alpha v_{02}\sin 2\Phi\cdot$$

$$\cdot\dot{\Phi}\cdot H(s-L_1)-\alpha v_{02}\sin 2\Phi\cdot\dot{\Phi}\cdot H(s-L_1)-\alpha v_{02}\sin 2\Phi\cdot\dot{\Phi}\cdot H(s-L_1)-$$

$$-2\alpha v_{01}\,\omega\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)-\alpha v_{02}\omega+2\alpha\,v_{02}\,\omega\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)-$$

$$-\alpha[-2\sin 2\Phi\cdot\dot{\Phi}\,\omega(s+(L_1-s)\,(1+\cos 2\,\Phi)\,H(s-L_1))\cdot H(s-L_1)+2\cos^2\Phi\cdot$$

$$\cdot\,\omega(-2\sin 2\Phi\cdot\dot{\Phi}\cdot H^2(s-L_1))+2\varepsilon\cos^2\Phi\cdot(s+(L_1-s)\,(1+\cos 2\,\Phi)\cdot$$

$$\cdot\,H(s-L_1))\cdot H(s-L_1)+\omega\dot{\Phi}\sin 2\Phi\cdot H(s-L_1)\cdot(s+(L_1-s)\,(1+\cos 2\Phi)\cdot$$

$$\cdot\,H(s-L_1)+\varepsilon(s-L_1)\sin 2\Phi\cdot H(s-L_1)+2\omega\dot{\Phi}\,(s-L_1)\cos 2\Phi\cdot H(s-L_1)-$$

$$-2\sin^2 2\Phi\cdot\dot{\Phi}\cdot H^2(s-L_1)\cdot\omega(s-L_1)+2\varepsilon(s-L_1)\cos^2\Phi\cdot\sin 2\Phi\cdot H^2(s-L_1)+$$

$$+4\omega(s-L_1)\cos^2\Phi\cdot H^2(s-L_1)\cdot\cos 2\Phi\cdot\dot{\Phi}-\dot{\Phi}\,\omega(s-L_1)\sin^2 2\Phi\cdot$$

$$\cdot\,H^2(s-L_1)-\alpha\omega^2[s+(L_1-s)\,(1+\cos 2\Phi)\,H(s-L_1)]+2\alpha\omega^2\cos^2\Phi\cdot$$

$$\cdot\,H(s-L_1)\cdot[s+(L_1-s)\,(1+\cos 2\Phi)\cdot H(s-L_1)]+\alpha\omega^2\sin 2\Phi\cdot H^2(s-L_1)\cdot$$

$$\cdot(s-L_1)\cdot\sin 2\Phi+2\alpha(L_1-s)\sin^2 2\Phi\cdot(\dot{\Phi})^2\cdot H^2(s-L_1)+\alpha\dot{A}-$$

$$-\alpha(s-L_1)(\dot{\Phi})^2\sin^2 2\Phi\cdot H^2(s-L_1)+4\alpha\omega\,\dot{\Phi}(L_1-s)\sin 2\Phi\cdot H^2(s-L_1)\cos^2\Phi-$$

$$-2\alpha\omega\,\dot{\Phi}\,(s-L_1)\cos 2\Phi\cdot H(s-L_1)+4\alpha\omega\,\dot{\Phi}(s-L_1)\cos 2\Phi\cdot\cos^2\Phi\cdot$$

$$\cdot\,H^2(s-L_1)-X+4X\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)+4X\cos^2\Phi\cdot H^2(s-L_1)+$$

$$+2Y\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)-Y\sin 2\Phi\cdot H(s-L_1),$$

$$\alpha(s)=E_1A_1+(E_2A_2-E_1A_1)\cdot H(s-L_1),$$

$$\beta(s)=E_1I_1+(E_2I_2-E_1I_1)\cdot H(s-L_1),$$

$$\alpha_1(t,s)=-2\cos^2\Phi\cdot\delta(s-L_1)-2\cos\Phi\cdot\delta(s-L_1)+8\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)\cdot$$

$$\cdot\delta(s-L_1),$$

$$\beta_1(t,s)=\beta(s)\cdot A_3(s,t),$$

$$A=-2(L_1-s)\,\dot{\Phi}\sin 2\Phi\cdot H(s-L_1)+4(L_1-s)\,\dot{\Phi}\sin 2\Phi\cdot\cos^2\Phi\cdot$$

$$\cdot\,H^2(s-L_1)-4\,\Phi\,(s-L_1)\cos 2\,\Phi\cdot\cos^2\Phi\cdot H^2\,(s-L_1),$$

$$B=-2(L_1-s)\,\dot{\Phi}\sin 2\Phi\cdot H^2(s-L_1)+2\dot{\Phi}(s-L_1)\cos 2\Phi\cdot H(s-L_1)-$$

$$-4\Phi(s-L_1)\cos 2\Phi\cdot\cos^2\Phi\cdot H^2(s-L_1),$$

$$\Omega_1 = 1+2\cos^2\Phi \cdot H(s-L_1)-2\cos\Phi \cdot H(s-L_1)+4\cos^2\Phi \cdot H^2(s-L_1);$$

$$\Omega_2 = \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1) - 2\cos\Phi \cdot H(s-L_1),$$

$$A_3(s,t) = \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1) - 2\cos^2\Phi \cdot H(s-L_1),$$

$$B_1(s,t) = 4\cos^2\Phi \cdot \delta^2(s-L_1) - 12\cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) \cdot \delta'(s-L_1),$$

$$B_2(s,t) = 8\cos^2\Phi \cdot H(s-L_1)\,\delta(s-L_1),$$

$$B_3(s,t) = 1 - 4\cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) + 4\cos^2\Phi \cdot H^2(s-L_1),$$

$$G_1(s,t) = -2\beta B_3\cos^2\Phi \cdot H(s-L_1)+\beta B_3 \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1),$$

$$G_2(s,t) = -2\beta B_2\cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) + \beta B_2 \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1) -$$

$$-8\beta B_3\cos^2\Phi \cdot \delta(s-L_1) + 3\beta B_3 \sin 2\Phi \cdot \delta(s-L_1),$$

$$G_3(s,t) = -\beta\Omega_2 - 2\Omega_2\beta\cos^2\Phi \cdot H(s-L_1)+2\beta\Omega_2\cos\Phi \cdot H(s-L_1) -$$

$$-4\beta\Omega_2\cos^2\Phi \cdot H^2(s-L_1) - 2\beta B_1\cos^2\Phi \cdot H(s-L_1)+\beta B_1 \sin 2\Phi \cdot$$

$$\cdot H(s-L_1) - 6\beta B_2\cos^2\Phi \cdot \delta(s-L_1) + 3\beta B_2 \sin 2\Phi \cdot \delta(s-L_1) -$$

$$12\beta B_3\cos^2\Phi \cdot \delta'(s-L_1) + 4\beta B_3 \sin 2\Phi \cdot \delta'(s-L_1),$$

$$G_4(s,t) = 4\beta\Omega_2\cos^2\Phi \cdot \delta(s-L_1)+ 4\beta\Omega_2\cos\Phi \cdot \delta(s-L_1) -$$

$$-16\beta\Omega_2\cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) \cdot \delta(s-L_1) - 8\beta\Omega_2\cos^2\Phi \cdot H(s-L_1) \cdot \delta'(s-L_1) -$$

$$-4\beta B_1\cos^2\Phi \cdot \delta(s-L_1) + 2\beta B_1 \sin 2\Phi \cdot \delta(s-L_1) - 6\cos^2\Phi\beta\, B_2 \cdot$$

$$\cdot \delta'(s-L_1) + 3\beta B_2 \sin 2\Phi \cdot \delta'(s-L_1) - 8\beta B_3\cos^2\Phi \cdot \delta''(s-L_1) +$$

$$+ 3\sin 2\Phi \cdot \beta B_3 \cdot \delta''(s-L_1),$$

$$G_5(s,t) = 2\beta\Omega_2\cos^2\Phi \cdot \delta'(s-L_1) + 2\beta\Omega_2\cos\Phi \cdot \delta'(s-L_1) -$$

$$8\beta\Omega_2\cos^2\Phi \cdot \delta^2(s-L_1) + 2\beta B_1\cos^2\Phi \cdot \delta'(s-L_1) + \beta B_1 \sin 2\Phi \cdot \delta'(s-L_1) -$$

$$2\beta B_2\cos^2\Phi \cdot \delta''(s-L_1)+\beta B_2 \sin 2\Phi \cdot \delta''(s-L_1) - 2\beta B_3\cos^2\Phi \cdot \delta'''(s-L_1)+$$

$$+ \beta B_3 \sin 2\Phi \cdot \delta'''(s-L_1) + \alpha\ddot{\Phi} \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1) + 2\alpha(\dot{\Phi})^2\cos 2\Phi \cdot$$

$$\cdot H(s-L_1)+ \alpha\varepsilon - 2\alpha\varepsilon\cos\Phi \cdot H(s-L_1) + 6\omega\alpha\dot{\Phi}\sin\Phi \cdot H(s-L_1) -$$

$$-2\alpha\varepsilon\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)+4\alpha\varepsilon\cos^2\Phi\cdot H^2(s-L_1)-4\alpha\omega\dot{\Phi}\sin 2\Phi\cdot H^2(s-L_1),$$

$$G_6(s,t)=\beta B_3-4\beta B_3\cos^2\Phi\cdot H(s-L)+4\beta B_3\cos^2\Phi\cdot H^2(s-L),$$

$$G_7(s,t)=\beta B_2-6\beta B_2\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)+4\beta B_2\cos^2\Phi\cdot H^2(s-L_1)-$$

$$-8\beta B_3\cos^2\Phi\cdot\delta(s-L_1)+40\beta B_3\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)\cdot\delta(s-L_1),$$

$$G_8(s,t)=-\beta\Omega_2\sin 2\Phi\cdot H(s-L_1)+2\beta\Omega_2\cos\Phi\cdot H(s-L_1)+2\beta B_1-$$

$$-4\beta B_1\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)+4\beta B_1\cos^2\Phi\cdot H^2(s-L_1)-14\beta B_1\cos^2\Phi\cdot$$

$$\cdot\delta(s-L_1)+24\beta B_2\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)\cdot\delta(s-L_1)-24\beta B_3\cos^2\Phi\cdot$$

$$\delta'(s-L_1)-8\beta B_3\cos^2\Phi\cdot\delta''(s-L_1)+64\beta B_3\cos^2\Phi\cdot\delta^2(s-L_1)+$$

$$+64\beta B_3\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)\cdot\delta'(s-L_1),$$

$$G_9(s,t)=-2\beta\,\Omega_2\sin 2\Phi\cdot\delta(s-L_1)+4\beta\,\Omega_2\cos\Phi\cdot\delta(s-L_1)-$$

$$-4\beta B_1\cos^2\Phi\cdot\delta(s-L_1)-4\beta B_1\cos^2\Phi\cdot\delta(s-L_1)+16\beta B_1\cos^2\Phi\cdot$$

$$\cdot H(s-L_1)\cdot\delta(s-L_1)-12\beta B_2\cos^2\Phi\cdot\delta'(s-L_1)+24\beta B_2\cos^2\Phi\cdot$$

$$\cdot\delta^2(s-L_1)+24\beta B_2\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)\cdot\delta'(s-L_1)-8\beta B_3\cos^2\Phi\cdot$$

$$\cdot\delta''(s-L_1)+120\beta B_3\cos^2\Phi\cdot\delta(d-L_1)\cdot\delta'(s-L_1)+$$

$$+16\beta B_3\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)\cdot\delta''(s-L_1),$$

$$G_{10}(s,t)=8\beta B_1\cos^2\Phi\cdot\delta^2(s-L_1)+8\beta B_1\cos^2\Phi\cdot H(s-L_1)\cdot$$

$$\cdot\delta'(s-L_1)-4\beta B_2\cos^2\Phi\cdot\delta''(s-L_1)+24\beta B_2\cos^2\Phi\cdot\delta(s-L_1)\cdot$$

$$\cdot\delta'(s-L_1)-4\beta B_3\cos^2\Phi\cdot\delta'''(s-L_1)+8\beta B_3\cos^2\Phi\cdot[\delta'(s-L_1)]^2+$$

$$+8\beta B_3\cos^2\Phi\cdot\delta(s-L_1)\cdot\delta''(s-L_1)+8\beta B_3\cos^2\Phi\cdot[(\delta'(s-L_1))^2+$$

$$+2\delta(s-L_1)\cdot\delta''(s-L_1)+H(s-L_1)\cdot\delta'''(s-L_1)]+\beta B_2H(s-L_1)\cdot$$

$$\cdot\delta''(s-L_1)+\alpha\ddot{\Phi}\sin 2\Phi\cdot H(s-L_1)+2\alpha(\dot{\Phi})^2\cos 2\Phi\cdot H(s-L_1)-$$

$$-2\alpha\ddot{\Phi}\sin 2\Phi\cdot H^2(s-L_1)-4\alpha(\dot{\Phi})^2\cos 2\Phi\cdot H^2(s-L_1)-4\alpha(\dot{\Phi})^2\sin^2\Phi\cdot$$

$$\cdot H^2(s-L_1)-\alpha\omega^2-4\alpha\omega\dot{\Phi}\sin\Phi\cdot H(s-L_1)-\alpha\varepsilon\sin 2\Phi\cdot H(s-L_1)-$$

$$- 2\alpha\omega \cos 2\Phi \cdot \dot{\Phi} \cdot H(s-L_1) + 2\alpha\varepsilon \cos^2 \Phi \cdot H(s-L_1) -$$

$$- 2\alpha\omega \dot{\Phi} \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1),$$

$$G_{11}(s, t) = - 2\alpha \cdot H(s-L_1) + \alpha \cdot \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1),$$

$$G_{12}(s, t) = 3\alpha \dot{\Phi} \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1) + 2\alpha \dot{\Phi} \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1) +$$

$$+ 2\alpha \dot{\Phi} \sin^2 \Phi \cdot H(s-L_1) + 2\alpha\omega - 2\alpha\omega \cos \Phi \cdot H(s-L_1) -$$

$$- 6\alpha\omega \cos^2 \Phi \cdot H(s-L_1) + 8\alpha\omega \cos^2 \Phi \cdot H^2(s-L_1),$$

$$G_{13}(s, t) = \alpha - 4\alpha \cos^2 \Phi \cdot H(s-L_1) + 4\alpha \cos^2 \Phi \cdot H^2(s-L_1),$$

$$G_{14}(s, t) = 4\alpha \dot{\Phi} \cos \Phi \cdot H(s-L_1) + 4\alpha \dot{\Phi} \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1) +$$

$$+ 8\alpha \sin 2\Phi \cdot H^2(s-L_1),$$

$$G_{15}(s, t) = \alpha a_{01} \sin 2\Phi \cdot H(s - L_1) - 2\alpha v_{01} \cdot \dot{\Phi} \cos 2\Phi \cdot H(s-L_1) +$$

$$+ 2\alpha \dot{\Phi} v_{01} \cdot \sin^2 \Phi \cdot H(s-L_1) + \alpha a_{02} - 2\alpha a_{02} \cos^2 \Phi \cdot H(s-L_1) +$$

$$+ 2\alpha a_{02} \sin 2\Phi \cdot \dot{\Phi} \cdot H(s-L_1) + \alpha\omega v_{01} - 2\alpha v_{01} \omega \cos^2 \Phi \cdot H(s-L_1) -$$

$$- v_{02} \omega \sin 2\Phi \cdot \alpha \cdot H(s-L_1) + \alpha\varepsilon[s+(L_1-s)(1+\cos 2\Phi) H(s-L_1)] -$$

$$- 2\alpha\omega(L_1-s) \dot{\Phi} \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1) - 2\alpha\varepsilon \cos^2 \Phi \cdot H(s-L_1) \cdot$$

$$\cdot [s+ (L_1-s)(1 + \cos 2\Phi) H(s-L_1)] + 2\alpha \dot{\Phi} \omega H(s-L_1) \cdot [s+$$

$$+ (L_1-s)(1+\cos 2\Phi) H(s-L_1)] + 4\alpha\omega (L_1-s) \ddot{\Phi} \cos^2 \Phi \sin 2\Phi \cdot$$

$$\cdot H^2(s-L_1) - \alpha \dot{\Phi} \omega \sin 2\Phi \cdot H(s-L_1) \cdot [s+(L_1-s)(1+ \cos 2\Phi) H(s-L_1)] -$$

$$- 2\alpha \dot{\Phi} \sin 4\Phi \cdot H^2(s-L_1) \cdot \omega \cdot (s-L_1) - \alpha\varepsilon \sin^2 2\Phi \cdot H^2(s-L_1) \cdot$$

$$\cdot (s-L_1) - 2\alpha\omega \dot{\Phi} \sin^2 \Phi \sin 2\Phi \cdot (s-L_1) \cdot H^2(s-L_1) - \alpha\omega^2(s - L_1) \sin 2\Phi \cdot$$

$$H(s-L_1) - 2\alpha\omega^2 \cos \Phi \cdot H(s-L_1) \cdot [s+(L_1-s)(1+ \cos 2\Phi) \cdot H(s - L_1)] +$$

$$+ 2\alpha\omega^2(s-L_1) \cdot \cos^2 \Phi \cdot \sin 2\Phi \cdot H^2(s-L_1) - 4\alpha(L_1-s)(\dot{\Phi})^2 \sin 2 \Phi \cdot$$

$$\sin^2 \Phi \cdot H^2(s-L_1) - 4\alpha(s-L_1) \cdot (\dot{\Phi})^2 \cdot \cos 2\Phi \cdot \sin \Phi \cdot H^2(s-L_1) +$$

$$+\alpha \cdot \dot{B} - 2\alpha\omega\,\dot{\Phi}(L_1 - s)\sin 2\Phi \cdot H(s - L_1) + 4\alpha\omega(L_1 - s)\cdot\dot{\Phi}\sin 2\Phi\cos^2\Phi \cdot$$

$$\cdot H^2(s - L_1) - 2\alpha\,\omega\,(s - L_1)\cdot\dot{\Phi}\cos 2\Phi \cdot \sin 2\Phi \cdot H^2(s - L_1) - X\sin 2\Phi$$

$$\cdot H(s - L_1) + 2\,X\cos^2\Phi \cdot H(s - L_1) - Y,$$

Ecuațiilor (10) și (11) se atașează condiții la limită în funcție de tipul multipolului. Spre exemplu, pentru o diodă RRR (fig. 1) condițiile la limită sînt

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2}(0\,;t) = 0\,; \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2}(L, t) = 0\,; \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2}(L_1^-\,; t) = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial s^2}(L_1^+\,; t) = 0\,; \quad E_1A_1\frac{\partial u_1}{\partial s}(0\,;t) = P_1(t)\,;$$

$$E_2A_2\frac{\partial u_1}{\partial s}(L\,;t) = P_2(t), \quad E_1A_1\frac{\partial u_1}{\partial s}(L_1^-\,;t) = P_3(t)\,;$$

$$E_2A_2\frac{\partial u_1}{\partial s}(L_1^+\,;\,t) = P_4(t),$$

unde $P_1(t)$, $P_2(t)$ sînt componentele forțelor de legătură din cuplele O și B pe direcțiile lui $\bar{\tau}_1$, și respectiv $\bar{\tau}_2$;

$P_3(t)$ este componenta forței de legătură din cupla A, relativă la elementul 1, pe direcția lui $\bar{\tau}_1$;

$P_4(t)$ este componenta forței de legătură din cupla A, relativă la elementul 2, pe direcția lui $\bar{\tau}_2$.

$P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ și $P_4(t)$ se pot introduce ca rezultat al unei analize cinetostatice prealabile, în ipoteza rigidității elementelor mecanismului. Se poate, evident, proceda și prin aproximații succesive.

Pentru diadele RRT, TRT, condițiile la limită se scriu asemănător.

În cazul diadelor cu cuplă interioară de rotație unghiul Φ este constant iar una din lungimile L_1 și L_2 este funcție cunoscută de timp. Structura ecuațiilor (10) și (11) se modifică corespunzător.

3. CONCLUZII

Ecuațiile deduse, deși de o complexitate mai mare, oferă avantajul studiului cuplat al vibrațiilor elementelor cinematice care alcătuiesc multipolul cinetoelastic. În cazul în care se cere o precizie mai mare a răspunsului dinamic este preferabilă deci folosirea ecuațiilor deduse mai sus. Rezolvarea ecuațiilor propuse se face numai prin metode numerice, cu calculatorul numeric, folosind șiruri reprezentative δ și H metoda aproximațiilor succesive.

Primită la redacție la 15 septembrie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. CHR. PELECUDI, *Precizia mecanismelor*, Edit. Academiei, București, 1975.
2. CHR. PELECUDI, M. BUCULEI, *Equations du mouvement pour les vibrations des éléments rectilignes des mecanismes plans et spatiaux*, sub tipar.
3. M. BUCULEI, *Sur la cinétique et la cinématique des solides élastiques en mouvement*, Rév. roum. sci. tech.—Méc. appl., *2* (1979).
4. M. BUCULEI, *Studiul șocului longitudinal în bare drepte în mișcare plană, cu aplicație la analiza mecanismelor*, St. cerc. mec. apl., *6* (1978).
5. M. BUCULEI, *Les équations du mouvement des éléments curvilignes linéaire — élastiques des mécanismes plans*, Rév. roum. sci. tech. Méc. appl., *4* (1979).
6. M. BUCULEI, D. BĂGNARU, *Vibrații mecanice (Solidul liniar elastic)*, Repr. Univ. Craiova, 1979.

CONTRIBUȚII LA SINTEZA SISTEMELOR ÎN LANȚ ȘI RAMIFICATE CE EXECUTĂ VIBRAȚII DE TORSIUNE. II

de IOAN CRĂCIUN,
Institutul de învățămînt superior, Baia Mare

În lucrare se studiază sinteza, pe baza valorilor pulsațiilor proprii, a sistemelor în lanț și ramificate ce execută vibrații de torsiune.
În prima parte a lucrării se discută sinteza avînd ca punct de plecare relațiile dintre coeficienții și rădăcinile ecuațiilor pulsațiilor proprii. Partea a doua a lucrării este dedicată sintezei concepută ca studiul modificărilor ce trebuie aduse unui sistem oscilant cu parametri cunoscuți în scopul obținerii unui sistem posedînd valori impuse ale uneia sau mai multora dintre pulsațiile proprii.
Pentru stabilirea expresiilor coeficienților ecuației pulsațiilor proprii se utilizează metoda grafelor de fluență.

3. SINTEZA PE BAZA DEZVOLTĂRII ÎN SERIE TAYLOR A PĂTRATELOR PULSAȚIILOR PROPRII

În partea I a acestei lucrări s-a efectuat sinteza sistemelor în lanț și ramificate ce execută vibrații de torsiune, pe baza relațiilor dintre coeficienții și rădăcinile ecuației pulsațiilor proprii. În partea a II-a a lucrării sinteza sistemelor în lanț și ramificate este concepută ca studiul modificărilor ce trebuie aduse unui sistem oscilant cu parametri cunoscuți în scopul obținerii unui sistem posedînd valori impuse ale uneia sau mai multora dintre pulsațiile proprii. Ultimul paragraf al lucrării conține exemple numerice de sinteză care ilustrează metodele prezentate în paragrafele 2 și 3.

3.1. GENERALITĂȚI

Se consideră un sistem în lanț sau ramificat ce execută vibrații de torsiune, avînd n grade de libertate, caracterizat prin cei $N = 2n-1$ parametri J_k, $C_{k,j}(k, j = 1, \ldots, n, k < j)$, avînd ecuația pulsațiilor proprii de forma (5). Pentru o anumită valoare a lui $q(q \in [1, n-1])$, relația (5) stabilește dependența între ω_q^2 și cei N parametri J_k, $C_{k,j}$, de forma funcției

$$\omega_q^2 = \omega_q^2(J_k, C_{k,j}), \tag{173}$$

$$(k, j = 1,2,\ldots, n, k < j).$$

De remarcat că această dependență are loc prin intermediul mărimilor $\tau_{b,h}(h = 1,2,\ldots, 2n-2)$ și al coeficienților $a_v(7)$.

Condițiile de existență și continuitate a funcției (173) fiind îndeplinite, dînd parametrilor J_k, $C_{k,j}$ creșterile ΔJ_k, $\Delta C_{k,j}$, formula lui Taylor corespunzătoare este

$$(\omega_q')^2 = (\omega_q')^2 (J_k + \Delta J_k, C_{k,j} + \Delta C_{k,j}) =$$

$$= \omega_q^2(J_k, C_{k,j}) + \sum_{l=1}^{s} \frac{1}{l!} \left(\Delta J_k \frac{\partial}{\partial J_k} + \Delta C_{k,j} \frac{\partial}{\partial C_{k,j}} \right)^{(l)} \omega_q^2(J_k, C_{k,j}) + \quad (174)$$

$$+ \frac{1}{(s+1)!} \left(\Delta J_k \frac{\partial}{\partial J_k} + \Delta C_{k,j} \frac{\partial}{\partial C_{k,j}} \right)^{(s+1)} \omega_q^2(J_k + \theta \Delta J_k, C_{k,j} + \theta \Delta C_{k,j}),$$

$$k, j = 1,2,\ldots, n, k < j.$$

Adoptînd o valoare convenabilă pentru s și neglijînd restul formulei lui Taylor, relația (174) reprezintă o condiție de legătură între creșterile ΔJ_k, $\Delta C_{k,j}$ care determină modificarea patratului pulsației proprii ω_q a sistemului de la valoarea $\omega_q^2 (J_k, C_{k,j})$, la valoarea apropiată $(\omega_q')^2 (J_k + \Delta J_k, C_{k,j} + \Delta C_{k,j})$, ambele valori trebuind să îndeplinească condiția (10). În cazul în care considerente de ordin practic impun alte $M-1$ condiții de legătură între mărimile ΔJ_k, $\Delta C_{k,j}$, de tipul

$$F_\mu(\Delta J_k, \Delta C_{k,j}) = 0, \quad (175)$$

$$\mu = 1,2,\ldots, M-1\,;\; k, j = 1,2,\ldots, n\,;\; k < j\,;\; M \leqslant N,$$

rezultă că $N-M = 2n-M-1$ dintre creșterile ΔJ_k, $\Delta C_{k,j}$ pot fi adoptate arbitrar (fiind, eventual, nule), celelalte M rezultînd din condițiile (174) și (175). Unele dintre condițiile (175) pot fi condiții de tipul (174) referitoare la unele dintre pulsațiile proprii $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{q-1}, \omega_{q+1}, \omega_{n-1}$.

În cazul $s=1$ și neglijînd restul formulei lui Taylor se obține relația aproximativă, liniară

$$(\omega_q')^2 (J_k + \Delta J_k, C_{k,j} + \Delta C_{k,j}) = \omega_q^2(J_k, C_{k,j}) +$$

$$+ \sum_k \left[\Delta J_k \frac{\partial \omega_q^2(J_k, C_{k,j})}{\partial J_k} + \Delta C_{k,j} \frac{\partial \omega_q^2(J_k, C_{k,j})}{\partial C_{k,j}} \right], \quad (176)$$

$$k, j = 1,2,\ldots, n\,;\; k < j.$$

De remarcat faptul că dintre toate mărimile $\tau_{b,h}(h = 1,2,\ldots, 2n-2)$ singurele care conțin momentul de inerție J_k sînt cele aferente buclelor grafului vibrațiilor libere adiacente în vîrful $\psi_{k,q}$, iar singurele care conțin constanta elastică $C_{k,j}$ sînt cele aferente buclelor adiacente în vîrful $\delta\psi_{k,j,q}$. Notînd $[(\tau_{b,h})_{A_k}]$ mulțimea alcătuită din mărimile $\tau_{b,h}$ aferente buclelor

a diacente în vîrful $\psi_{k,q}$ și $[(\tau_{b,h})_{A_{k,j}}]$ mulțimea alcătuită din cele două mărimi $\tau_{b,h}$ aferente celor două bucle adiacente în vîrful $\delta\psi_{k,j,q}$, rezultă expresiile

$$\frac{\partial\omega_q^2}{\partial J_k} = \sum_h \frac{\partial\omega_q^2}{\partial(\tau_{b,h})_{A_k}} \cdot \frac{\partial(\tau_{b,h})_{A_k}}{\partial J_k}, \tag{177}$$

$$\frac{\partial\omega_q^2}{\partial C_{k,j}} = \sum_h \frac{\partial\omega_q^2}{\partial(\tau_{b,h})_{A_{k,j}}} \cdot \frac{\partial(\tau_{b,h})_{A_{k,j}}}{\partial C_{k,j}}. \tag{178}$$

Derivînd relația (5) în raport cu $\tau_{b,h}$ se obține, prin explicitare,

$$\frac{\partial\omega_q^2}{\partial\tau_{b,h}} = \frac{\sum_{v=1}^{n-1}(-1)^{v-1}\frac{\partial a_v}{\partial\tau_{b,h}}(\omega_q^2)^{n-v-1}}{\sum_{v=0}^{n-2}(-1)^v(n-v-1)\,a_v(\omega_q^2)^{n-v-2}}. \tag{179}$$

Derivatele de ordinul întîi și de ordinul superior care intervin în relațiile (174) și (176) se calculează pornind de la expresiile (177) — (179).

3.2. CAZUL SISTEMELOR ÎN LANȚ

În cazul sistemelor în lanț buclele adiacente în vîrful $\psi_{k,q}$ al grafului vibrațiilor libere sînt buclele $2k-2$ și $2k-1$, iar buclele adiacente în vîrful $\delta\psi_{k,k+1,q}$ sînt buclele $2k-1$ și $2k$. Conform relațiilor (12) se obține

$$\tau_{b,2k-2} = \frac{C_{k-1,k}}{J_k}, \tag{180}$$

$$\tau_{b,2k-1} = \frac{C_{k,k+1}}{J_k}, \tag{181}$$

$$\tau_{b,2k} = \frac{C_{k,k+1}}{J_{k+1}}. \tag{182}$$

Ca urmare, relațiile (177) și (178) devin

$$\frac{\partial\omega_q^2}{\partial J_k} = -\frac{\partial\omega_q^2}{\partial\tau_{b,2k-2}}\frac{C_{k-1,k}}{J_k^2} - \frac{\partial\omega_q^2}{\partial\tau_{b,2k-1}}\cdot\frac{C_{k,k+1}}{J_k^2}, \tag{183}$$

$$\frac{\partial\omega_q^2}{\partial C_{k,k+1}} = \frac{\partial\omega_q^2}{\partial\tau_{b,2k-1}}\cdot\frac{1}{J_k} + \frac{\partial\omega_q^2}{\partial\tau_{b,2k}}\frac{1}{J_{k+1}}. \tag{184}$$

În continuare se consideră graful redus G al vibrațiilor libere corespunzător unui sistem în lanț, alcătuit din buclele $1,2,\ldots,h-1,h,h+1\ldots,z-1,z$. Graful redus G poate fi considerat ca fiind constituit din subgraful redus G_1 conținînd buclele $1,2,\ldots,h-1$, subgraful redus G_2 conținînd buclele $h+1,\ldots,z-1,z$ și bucla h, adiacentă la buclele $h-1$ și $h+1$. Structura subgrafelor reduse G, G_1, G_2 poate fi pusă în evidență utilizînd notațiile din [8]:

$$G(1,2,\ldots,h-1,\ h,h+1,\ldots,z-1,z);\ G_1(1,2,\ldots,h-1);$$

$$G_2(h+1,\ldots,z-1,z).$$

Se notează

B_1, B_2 — mulțimile avînd ca elemente buclele grafelor reduse G_1, respectiv G_2;

$B_1-(h-1)$; $B_2-(h+1)$ — mulțimile avînd ca elemente buclelele $1,2,\ldots,h-2$, respectiv $h+2,\ldots,z-1,z$;

$G_1(B_1-(h-1))$; $G_2(B_2-(h+1))$ — subgrafele reduse alcătuite, respectiv, din buclele $1,2,\ldots,\ h-2$ și $h+2,\ldots,\ldots,z-1,\ z$;

$(T_v)_G$; $(T_v)_{G_1}$; $(T_v)_{G_2}$; $(T_v)_{G_1(B_1-(h-1))}$; $(T_v)_{G_2(B_2-(h+1))}$ — termenii v ai determinanților grafelor (subgrafelor) reduse G; G_1; G_2; $G_1(B_1-(h-1))$; $G_2(B_2-(h+1))$;

$(\mathscr{T}_v)_G$; $(\mathscr{T}_v)_{G_1}$; $(\mathscr{T}_v)_{G_2}$; $(\mathscr{T}_v)_{G_1(B_1-(h-1))}$; $(\mathscr{T}_v)_{G_2(B_2-(h+1))}$ notații cu semnificațiile: $(\mathscr{T}_v)_G = (\omega_q^2)^{v-1}(T_v)_G$;

$$(\mathscr{T}_v)_{G_1} = (\omega_q^2)^{v-1}(T_v)_{G_1};\ (\mathscr{T}_v)_{G_2} = (\omega_q^2)^{v-1}(T_v)_{G_2};$$

$$(\mathscr{T}_v)_{G_1(B_1-(h-1))} = (\omega_q^2)^{v-1}(T_v)_{G_1(B_1-(h-1))};$$

$$(\mathscr{T}_v)_{G_2(B_2-(h+1))} = (\omega_q^2)^{v-1}(T_v)_{G_2(B_2-(h+1))}.$$

Se va demonstra relația

$$(T_v)_G = \sum_{w'=1}^{v}(T_{v-w'+1})_{G_1}(T_{w'})_{G_2} + t_{b,h}\sum_{w'=1}^{v-1}(T_{v-w'})_{G_1(B_1-(h-1))}(T_{w'})_{G_2(B_2-(h+1))}. \tag{185}$$

Într-adevăr, produsul $(T_{v-w'+1})_{G_1}(T_{w'})_{G_2}$ reprezintă suma tuturor produselor de transmitanțe a cîte $v-1$ bucle neadiacente, dintre care $v-w'$ bucle aparținînd subgrafului redus G_1 și $w'-1$ bucle aparținînd subgrafului redus G_2, deci suma $\sum_{w'=1}^{v}(T_{v-w'+1})_{G_1}(T_{w'})_{G_2}$ reprezintă suma tuturor produselor de transmitanțe a cîte $v-1$ bucle neadiacente aparținînd grafului redus G, cu excepția produselor ce conțin transmitanța buclei h. Pe de altă parte, produsul $t_{b,h}(T_{v-w'})_{G_1(B_1-(h-1))}(T_{w'})_{G_2(B_2-(h+1))}$ reprezintă suma tuturor produselor de transmitanțe de cîte $v-1$ bucle neadiacente, dintre care $v-w'-1$ bucle aparținînd subgrafului redus $G_1(B_1-(h-1))$ și $w'-1$ bucle aparținînd subgrafului redus $G_2(B_2-(h+1))$, una dintre bucle fiind bucla h.

Ca urmare, suma

$t_{b,h} \sum_{w'=1}^{v-1} (T_{v-w'})_{G_1(B_1-(h-1))}(T_{w'})_{G_2(B_2-(h+1))}$ reprezintă suma tuturor produselor de transmitanțe de cîte $v-1$ bucle neadiacente aparținînd grafului redus G, produse ce conțin transmitanța $t_{b,h}$ a buclei h.

Ținînd seama de regula lui Mason, rezultă că expresia (185) reprezintă termenul v al determinantului grafului redus G.

Înmulțind expresia (185) cu $(\omega_q^2)^{v-1}$ se obține

$$(\mathcal{T}_v)_G = \sum_{w'=1}^{v} (\mathcal{T}_{v-w'+1})_{G_1}(\mathcal{T}_{w'})_{G_2} + \tau_{b,h} \sum_{w'=1}^{v-1} (\mathcal{T}_{v-w'})_{G_1(B_1-(h-1))}(\mathcal{T}_{w'})_{G_2(B_2-(h+1))}. \tag{186}$$

Avînd în vedere relațiile (6) și (186) se obține,

$$a_v = (\mathcal{T}_{v+1})_G = \sum_{w'=1}^{v} (\mathcal{T}_{v-w'+2})_{G_1}(\mathcal{T}_{w'})_{G_2} + \tag{187}$$

$$+ \tau_{b,h} \sum_{w'=1}^{v-1} (\mathcal{T}_{v-w'+1})_{G_1(B-(h-1))}(\mathcal{T}_{w'})_{G_2(B-(h+1))},$$

astfel că

$$\frac{\partial a_v}{\partial \tau_{b,h}} = \sum_{w'=1}^{v-1} (\mathcal{T}_{v-w'+1})_{G_1(B-(h-1))}(\mathcal{T}_{w'})_{G_2(B-(h+1))}. \tag{188}$$

3.3. SINTEZA PE BAZA UNOR CONDIȚII DE OPTIMUM

Modificarea uneia sau mai multora dintre pulsațiile proprii ale sistemului vibrant este impusă, practic, de necesitatea evitării fenomenului de rezonanță. Evident, pentru un sistem existent sau proiectat în fază finală această modificare se efectuează în condiții optime, atunci cînd se obține prin modificări minime ale sistemului, respectiv ale parametrilor J_k, $C_{k,j}$. În general, drept criteriu pentru aprecierea modificărilor sistemului, poate fi aleasă o funcție $f(\Delta J_k, \Delta C_{k,j})$, valorile date creșterilor ΔJ_k, $\Delta C_{k,j}$ cu respectarea condițiilor (175) asigurînd obținerea minimului funcției considerate,

$$\min f(\Delta J_k, \Delta C_{k,j}) = z, \tag{189}$$

$$k, j = 1,2, \ldots, n; \; k < j.$$

O altă situație optimă se obține atunci cînd valorile date creșterilor ΔJ_k, $\Delta C_{k,j}$, cu respectarea condițiilor (175) asigură obținerea unei pulsații proprii maxime, adică se cere obținerea

$$\max \; (\omega_q')^2 (J_k + \Delta J_k, C_{k,j} + \Delta C_{k,j}) = z', \tag{190}$$

$$k, j = 1,2, \ldots, n; k < j.$$

Problema pusă sub aceste forme este o problemă de programare matematică, nerezolvată pînă în prezent în cazul general.

Dacă se recurge la relaţia aproximativă (176), care este o funcţie liniară de variabilele ΔJ_k, $\Delta C_{k,j}$, dacă condiţiile (175) conţin numai funcţii liniare de ΔJ_k, $\Delta C_{k,j}$, unele dintre aceste condiţii putînd fi, eventual, de tipul

$$F_\mu(\Delta J_k, \Delta C_{k,j}) \gtrless 0, \tag{191}$$

$$\mu = 1,2,\ldots, M-1$$

$$k, j = 1,2,\ldots, n,$$

$$k < j,\ M \leqslant N,$$

sau funcţia $f(\Delta J_k, \Delta C_{k,j})$ din (189) este de asemenea o funcţie liniară de ΔJ_k, $\Delta C_{k,j}$, problema devine o problemă de programare liniară, rezolvabilă prin metodele cunoscute.

EXEMPLE DE CALCUL

Exemplul 1. Se consideră un sistem cu trei rotori în lanţ pentru care se dau $\tau_{b.2} = 0{,}75$; $\tau_{b.3} = 1{,}25\ \text{s}^{-2}$; $\omega_1^2 = 3 - \sqrt{1{,}5} = 1{,}7752552\ \text{s}^{-2}$, $\omega_2^2 = 3 + \sqrt{1{,}5} = 4{,}2247448\ \text{s}^{-2}$. Se cere să se efectueze sinteza sistemului, determinînd valorile $\tau_{b.1}$ şi $\tau_{b.4}$. Problema se încadrează în cazul Ie de sinteză. Se constată îndeplinirea condiţiilor (21), (22), (24), (25), (27), (30). Se calculează cu relaţiile (32) şi (33) $a_1 = 6$, $a_2 = 7{,}5$. Aplicînd relaţia (74) se obţine $\Delta'' = 2{,}25$, deci rădăcinile ecuaţiilor (72) sînt reale şi distincte. Constatînd că $\tau_{b.2} \neq \tau_{b.3}$ se calculează valorile expresiilor $\tau_{b.2}^2 + \tau_{b.2}$, $\tau_{b.3} - a_1\tau_{b.2} + a_2 = 4{,}5 > 0$; $a_1 - 2\tau_{b.2} = 4{,}5 > 0$; $\tau_{b.3}^2 + \tau_{b.2}\tau_{b.3} - a_1\tau_{b.3} + a_2 = 2{,}5 > 0$; $a_1 - 2\tau_{b.3} = 3{,}5 > 0$. Condiţiile (77), (78), (80), (81) fiind îndeplinite se deduce că rădăcinile ecuaţiilor (72) sînt toate pozitive. Aplicînd relaţiile (73) se obţine $\tau'_{b.1} = 1{,}5$; $\tau''_{b.1} = 3$; $\tau'_{b.4} = 2{,}5$; $\tau''_{b.4} = 1$.

Exemplul 2. Se consideră un sistem oscilant alcătuit din doi rotori avînd momentele de inerţie $J_1 = 7{,}6$; $J_2 = 15{,}2\ \text{kgm}^2$ legaţi printr-o porţiune de arbore avînd constanta elastică $C_{1.2} = 11{,}4$ N.m. Se calculează valorile $\tau_{b.1} = 1{,}5$; $\tau_{b.2} = 0{,}75\ \text{s}^{-2}$. Ecuaţia pulsaţiilor proprii este $\omega_1^2 - (\tau_{b.1} + \tau_{b.2}) = 0$, rezultînd $\omega_1^2 = 2{,}25\ \text{s}^{-2}$. Se cere să se completeze sistemul oscilant cu un al treilea rotor avînd momentul de inerţie $J_3 = 8\ \text{kg.m}^2$ legat de cel de-al doilea rotor printr-o porţiune de arbore avînd constanta elastică $C_{2.3}$. Remarcînd că, în conformitate cu relaţia (39), pulsaţia proprie fundamentală a noului sistem este în orice caz mai mică decît ω_1^2, se impune valoarea $(\omega_1')^2 = 1{,}75\ \text{s}^{-2}$. Problema se încadrează în cazul II L de sinteză. Se calculează, în baza relaţiei (154) $\alpha_{4/3} = \tau_{b.4}/\tau_{b.3} = J_2/J_3 = 1{,}9$. Observînd că $(\omega_1')^2 > \tau_{b.1}$, se verifică îndeplinirea condiţiei (170) obţinînd $1{,}9 = \alpha_{4/3} > \dfrac{\tau_{b.1} - (\omega_1')^2}{(\omega_1')^2 - (\tau_{b.1} + \tau_{b.2})} = 0{,}5$. Aplicînd relaţia (169) se obţine

$\tau_{b,4} = 2{,}375$. Aplicînd relația (107) se obține $(\omega_2')^2 = 4{,}125\ s^{-2}$. Din (154) se obține $\tau_{b,3} = \tau_{b,4}/\alpha_4'_3 = 1{,}25$. Rezultă $C_{2.3} = \tau_{b,4} \cdot J_3 = \tau_{b,3} \cdot J_2 = 19$ N.m.

Exemplul 3. Se consideră un sistem în lanț cu $n=5$ rotori, avînd următoarele mărimi de bază : $J_1=1$; $J_2=J_3=2$; $J_4=3$; $J_5 = 10\ kg \cdot m^2$; $C_{1.2} = 2$; $C_{2.3} = 4$; $C_{3.4} = 6$; $C_{4.5} = 3$ N.m. În baza relațiilor (12) se obține $\tau_{b.1} = 2$; $\tau_{b.2} = 1$; $\tau_{b.3} = \tau_{b.4} = 2$; $\tau_{b.5} = 3$; $\tau_{b.6}=2$; $\tau_{b.7} = 1$; $\tau_{b.8} = 0{,}3 s^{-2}$. Aplicînd algoritmul descris în [5]—[8] se obține ecuația pulsațiilor proprii $(\omega_q^2)^4 - 13{,}3\ (\omega_q^2)^3 + 52{,}6\ (\omega_q^2)^2 - 68{,}7\ \omega_q^2 + 21{,}6 = 0$ avînd rădăcinile $\omega_1^2 = 0{,}45573$; $\omega_2^2 = 1{,}7115$; $\omega_3^2 = 3{,}7520$; $\omega_4^2 = 7{,}3807\ s^{-2}$. Făcînd apel la relațiile (180) — (188) se obține expresia (176) sub forma $(\omega_1')^2 = 0{,}45573 - 0{,}10073\ \Delta J_1 - 0{,}060054\ \Delta J_2 - 0{,}023428\ \Delta J_3 - 0{,}0046896\ \Delta J_4 - 0{,}017397\ \Delta J_5 + 0{,}011478\ \Delta C_{1.2} + 0{,}018573\ \Delta C_{2.3} + 0{,}015699\ \Delta C_{3.4} + 0{,}088098\ \Delta C_{4.5}$. Se cere să se determine valorile creșterilor $\Delta J_1, \ldots, \Delta C_{4.5}$ care asigură, pentru evitarea fenomenului de rezonanță, obținerea valorii $(\omega_1')^2 = 0{,}5\ s^{-2}$, cu condiția ca modificările relative maxime ale mărimilor de bază să fie $\pm 0{,}07$, iar suma acestor modificări relative să fie minimă, adică

$$\left| \frac{\Delta J_k}{J_k} \right| \leqslant 0{,}07\ ; \quad \frac{\Delta C_{k,k+1}}{C_{k,k+1}} \leqslant 0{,}07\ ;$$

$$\min \sum \left(- \frac{\Delta J_k}{J_k} + \frac{\Delta C_{k,k+1}}{C_{k,k+1}} \right),$$

$$k = 1,2, \ldots, 5.$$

Notînd $x_k = - \Delta J_k$; $x_{k+5} = \Delta C_{k,k+1}$ se obține problema de programare liniară $10{,}073\ x_1 + 6{,}0054\ x_2 + 2{,}3428\ x_3 + 0{,}46896\ x_4 + 1{,}7397\ x_5 + 1{,}478\ x_6 + 1{,}8573\ x_7 + 1{,}5699\ x_8 + 8{,}8098\ x_9 = 4{,}427$; $x_1 \leqslant 0{,}07$; $x_2 \leqslant 0{,}14$; $x_3 \leqslant 0{,}14$; $x_4 \leqslant 0{,}21$; $x_5 \leqslant 0{,}7$; $x_6 \leqslant 0{,}14$; $x_7 \leqslant 0{,}28$; $x_8 \leqslant 0{,}42$; $x_9 \leqslant 0{,}21$; $x_k \geqslant 0$; $\min (60\ x_1 + 30\ x_2 + 30\ x_3 + 20\ x_4 + 6\ x_5 + 30\ x_6 + 15\ x_7 + 10\ x_8 + 20\ x_9)$ cu soluția de bază optimă $x_1 = 0{,}0514639$; $x_2 = 0{,}14$; $x_5 = 0{,}7$; $x_9 = 0{,}21$; $x_3 = x_4 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$, care conduce la valorile $J_1' = 0{,}94853$; $J_2' = 1{,}86$; $J_5' = 9{,}3\ kg \cdot m^2$; $C_{4.5}' = 3{,}21$ N. m, celelalte mărimi de bază rămînînd nemodificate. Ecuația pulsațiilor proprii corespunzătoare este $(\omega_q^2)^4 - 13{,}7495\ (\omega_q^2)^3 + 56{,}88884\ (\omega_q^2)^2 - 78{,}54566\ \omega_q^2 + 26{,}77697 = 0$, cu rădăcinile $(\omega_1')^2 = 0{,}50223$; $(\omega_2')^2 = 1{,}7984$; $(\omega_3')^2 = 3{,}9571$; $(\omega_4')^2 = 7{,}4917 s^{-2}$. Se observă că valoarea $(\omega_1')^2$ obținută diferă cu 0,446% de valoarea propusă, datorită faptului că relația (176) este aproximativă.

Condițiile de nenegativitate puse în cadrul problemei de mai sus evită, date fiind valorile negative ale coeficienților creșterilor ΔJ_k și valorile pozitive ale coeficienților creșterilor $\Delta C_{k,k+1}$ din relația $(\omega_1')^2$, obținerea unor soluții implicînd scăderea valorilor unora dintre momentele de inerție simultan cu creșterea valorilor altora, respectiv creșterea valorilor unora dintre constantele elastice simultan cu scăderea valorilor altora.

Primită la redacție la 13 august 1979

BIBLIOGRAFIE

1. I. Crăciun, *O metodă de calcul al oscilațiilor de torsiune ale arborilor mașinilor cu ajutorul grafelor liniare.* St. cerc. mec. apl., **28**, *6*, 1381—1401, (1969).
2. — *Calculul oscilațiilor libere ale sistemelor torsionale complexe cu ajutorul grafelor liniare.* Buletinul Științific al Institutului politehnic din Cluj, *11*$_2$, 203—210, (1968).
3. — *Determinarea valorilor unor expresii ce intervin în calculul oscilațiilor forțate de torsiune prin metoda grafelor liniare.* În volumul: Institutul politehnic Cluj, Sesiunea științifică a cadrelor didactice, 22—23 decembrie 1969, Comunicări, 247—252.
4. — *Aproximații în calculul oscilațiilor de torsiune prin metoda grafelor liniare.* În volumul: A II-a Conferință de Mecanică tehnică, editat de CNIT, Ministerul Învățământului, MICM, Ministerul Transporturilor, București, 29—31 oct. 1970, partea I, 151—159.
5. — *Algoritmi în calculul sistemelor „în lanț" și „ramificate" cu ajutorul grafelor liniare de fluență.* St. cerc. mec. apl., **30**, *5*, 1075—1110 (1971).
6. — *Algoritmi în calculul oscilațiilor de torsiune ale sistemelor „închise" cu ajutorul grafelor liniare de fluență.* În volumul: Simpozionul de mecanisme și transmisii mecanice, Reșița, 1972, partea I, 284—291.
7. — *O ecuație caracteristică aproximativă stabilită prin metoda grafelor liniare de fluență.* St. cerc. mec. apl., **34**, *4*, 491—504 (1975).
8. A. Ripianu, I. Crăciun, *Osii, arbori drepți și arbori cotiți*, București, Editura tehnică, 1977.

SINTEZA STRUCTURALĂ A LANȚURILOR CINEMATICE PLANE ARTICULATE CU $N = 4$ CONTURURI ȘI GRAD DE LIBERTATE $L_3 = 5$ „TOTAL" SAU „PARȚIAL"

de IOSIF TEMPEA
Institutul politehnic București

Lucrarea prezintă o aplicație a metodei de sinteză numerică și structurală bazată pe teoria grafelor, dezvoltată de autor în lucrări anterioare și are ca rezultat stabilirea schemelor structurale ale lanțurilor cinematice plane articulate cu $N = 4$ contururi și grad de libertate $L_3 = 5$ „total" sau „parțial". Se obțin 753 de lanțuri cinematice, dintre care 65 cu grad de libertate „total" și 688 cu grad de libertate „parțial".
O parte din schemele acestor lanțuri sînt redate în extrasul din tabelul 4 anexat la lucrare. Schemele structurale obținute stau la baza construcției unor mecanisme noi, cu aplicații practice.

1. INTRODUCERE

1.1 Metoda de sinteză structurală propusă în lucrarea [8] se bazează pe utilizarea unor elemente de teoria grafelor și totodată pe folosirea noțiunii de diadă. În acest fel sinteza structurală a *LCpa**) cu grad de libertate $L_3=4$ poate fi împărțită în următoarele etape :

— sinteza structurală a lanțurilor care nu conțin diade, operație care poate fi realizată prin „expansiunea" grafelor contractate cu N contururi. Metoda de obținere a grafelor contractate și schemele acestora pentru $N=1 \ldots 5$ contururi sînt redate în lucrarea [9];

— sinteza structurală a lanțurilor care conțin diade și care pot fi obținute prin adăugarea unei diade la *LCpa* cu $N-1$ contururi.

1.2. *LCpa* cu grad de libertate $L_3=5$ pot conține în structura lor și formațiuni de trei elemente binare (de rang 2) legate succesiv. De aceea, față de sinteza structurală a lanțurilor cu $L_3=4$ se va introduce în plus o nouă etapă și anume sinteza structurală a *LCpa* care conțin o formație de trei elemente legate succesiv.

1.3. *LCpa* cu grad de libertate $L_3=5$ pot fi obținute printr-o altă metodă și anume pornind de la lanțurile cu grad de libertate $L_3=4$ și același număr de contururi prin introducerea unei grupe ne-Assur cu grad de mobilitate unu, formată dintr-un element și o cuplă de clasa a V-a. Această operație efectuată pe grafele asociate *LC* constă în introducerea unui punct de grad doi pe una din muchiile grafului inițial.

---

*) În continuare sînt utilizate următoarele prescurtări :
LC — lanț(uri) cinematic(e)
LCpa — lanț(uri) cinematic(e) plan(e) articulat(e).

În acest mod se vor obține însă numai LC cu grad de libertate $L_3=5$ care corespund unor grafe contractate comune cu cele cu $L_3=4$ din care s-au obținut. Pentru celelalte lanțuri sinteza structurală trebuie efectuată pornind de la grafele contractate corespunzătoare.

2. SINTEZA NUMERICĂ A ELEMENTELOR $LCpa$ CU $N=4$ ȘI $L_3=5$

2.1. Numerele elementelor de diferite ranguri j notate prin n_j aflate în structura $LCpa$ cu $N=4$ și $L_3=5$ pot fi obținute pornind de la $LCpa$ cu $N=4$ și $L_3=4$ prin mărirea numărului elementelor binare cu unitatea și păstrînd numerele elementelor de rang $j>2$.

Prin metoda tabelară propusă în [8] sinteza numerică a elementelor $LCpa$ cu $N=4$, $L_3=5$ poate fi obținută pornind de la $LCpa$ cu $N=3$, $L_3=5$ prin determinarea numerelor elementelor de diferite ranguri care apar prin adăugarea în toate modurile posibile a unei diade. Această metodă este prezentată în tabelul 1.

Tabelul 1

Sinteza numerică a elementelor $LCpa$ cu $N=4$ și $L_3=5$

Structura numerică a elementelor $LCpa$ cu $N=3$, $L_3=4$				+	Diada 10 11 $n'=2$; $C_5'=3$			Structura numerică a elementelor $LCpa$ cu $N=4$ $L_3=5$					
Partiția asociată	Numărul elem. de rang j				Modul de legare a cuplelor exterioare			Numărul elemen. de rang j				Notația partiției	Partiția asociată
	n_2	n_3	n_4					n_3	n_3	n_4	n_5		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$(2^5,3^4)$	5	4	0		cu 10 la n_2	cu 11 la n_2		5	6	0	0	I	$(2^5,3^6)$
					cu 10 la n_2	cu 11 la n_3		6	4	1	0	II	$(2^6,3^4,4)$
					cu 10 la n_3	cu 11 la n_3		7	2	2	0	III	$(2^7,3^2,4^2)$
$(2^6,3^2,4)$	6	2	1		cu 10 la n_2	cu 11 la n_3		6	4	1	0	II	
					cu 10 la n_2	cu 11 la n_3		7	2	2	0	III	
					cu 10 la n_2	cu 11 la n_4		7	3	0	1	IV	$(2^7,3^3,5)$
					cu 10 la n_3	cu 11 la n_3		8	0	3	0	V	$(2^8,4^3)$
					cu 10 la n_3	cu 11 la n_4		8	1	1	1	VI	$(2^8,3,4,5)$
$(2^7,4^2)$	7	0	2		cu 10 la n_2	cu 11 la n_2		7	2	2	0	III	
					cu 10 la n_2	cu 11 la n_4		8	1	1	1	VI	
					cu 10 la n_4	cu 11 la n_4		9	0	0	2	VII	$(2^9,5^2)$

Tabelul 2

Structura numerică a elementelor *LCpa* cu $N = 4$ şi $L_3 = 5$.

Nr. elementelor de rang j				Partiția asociată	Notația partiției	Subpartiția asociată elementelor de rang 2	Notația subpartiției	Nr. variantelor
n_2	n_3	n_4	n_5					
1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	6	0	0	$(2^5, 3^6)$	I	$(1, 2^2)$	a	28
						$(2, 3)$	b	6
						$(1^3, 2)$	c	66
						$(1^2, 3)$	d	24
						(1^5)	e	29
6	4	1	0	$(2^6, 3^4, 4)$	II	(2^3)	a	14
						$(1^2, 2^2)$	b	107
						$(1, 2, 3)$	c	38
						$(1^4, 2)$	d	102
						$(1^3, 3)$	e	54
						(1^6)	f	21
7	2	2	0	$(2^7, 3^2, 4^2)$	III	$(1, 2^3)$	a	28
						$(2^2, 3)$	b	10
						$(1^3, 2^2)$	c	50
						$(1^2, 2, 3)$	d	42
						$(1^5, 2)$	e	20
						$(1^4, 3)$	f	22
						(1^7)	g	3
7	3	0	1	$(2^7, 3^3, 5)$	IV	$(1, 2^3)$	a	8
						$(2^2, 3)$	b	2
						$(1^3, 2^2)$	c	16
						$(1^2, 2, 3)$	d	10
						$(1^5, 2)$	e	7
						$(1^4, 3)$	f	6
						(1^7)	g	1
8	0	3	0	$(2^8, 4^3)$	V	(2^4)	a	1
						$(1^2, 2^3)$	b	2
						$(1, 2^2, 3)$	c	2
						$(1^4, 2^2)$	d	2
						$(1^3, 2, 3)$	e	2
						$(1^5, 3)$	f	1
8	1	1	1	$(2^8, 3, 4, 5)$	VI	(2^4)	a	3
						$(1^2, 2^3)$	b	7
						$(1, 2^2, 3)$	c	6
						$(1^4, 2^2)$	d	3
						$(1^3, 2, 3)$	e	6
						$(1^5, 3)$	f	1
9	0	0	2	$(2^9, 5^2)$	VII	$(1, 2^4)$	a	1
						$(2^3, 3)$	b	1
						$(1^2, 2^2, 3)$	c	1

2.2. Pentru caracterizarea structurii numerice a elementelor, în lucrarea [8] s-a propus utilizarea noțiunii de „partiție asociată elementelor" *LCpa*. Această partiție se scrie sub forma $(2^{n_2}, 3^{n_3} \ldots j^{n_j})$.

2.3. Modul de dispunere a elementelor de rang doi în structura *LCpa* poate fi caracterizat prin utilizarea noțiunii de „subpartiție asociată elementelor de rang doi". Această subpartiție are forma $(1^{\alpha}, 2^{\beta}, 3^{\gamma})$, unde α reprezintă numărul elementelor de rang doi legate între elemente cu rang $j > 2$;

β — numărul de grupe de două elemente binare (diade) legate între elemente de rang $j > 2$;

γ — numărul de grupe formate din trei elemente binare legate succesiv cuprinse în structura lanțului.

2.4. Tabelul 2 cuprinde structura numerică a *LCpa* cu $N=4$, $L_3=5$ reprezentată prin partițiile asociate elementelor și subpartițiile asociate elementelor de rang 2. În coloana 9 se indică și numărul de variante obținute pentru fiecare caz pe baza metodei ce va fi expusă în continuare.

3. SINTEZA STRUCTURALĂ A LANȚURILOR CU PARTIȚIA ASOCIATĂ $(2^5, 3^6)$

3.1. Aceste lanțuri se obțin conform tabelului 1 din *LCpa* cu $N=3$ și partiția asociată $(2^5, 3^4)$ prin adăugarea unei diade cu cuplele exterioare la două elemente binare ale lanțului inițial. *LCpa* cu $N=3$ și $L_3=5$ au fost obținute în lucrarea [5] în care s-a stabilit că există 29 lanțuri cu grad de libertate $L_3=5$ „parțial", 6 cu grad de libertate $L_3=5$ „total" și 5 cu grad de libertate $L_3=5$ „fracționat".

În continuare se vor preciza posibilitățile de formare a lanțurilor cu diferite subpartiții asociate elementelor de rang 2, pentru partiția de mai sus.

3.2. Lanțurile cu subpartiția $(1,2^2)$ pot fi obținute din lanțurile cu $N=3$, $L_3=5$ cu partiția asociată $(2^5, 3^4)$ și următoarele subpartiții:

— subpartiția $(1,2^2)$ prin adăugarea unei diade cu o cuplă exterioară la elementul binar necuprins în diade și cealaltă la un element al unei diade a lanțului inițial (fig. 1 *a*) sau cu amîndouă cuplele exterioare la elementele aceleeași diade (fig. 1 *b*);

— subpartiția (2,3) prin legarea unei diade cu cel puțin una din cuplele exterioare la unul din elementele binare care face parte din cele trei, legate succesiv în lanțul inițial (fig. 1 *c*);

— subpartiția $(1^3, 2)$ prin adăugarea unei diade la două elemente binare care nu fac parte din diada lanțului inițial (fig. 1 *d*);

— subpartiția $(1^2, 3)$ ca în fig. 1 *e*.

3.3. Lanțurile cu subpartiția (2,3) se obțin din lanțurile cu $N=3$, $L_3=5$ cu partiția asociată $(2^5, 3^4)$ și următoarele subpartiții:

— subpartiția (2,3) prin legarea cuplelor exterioare ale diadei adăugate la elementele diadei cuprinsă în lanțul inițial (fig. 2 *a*);

— subpartiția $(1^2, 3)$ prin adăugarea diadei la elementele de rang 2 care nu sînt cuprinse în formația celor trei elemente binare legate succesiv (fig. 2 *b*).

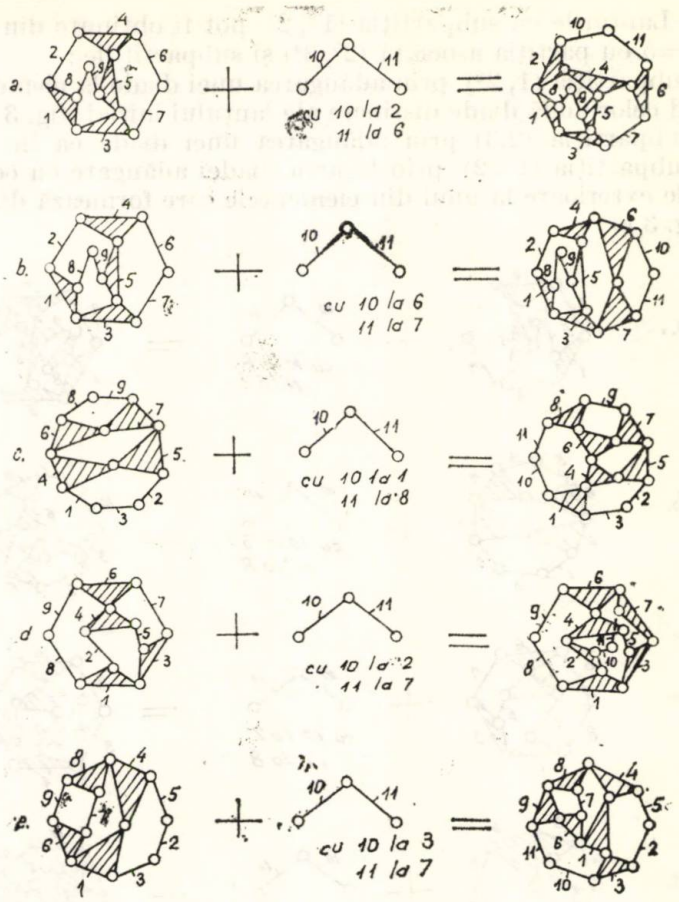


Fig. 1. — Obținerea *LCpa* cu $N = 4$, $L_3 = 5$, partiție $(2^5, 3^6)$ și subpartiție $(1, 2^2)$.

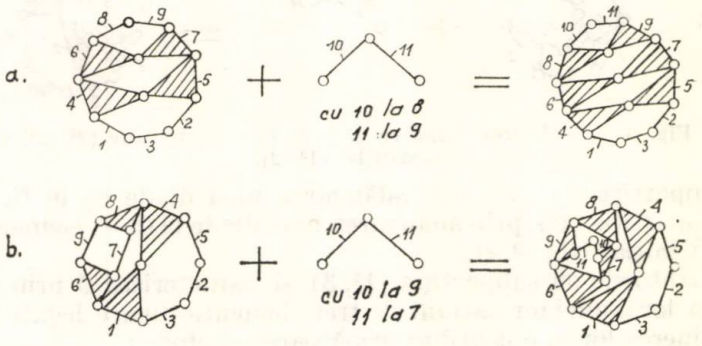


Fig. 2. — Alcătuirea *LCpa* cu $N = 4$, $L_3 = 5$, partiție $(2^5, 3^6)$ și subpartiție $(2, 3)$.

3.4. Lanţurile cu subpartiţia $(1^3, 2)$ pot fi obţinute din lanţurile cu $N=3$, $L_3=5$ cu partiţia asociată $(2^5, 3^4)$ şi subpartiţiile :

— subpartiţia $(1, 2^2)$ prin adăugarea unei diade la elementele binare aparţinînd celor două diade distincte ale lanţului iniţial (fig. 3 *a*) ;

— subpartiţia (2,3) prin adăugarea unei diade ca în figura 3 *b* ;

— subpartiţia $(1^3, 2)$ prin legarea diadei adăugate cu cel puţin una din cuplele exterioare la unul din elementele care formează diada lanţului iniţial (fig. 3 *c*) ;

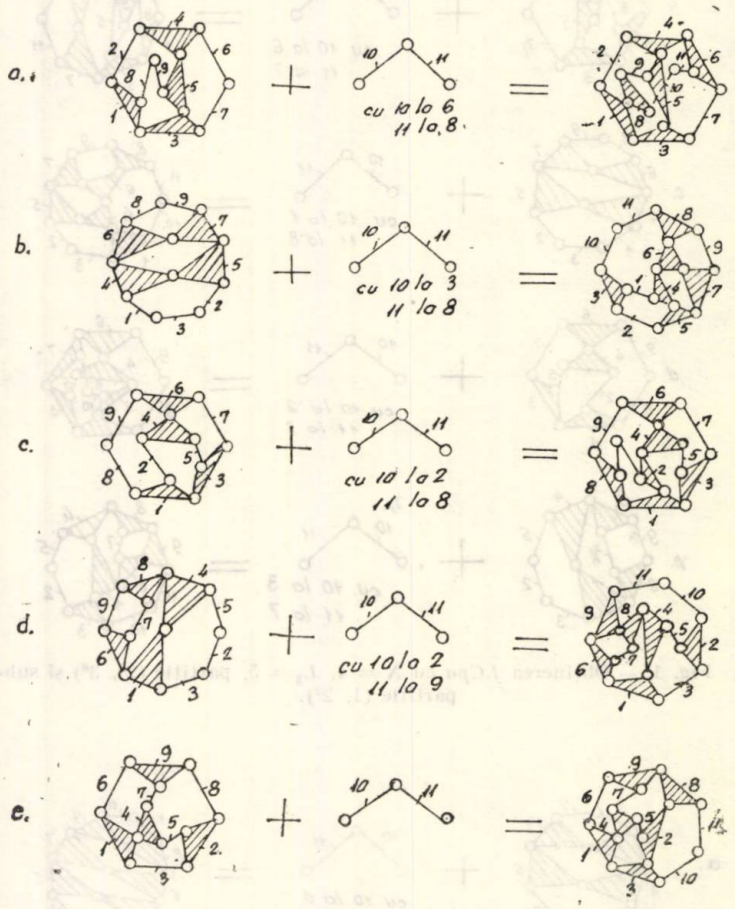


Fig. 3. — Alcătuirea *LCpa* cu $N = 4$, $L_3 = 5$, partiţie $(2^5, 3^6)$ şi subpartiţie $(1^3, 2)$.

— subpartiţia $(1^2, 3)$ prin adăugarea unei diade ca în figura 3 *d* ;

— subpartiţia (1^5) prin adăugarea unei diade la două elemente binare ale lanţului iniţial (fig. 3 *e*).

3.5. Lanţurile cu subpartiţia $(1^2, 3)$ se caracterizează prin existenţa în structura lor a unei formaţiuni de trei elemente binare legate succesiv. Pentru obţinerea lor se pot utiliza următoarele metode :

— introducerea unei grupe ne-Assur cu grad de mobilitate $M_3=1$ formată dintr-un element şi o cuplă, între elementele de rang doi ale diadei

din structura lanțurilor cu $N=4$, $L_3=4$ cu partiția asociată $(2^4, 3^6)$ și subpartiția $(1^2, 2)$ notate 10/6 ... 10/29 (tab. 9) [6]. Metoda este exemplificată în figura 4 *a* obținîndu-se un singur lanț inițial considerat;

— utilizarea grupei ne-Assur formată din trei elemente de rang doi și patru articulații ($M_3=1$) care se adaugă la elementele binare ale lanțurilor cu $N=3$, $L_3=4$ și partiție asociată $(2^4, 3)$ ca în figura 4 *b*.

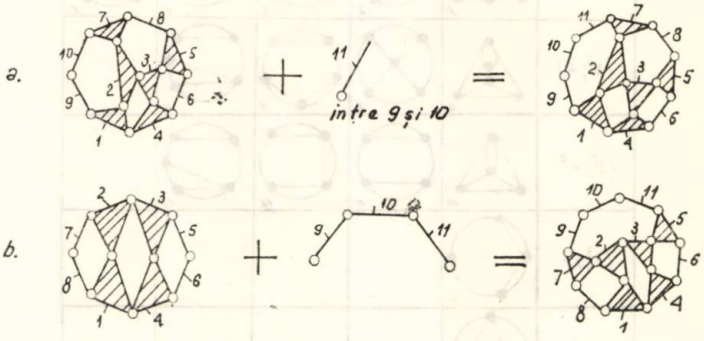


Fig. 4. — Obținerea *LCpa* cu $N = 4$, $L_3 = 5$ partiție $(2^5, 3^6)$ și subpartiție $(1^2, 3)$.

3.6. Lanțurile cu subpartiția (1^5) se caracterizează prin faptul că toate elementele de rang doi sînt dispuse între elemente de rang mai mare. Pentru alcătuirea lor se vor utiliza grafele contractate cu $N=4$ redate în tabelul 3 [12]. Prin operația de „expansiune" se dispun cele cinci puncte de grad doi pe muchiile grafelor contractate urmărind, ca toate contururile deformabile obținute să aibă cel puțin clasa a IV-a. Numărul total al variantelor se obține cu ajutorul teoremei lui Polya. Din cele cinci grafe cu partiția asociată 3^6 din tabelul 3 numai primele patru pot fi utilizate, deoarece graful 5 necesită cel puțin șase puncte pentru ca prin operația de „expansiune" toate contururile să aibă clasa a IV-a.

Se obțin în final 29 lanțuri cinematice.

4. SINTEZA STRUCTURALĂ A *LCpa* CU PARTIȚIA ASOCIATĂ $(2^6, 3^4, 4)$

4.1. Aceste lanțuri se pot obține conform tabelului 1 din lanțurile cu $N=3$ și $L_3=5$ în următoarele moduri:

— prin adăugarea unei diade cu o cuplă exterioară la un element ternar aparținînd lanțurilor inițiale cu partiția asociată $(2^5, 3^4)$;

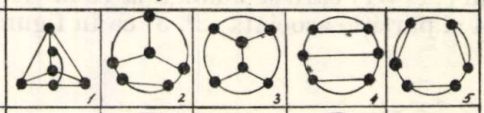
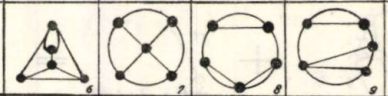
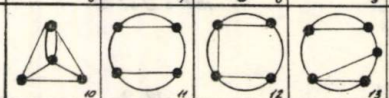
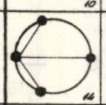
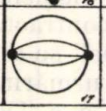
— prin adăugarea diadei la două elemente binare ale lanțurilor inițiale cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$.

În continuare se fac cîteva precizări privind obținerea lanțurilor cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ și diferite subpartiții.

4.2. Lanțurile cu subpartiția (2^3) conțin trei diade în structura lor. Ele se vor obține din lanțurile inițiale cu $N=3$, $L_3=5$ care au cel puțin două diade. De aceea se vor utiliza lanțurile cu partiția asociată $(2^5, 3^4)$ și subpartițiile $(1,2^2)$ și $(2,3)$ și lanțurile cu partiția $(2^6, 3^2, 4)$ și subpartiția

Tabelul 3

Grafele contractate cu $N=4$ contururi

Partiția asociată	Schemele grafelor contractate
(3^6)	
$(3^4, 4)$	
$(3^2, 4^2)$	
$(3^3, 5)$	
(4^3)	
$(3,4,5)$	
(5^2)	

(2^3) la care se adaugă o diadă astfel încît să se obțină subpartiția corespunzătoare.

4.3. Lanțurile cu subpartiția $(1^2, 2^2)$ se caracterizează prin existența a două diade în structura lor. Rezultă că lanțurile inițiale trebuie să conțină cel puțin o diadă. De aceea pot fi utilizate toate lanțurile cu $N=3$, $L_3=5$ și partiția asociată $(2^5, 3^4)$ cu excepția celor cu subpartiția (1^5) precum și lanțurile cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$. Trebuie utilizate de asemenea *LCpa* cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ și grad de libertate $L_3=5$ „fracționat".

4.4. Lanțurile cu subpartiția (1,2,3) se obțin prin adăugarea unei diade la lanțurile cu $N=3$, $L_3=5$ cu partiția asociată $(2^5, 3^4)$ și subpartițiile (2,3) și $(1^2, 3)$ și la lanțurile cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ și subpartițiile (1,2,3) și $(1^3, 3)$. Se obțin astfel 38 lanțuri cinematice.

4.5. Lanțurile cu subpartiția $(1^4, 2)$ se obțin pornind de la următoarele lanțuri cu $N=3$, $L_3=5$:

— *LCpa* cu partiția asociată $(2^5, 3^4)$ și subpartiții $(1^3, 2)$, $(1^2, 3)$, (1^5);

— *LCpa* cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ și subpartiții $(1^2, 2^2)$, (1,2,3), $(1^4, 2)$, $(1^3, 3)$ în aceste cazuri fiind incluse și lanțurile cu grad de libertate „fracționat".

4.6. Lanțurile cu subpartiția $(1^3, 3)$ prezintă un număr de variante egal cu numărul lanțurilor cu $N=4$ contururi, $L_3=4$, partiție asociată $(2^5, 3^4, 4)$ și subpartiție $(1^3, 2)$. Aceste lanțuri sînt redate în tab. 9 [6].

4.7. Lanțurile cu subpartiția (1^6) se obțin prin „expansiunea" grafelor contractate cu partiția asociată $(3^6, 4)$ notate 6...9 tab. 3.

Cele șase puncte de grad doi vor fi dispuse pe muchiile grafelor contractate, operația de expansiune fiind echivalentă cu colorarea muchiilor cu două culori.

Aplicînd teorema lui Polya se obțin următoarele rezultate:

— graful 6 prin operația de expansiune dă naștere la 9 grafe distinct colorate cărora le corespund 9 *LCpa*;

— graful 7 conduce la obținerea a 6 *Lcpa* neechivalente;

— graful 8 determină un singur lanț cinematic, deoarece prin operația de expansiune punctele de grad doi trebuie plasate în mod obligatoriu pe cele trei muchii duble astfel încît clasa minimă a contururilor obținute să fie cel puțin patru;

— graful 9 conduce la obținerea a șase *LCpa* dintre care unul conține un ansamblu rigid de elemente și nu va fi luat în considerație.

5. SINTEZA STRUCTURALĂ A *LCpa* CU PARTIȚIA ASOCIATĂ $(2^7, 3^2, 4^2)$

5.1. Lanțurile cu această partiție asociată pot fi obținute conform tabelului 1 în următoarele moduri:

— din lanțurile inițiale ($N=3$, $L_3=5$) cu partiția asociată $(2^5, 3^4)$ prin adăugarea unei diade cu ambele cuple exterioare la două elemente ternare ale lanțului inițial;

— din lanțurile inițiale cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ prin adăugarea unei diade cu o cuplă exterioară la un element binar și cealaltă la un element ternar al lanțului inițial:

— din lanțurile inițiale cu partiția asociată $(2^7, 4^2)$ prin adăugarea unei diade cu ambele cuple la două elemente binare ale lanțului inițial.

5.2. Lanțurile cu subpartiția $(1,2^3)$ se obțin prin amplificarea cu o diadă a următoarelor lanțuri inițiale;

— *LCpa* cu partiția asociată $(2^5, 3^4)$ și subpartiție $(1,2^2)$;

— *LCpa* cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ și subpartiții (2^3) $(1^2, 2^2)$ și (1,2,3) în acest ultim caz luînd în considerație și lanțurile cu grad de libertate „fracționat";

— *LCpa* cu partiția asociată $(2^7, 4^2)$ și toate subpartițiile posibile în acest caz.

5.3. Lanțurile cu subpartiția $(2^2, 3)$ rezultă utilizînd următoarele lanțuri cu $N=3$, $L_3 = 5$:

—*LCpa* cu partiția $(2^5, 3^4)$ și subpartiția (2,3);

— *LCpa* cu partiția $(2^6, 3^2, 4)$ și subpartiția (1,2,3);

— *LCpa* cu partiția $(2^7, 4^2)$ și subpartițiile $(2^2, 3)$ și $(1^2, 2, 3)$.

5.4. *LCpa* cu subpartiția $(1^3, 2^2)$ se obțin din următoarele lanțuri inițiale:

— *LCpa* cu partiția asociată $(2^5, 3^4)$ și subpartiția $(1^3, 2)$;

— *LCpa* cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ și subpartițiile $(1^2, 2^2)$, (1,2,3), $(1^4, 2)$, $(1^3, 3)$ în cazul subpartiției (1,2,3) fiind luate în considerare și lanțurile cu grad de libertate „fracționat";

— *LCpa* cu partiția asociată $(2^7, 4^2)$ și toate subpartițiile posibile în acest caz.

5.5. *LCpa* cu subpartiția $(1^2, 2, 3)$ rezultă folosind lanțurile inițiale:

— *LCpa* cu partiția asociată $(2^5, 3^4)$ și subpartiție $(1^2, 3)$;

— *LCpa* cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ și subpartiții (1,2,3) și $(1^3, 3)$;

— *LCpa* cu partiția asociată $(2^7, 4^2)$ și toate subpartițiile posibile în acest caz.

5.6. *LCpa* cu subpartiția $(1^5, 2)$ se obțin pornind de la lanțurile inițiale cu următoarele caracteristici:

— partiția asociată $(2^5, 3^4)$ și subpartiție (1^5);

— partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ și subpartiții $(1^4, 2)$ și $(1^3, 3)$ în cel de al doilea caz fiind inclus și singurul lanț cu grad de libertate $L_3=5$ „fracționat" existent;

— partiția asociată $(2^7, 4^2)$ și subpartiție $(1^2, 2, 3)$

5.7. *LCpa* cu subpartiția $(1^4, 3)$ se obțin pornind de la lanțurile cu $N=4$, $L_3=4$ cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4^2)$ și subpartiție $(1^4, 2)$ notate cu 10/176 . . .10/197 în tab. 9 [6].

5.8. *LCpa* cu subpartiția (1^7) se obțin prin expansiunea grafelor contractate cu partiția asociată $(3^2, 4)$ notate prin 10 . . .13 în tabelul 3. Deoarece numărul muchiilor este egal cu cel al punctelor de grad doi, rezultă că pentru fiecare graf contractat va corespunde un singur graf asociat unui lanț cinematic.

6. SINTEZA STRUCTURALĂ A *LCpa* CU PARTIȚIA ASOCIATĂ $(2^7, 3^3, 5)$

6.1. Aceste lanțuri se pot obține din lanțurile inițiale cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ prin adăugarea unei diade cu o cuplă exterioară la un element binar și cealaltă la un element de rang patru al lanțului cinematic. De asemenea, trebuie luate în considerație și *LCpa* cu grad de libertate $L_3 = 5$ „fracționat" și partiție asociată $(2^7, 3, 5)$.

Pentru diferite subpartiții cuprinse în tabelul 2 se vor utiliza lanțurile inițiale cu subpartițiile precizate mai jos.

6.2. *LCpa* cu subpartiția $(1,2^3)$ se obțin pornind de la lanțurile inițiale cu partiția asociată și subpartițiile (2^3), $(1^2, 2^2)$, (1, 2, 3) precum și cele două *LCpa* cu partiția asociată $(2^7, 3, 5)$.

6.3. *LCpa* cu subpartiția $(2^2, 3)$ se obțin prin amplificarea cu diadă a *LCpa* cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ și subpartiție (1,2,3).

6.4. *LCpa* cu subpartiția $(1^3, 2^2)$ se obțin pornind de la lanțurile inițiale cu partiția asociată $(2^7, 3^3, 5)$ și subpartițiile $(1^2, 2^2)$, (1, 2, 3), $(1^4, 2)$ și $(1^3, 3)$, în acest caz trebuie luate în considerație și lanțurile cu partiția $(2^7, 3, 5)$ și grad de libertate $L_3 = 5$ „fracționat".

6.5. *LCpa* cu subpartiția (1,2,3) rezultă utilizînd lanțurile inițiale cu subpartițiile (1, 2,3) și $(1^3, 3)$.

6.6. *LCpa* cu subpartiția $(1^5, 2)$ se obțin prin amplificarea cu diada a lanțurilor cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ și subpartițiile $(1^4, 2)$ și $(1^3, 3)$

și a lanțului cu grad de libertate „fracționat" cu partiția asociată $(2^7, 3, 5)$ și subpartiția $(1^2, 2, 3)$.

6.7. *LCpa* cu subpartiția $(1^4, 3)$ se obțin din *LCpa* cu $N=4$, $L_3=4$ cu partiția asociată $(2^6, 3^3, 5)$ și subpartiția $(1^4, 2)$ prin adăugarea unei grupe ne-Assur cu grad de mobilitate $M_3 = 1$.

6.8. *LCpa* cu subpartiția (1^7) se obțin prin expansiunea grafului 14 din tabelul 3. Rezultă un singur lanț cinematic.

7. SINTEZA STRUCTURALĂ A *LCpa* CU PARTIȚIA ASOCIATĂ $(2^8, 4^3)$

7.1. Aceste lanțuri se obțin conform tabelului 1 prin adăugarea unei diade cu ambele cuple exterioare la elementele ternare ale lanțurilor inițiale cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$.

7.2. *LCpa* cu subpartiția (2^4) se obțin utilizînd lanțurile inițiale cu subpartiția (2^3).

7.3. *LCpa* cu subpartiția $(1^2, 2^3)$ rezultă pornind de la lanțurile cu subpartiția $(1^2, 2^2)$.

7.4. *LCpa* cu subpartiția $(1,2^2, 3)$ se obțin prin amplificarea cu diada a lanțurilor inițiale cu subpartiția (1,2,3).

7.5. *LCpa* cu subpartiția $(1^4, 2^2)$ rezultă pornind de la lanțurile inițiale cu subpartiția $(1^4, 2)$.

7.6. *LCpa* cu subpartiția $(1^3, 2, 3)$ se obțin utilizînd lanțurile inițiale cu subpartiția $(1^3, 3)$.

7.7. *LCpa* cu subpartiția $(1^5, 3)$ se obțin pornind de la lanțurile inițiale cu $N=4$, $L_3=4$ partiție asociată $(2^7, 4^3)$ și subpartiție $(1^5, 2)$.

8. SINTEZA STRUCTURALĂ A *LCpa* CU PARTIȚIA ASOCIATĂ $(2^8, 3, 4, 5)$

8.1. Aceste lanțuri rezultă conform tabelului 1 din lanțurile inițiale cu $N_3=3$, $L_3=5$ și partiție asociată $(2^6, 3^2, 4)$ prin adăugarea unei diade cu o cuplă exterioară la un element ternar și cealaltă la un element de rang 4 ale lanțului inițial și din lanțurile cu partiția asociată $(2^7, 4^2)$ prin legarea diadei la un element binar și unul de rang 4 ale lanțului inițial.

Pentru diferite subpartiții asociate elementelor de rang doi se vor utiliza lanțurile inițiale conform precizărilor ce urmează.

8.2. Pentru *LCpa* cu subpartiția (2^4) se utilizează :

— lanțurile inițiale cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ și subpartiția (2^3) ;

— lanțurile cu partiția asociată $(2^7, 4^2)$ și subpartițiile $(1,2^3)$ și $(2^2, 3)$;

— lanțul cu grad de libertate „fracționat" cu partiția asociată $(2^7, 3, 5)$ și subpartiția $(2^2, 3)$.

8.3. *LCpa* cu subpartiția $(1^2, 2^3)$ rezultă din :

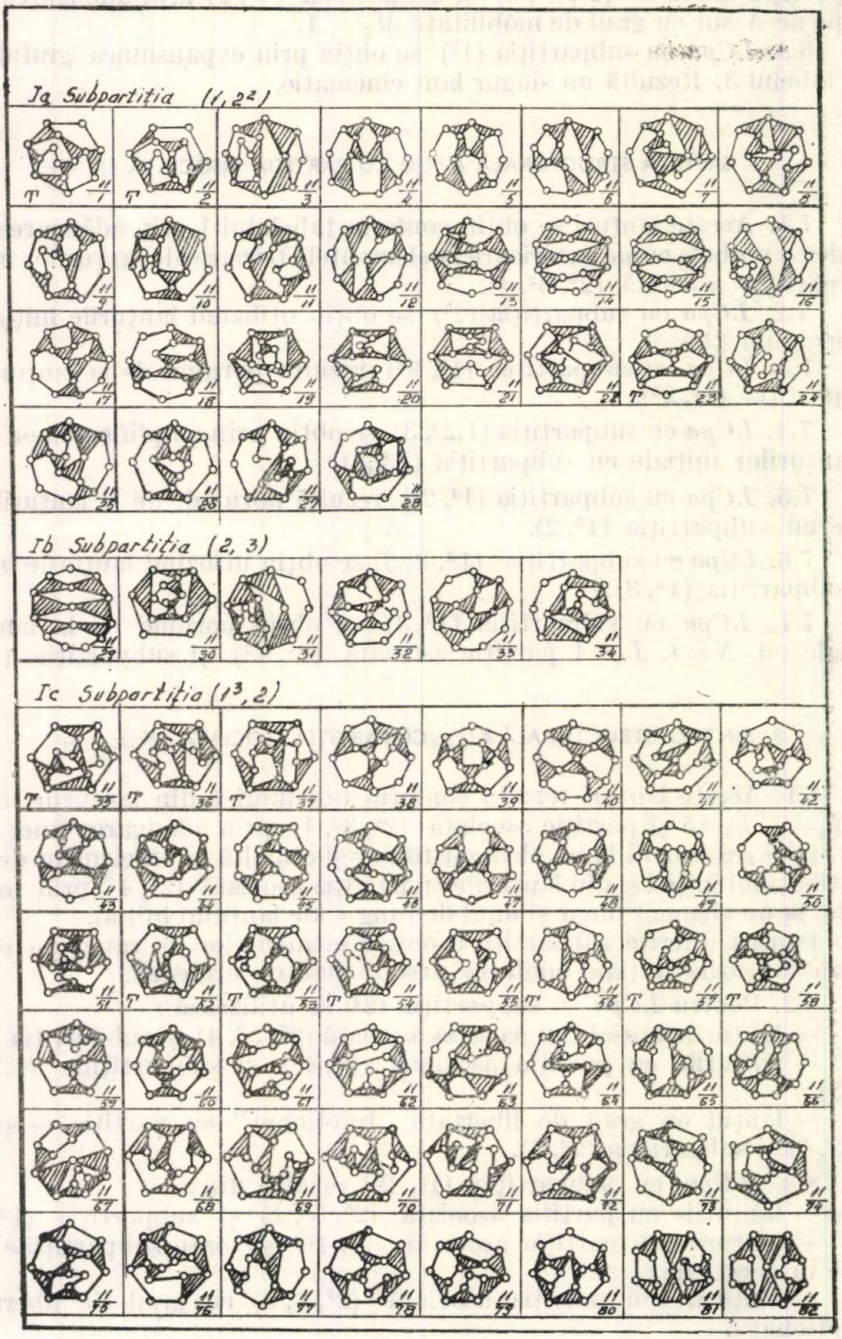
— lanțurile cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ și subpartiția $(1^2, 2^2)$;

— lanțurile cu partiția asociată $(2^7, 4^2)$ și toate subpartițiile existente în acest caz ;

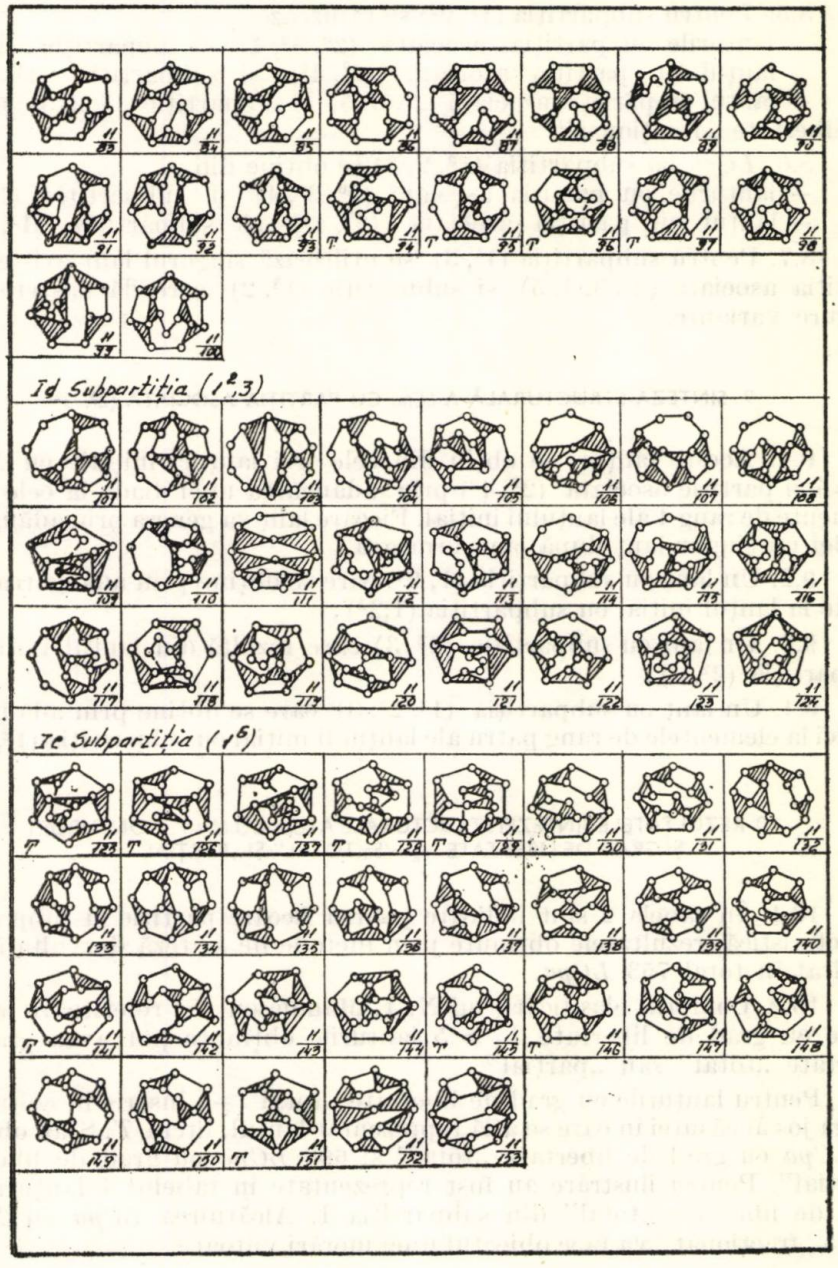
— lanțurile cu partiția asociată $(2^7, 3, 5)$ cu grad de libertate „fracționat".

Tabelul 4

LCpa cu $N=4$ contururi și grad de libertate $L_3=5$ „*total*" sau „*parțial*"



Tabelul 4 (continuare)



8.4. *LCpa* cu subpartiția $(1, 2^2, 3)$ se obțin din :
— lanțurile cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ și subpartiția (1,2,3);
— Lanțurile cu partiția asociată $(2^7, 4^2)$ și subpartiții $(2^2, 3)$ și $(1^2, 2, 3)$.

8.5. Pentru subpartiția $(1^4, 2^2)$ se utilizează :
— lanțurile cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ și subpartiție $(1^4, 2)$;
— lanțul cu partiția asociată $(2^7, 4^2)$ și subpartiția $(1^2, 2, 3)$;
— lanțul cu partiția asociată $(2^7, 3, 5)$ și subpartiție $(1^2, 2, 3)$ și grad de libertate „fracționat".

8.6. *LCpa* cu subpartiția $(1^3, 2, 3)$ se obține din :
— lanțurile cu partiția asociată $(2^6, 3^2, 4)$ și subpartiție $(1^3, 3)$;
— lanțul cu partiția asociată $(2^7, 4^2)$ și subpartiția $(1^2, 2, 3)$.

8.7. Pentru subpartiția $(1^5, 3)$ se utilizează singurul lanț existent cu partiția asociată $(2^7, 3, 4, 5)$ și subpartiție $(1^5, 2)$ care dă naștere unei singure variante.

9. SINTEZA STRUCTURALĂ A *LCpa* CU PARTIȚIA ASOCIATĂ $(2^9, 5^2)$

9.1. Aceste lanțuri se obțin din cele trei lanțuri inițiale cu $N=3$, $L_3=5$ și partiție asociată $(2^7, 4^2)$ prin adăugarea unei diade la cele două elemente de rang 4 ale lanțului inițial. Fiecare lanț va genera prin adăugarea diadei un singur lanț după cum urmează :

9.2. Un lanț cu subpartiția $(1, 2^4)$ care se obține prin adăugarea unei diade la lanțul inițial cu subpartiția $(1,2^3)$;

9.3. Un lanț cu subpartiția $(2^3, 3)$ care rezultă din lanțul inițial cu subpartiția $(2^2, 3)$;

9.4. Un lanț cu subpartiția $(1^2, 2^2, 3)$ care se obține prin adăugarea diadei la elementele de rang patru ale lanțului inițial cu subpartiția $(1^2, 2,3)$.

10 REZULTATELE SINTEZEI STRUCTURALE A *LCpa* CU $N=4$ CONTURURI ȘI GRAD DE LIBERTATE $L_3=5$ „TOTAL" ȘI „PARȚIAL"

10.1. În tabela 2 sînt indicate pentru fiecare partiție și subpartiție caracteristică, rezultatele obținute prin metode de sinteză dezvoltată. Au rezultat în total 753 *LCpa*.

10.2. Conform clasificării lui N. I. Manolescu [5] referitoare la lanțurile cu grad de libertate $L_3 \geqslant 5$ lanțurile obținute pot avea grad de libertate „total" sau „parțial".

Pentru lanțurile cu grad de libertate „total" s-a înscris în colțul din stînga jos al căsuței în care se află reprezentat lanțul, litera T. S-au obținut 65 *LCpa* cu grad de libertate „total" și 668 *LCpa* cu grad de libertate „parțial". Pentru ilustrare au fost reprezentate în tabelul 4 lanțurile cu grad de libertate „total" din subpartiția I. Alcătuirea *LCpa* cu $N=4$, $L_3=5$ „fracționat" va face obiectul unei lucrări viitoare.

Primită la redacție la 21 februarie 1977

BIBLIOGRAFIE

1. C. BERGE, *Teoria grafurilor și aplicațiile ei* (trad. din lb. franceză), Edit. tehnică, 1969.
2. F. R. F. CROSSLEY, *A Contribution to Gruebler's Theory in the Number Synthesis of Plane Mechanisms*, J. Engng. Ind., **64**, *2* (1964).
3. L. DOBRJANSKYJ, F. FREUDENSTEIN, *Some Applications of Graph Theory to Structural Analysis of Mechanisms*, J. Engng. Ind., **89**, *1* (1967).
4. F. FREUDENSTEIN, *The Basic Concepts of Polya's Theory of Enumeration, with Examples from the Structural Classification of Mechanisms*, J. Mechanisms, **2**, *3* (1967).
5. N. I. MANOLESCU, *Une méthode unitaire pour la formation des chaines cinématiques et des mécanismes plans articulés avec differents dégrés de liberté et mobilité*, Rev. Roum. Sci. Techn., Méc. Appl., **9**, *6* (1964).
6. N. I. MANOLESCU, IOSIF TEMPEA, *Sinteza structurală a lanțurilor cinematice plane articulate cu* $e = 10$ *elemente,* $C_5 = 13$ *articulații și grad de libertate* $L_3 = 4$, Bul. Inst. polit. Buc., **31**, *4* (1969).
7. CHR. PELECUDI, *Metoda contururilor în sinteza numerică și structurală a lanțurilor cinematice*, St. cerc. mec. apl., **25**, *3* (1967).
8. IOSIF TEMPEA, *Contribuții la sinteza structurală a lanțurilor și mecanismelor plane cu ajutorul teoriei grafelor*, Ses. științifică a Acad. Militare, aprilie 1970.
9. IOSIF TEMPEA, *Sinteza structurală a lanțurilor cinematice plane generale cu* $N = 1, 2, 3$ *contururi deformabile și grad de libertate* $L_3 = 4$, St. cerc. mec. apl. **31**, *1* (1972).
10. L. S. WOO, *Type Synthesis of plane linkages*, J. Engng. Ind., **89**, *1* (1967).

CARACTERIZAREA RĂSPUNSULUI PRINCIPALELOR TIPURI DE PĂMÎNTURI LA SOLICITĂRI SEISMICE. I. CARACTERIZAREA PROPRIETĂȚILOR ELASTICE ȘI DISIPATIVE

de ECATERINA BORCIA

Institutul de fizică și tehnologia materialelor — București

Lucrarea constituie o sinteză a datelor existente în literatura de specialitate privind caracterizarea răspunsului principalelor tipuri de pămînturi la solicitări seismice.
În prima parte a articolului se face o analiză a factorilor ce influențează proprietățile elastice și disipative ale argilelor, nisipurilor și calcarelor.
În partea a doua a articolului sînt prezentate modelele neliniare utilizabile în descrierea răspunsului la solicitarea ciclică de forfecare indusă de mișcarea seismică.

1. INTRODUCERE

S-a observat că în timpul mișcării seismice, presiunea medie pe un element de pămînt rămîne aproximativ constantă, în timp ce tensiunea tangențială variază ciclic. De aceea, pentru modelarea răspunsului masivelor de pămînt la mișcarea seismică, solicitarea reală este aproximată printr-o încărcare ciclică de forfecare ce se suprapune peste o presiune medie constantă. Amplitudinea, frecvența și numărul ciclurilor se aleg astfel încît solicitarea produsă prin ciclurile uniforme să fie cît mai apropiată de cea reală. De exemplu, pentru cutremurul de Niigata (1964) se consideră [1] că solicitarea indusă de seism este aproximată rezonabil prin 25 de cicluri uniforme de încărcare cu tensiune controlată, de amplitudinea egală cu 65% din amplitudinea maximă înregistrată în timpul cutremurului.

Observațiile experimentale au arătat că răspunsul dinamic al pămînturilor este determinat în principal de modulul secant de elasticitate transversală G_s și de coeficientul de amortizare internă λ.

În consecință, experimentatorii și-au îndreptat atenția asupra metodelor de determinare a modulului secant G_s și a coeficientului de amortizare λ, precum și asupra factorilor care influențează valorile lui G_s și λ pentru diferite tipuri de pămînturi.

În cele ce urmează, vom prezenta o sinteză a rezultatelor obținute, pornind de la lucrările elaborate de Hardin și Drnevich [3], [4], Seed și Idriss [9], Silver și Seed [11], [12] pentru argile și nisipuri și de Yang și Hatheway [14] pentru calcare.

2. METODE DE DETERMINARE EXPERIMENTALĂ A MODULULUI SECANT DE ELASTICITATE TRANSVERSALĂ G_s ŞI A COEFICIENTULUI DE AMORTIZARE INTERNĂ λ

Metodele de determinare a modulului G_s şi a coeficientului λ se împart după locul în care se efectuează măsurătorile în două mari grupe, de laborator şi de teren.

Rezultatul măsurătorilor de teren diferă în general de cele efectuate în laborator, aceste diferenţe variind de la un tip de pămînt la altul. Vom prezenta pe scurt, principalele surse ale acestor diferenţe.

Cea mai importantă sursă este „tulburarea" probelor pe care se efectuează experienţele de laborator. Această tulburare este cauzată de două procese : o „tulburare" datorată forării, prelevării şi pregătirii probei şi o „tulburare" datorită modificării stării de tensiune a probei atît în timpul recoltării cît şi prin aplicarea tensiunii de reconsolidare. De obicei, reconsolidarea probelor se face într-un cîmp izotrop de tensiune, presiunea de consolidare ce se aplică fiind calculată pe baza tensiunii geostatice :

$$\sigma'_m = \frac{1 + 2K_0}{3} \sigma'_v,$$

unde σ'_v reprezintă tensiunea geostatică verticală, care este funcţie de adîncimea de la care s-a recoltat proba ;

K_0 — coeficientul de împingere laterală, care poate fi exprimat în funcţie de coeficientul lui Poisson sub forma

$$K_0 = \frac{\nu}{1 - \nu}.$$

Nu există încă metode directe de determinare in situ a valorii coeficientului K_0.

Valoarea atribuită lui K_0 influenţează valoarea presiunii efective medii, care la rîndul ei influenţează rigiditatea probei şi implicit valoarea vitezei v_s măsurată în laborator.

Situaţia este şi mai gravă în cazul pămînturilor care manifestă proprietăţi anizotrope pronunţate. Aplicarea presiunii izotrope de consolidare induce în acest caz deformaţii de forfecare ce produc „tulburarea" materialului.

În general, cu excepţia nisipurilor afînate, „tulburarea" probei conduce la reducerea rigidităţii.

În laborator, există tendinţa de a lucra cu probe mai „moi" decît sînt în teren. O comparaţie între valorile v_s obţinute pe probe „tari" — recoltate de la adîncimea de 52 m şi „moi" — recoltate de la adîncimea de 43 m, pune în evidenţă diferenţe de pînă la 80%.

Valoarea v_s determinată în laborator depinde de tipul de consolidare t_c (v_s creşte proporţional cu lg t_c). Întrucît fenomenul de consolidare nu este complet stăpînit, pot exista diferenţe între durata consolidării probei şi timpul acordat pentru consolidare în laborator (în coloana rezonantă — 20 ore).

În coloana rezonantă se înregistrează viteza de propagare a undei de forfecare orizontale, iar in situ se înregistrează unda de forfecare verticală. Dacă materialele analizate prezintă anizotropie, atunci această diferență conduce la obținerea rezultatelor diferite.

Încercările de vibrații realizate în teren și în laborator duc la rezultate diferite datorită neomogenității probelor. Răspunsul dinamic al unei probe cilindrice neomogene solicitate la vibrații de torsiune depinde de : compoziția probei, distribuția materialelor cu rigidități diferite în probă, precum și de condițiile de frontieră impuse de aparatura de laborator folosită.

În timpul generării undelor seismice în teren, energia tinde să parcurgă drumul cel mai rapid, care nu este în mod necesar și cel mai scurt, ținînd cont de neomogenitatea materialelor aflate în depozitul analizat. Prin măsurătorile seismice, se pot determina valori superioare ale vitezei v_s, dacă prima undă înregistrată este o undă refractată care a traversat un material mai tare. Pentru o distanță fixată, înregistrarea unui timp de parcurs scurt conduce la o supraestimare a vitezei v_s.

Chiar în cazul aceleiași grupe de metode (de laborator sau de teren) rezultatele diferă după aparatura folosită, împrăștierea rezultatelor variind cu natura pămîntului de analizat.

Vom prezenta mai jos după [9] principalele metode de determinare a modulului secant G_s și a coeficientului de amortizare λ.

a. DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A CURBELOR TENSIUNE-DEFORMAȚIE

Determinarea curbelor tensiune-deformație se realizează în laborator prin încercări ciclice efectuate în aparatul de compresiune axial-simetrică („triaxial"), în caseta de forfecare sau în aparatul de forfecare prin torsiune. Aceste aparate, ce se găsesc în dotarea curentă a laboratoarelor geotehnice, furnizează date din domeniul deformațiilor relativ mari.

Determinarea experimentală a curbelor tensiune-deformație deși nu oferă date pentru valori mici ale deformației, constituie un instrument de verificare a ecuațiilor constitutive propuse pentru diferite tipuri de pămînturi.

b. ÎNCERCĂRI DE VIBRAȚII FORȚATE

În general, în încercările de vibrații forțate se măsoară frecvența de rezonanță și curba de răspuns a materialului, pe baza lor calculîndu-se valoarea modulului G_s și a coeficientului λ în domeniul deformațiilor mici.

În laborator, pentru încercările de vibrații forțate se folosesc masa vibrantă, coloana rezonantă și testele pulsatorii ;

— La masa vibrantă, probele cilindrice de pămînt stratificat sînt supuse la vibrații longitudinale și de torsiune.

— În coloana rezonantă, măsurătorile efectuate pe probe cilindrice pline supuse la vibrații longitudinale, permit determinarea directă a modulului de elasticitate longitudinală, iar măsurătorile efectuate pe probe cilindrice pline (pentru deformații mici) sau inelare (pentru deformații

moderate) supuse la vibrații de torsiune, permit determinarea modulului secant de elasticitate transversală G_s.

— Testele pulsatorii [11] se folosesc pentru determinarea proprietăților dinamice ale pămînturilor în domeniul deformațiilor mici, pe baza timpului necesar trecerii tensiunii pulsatorii între două puncte ale probei în care pot fi calculate viteza de propagare și modulul de elasticitate.

În teren, încărcările de vibrații forțate se efectuează cu ajutorul vibratoarelor mari.

c. ÎNCERCĂRI DE VIBRAȚII LIBERE

Încercările în care se măsoară răspunsul probei sau al masivului de pămînt la vibrații libere, permit determinarea valorilor G_s și λ în cazul deformațiilor mici și moderate.

Pentru realizarea solicitării, se folosesc aceleași aparate ca în cazul vibrațiilor forțate.

d. MĂSURAREA VITEZEI DE PROPAGARE A UNDELOR

Prin folosirea unor tehnici seismologice de măsurare a vitezei de propagare a undelor de compresiune, de forfecare și Rayleigh, se determină valoarea modulului G_s pentru deformații mici, dar nu și valoarea coeficientului de amortizare λ.

e. ANALIZA RĂSPUNSULUI LA MIȘCĂRI SEISMICE

În cîteva cazuri în care s-au obținut înregistări ale mișcării induse de seism la diferite adîncimi în masivul de pămînt s-au putut determina, prin analiza răspunsului la mișcarea seismică, valorile modulului secant G_s și ale coeficientului de amortizare λ proprii pămîntului analizat.

3. CARACTERIZAREA GENERALĂ A FACTORILOR CE INFLUENȚEAZĂ MODULUL DE ELASTICITATE TRANSVERSALĂ G_s ȘI COEFICIENTUL DE AMORTIZARE INTERNĂ λ

Cea mai mare influență atît asupra modulului secant G_s, cît și asupra coeficientului de amortizare λ, o are starea de deformație ce se dezvoltă în proba sau masivul de pămînt analizat.

Studiile experimentale au arătat că, în raport cu deformația specifică de lunecare γ, modulul secant de elasticitate transversală G_s descrește, iar coeficientul de amortizare internă λ crește. Modelele analitice utilizate pentru descrierea dependenței lui G_s și λ în funcție de γ vor fi prezentate în partea a doua a acestui articol.

Ceilalți factori importanți sînt, după [3], [9], tensiunea efectivă medie (inițială) σ'_m, numărul de cicluri N, indicele porilor e, densitatea relativă D_r și gradul de saturare S.

Ca factori cu influență mai mică sînt considerați : tensiunea octaedrică inițială, coeficientul lui Poisson ν, coeficientul de împingere laterală K_0, raportul de supraconsolidare n_c, coeziunea c și unghiul de frecare internă Φ.

Efectul frecvenței este considerat a fi neglijabil pentru domeniul cutremurelor (0,1 Hz — 20 Hz) ([13]). De asemenea, fluajul și relaxarea sînt neglijabile în raport cu solicitarea dinamică.

În continuare, vom analiza variația modulului secant G_s și a coeficientului de amortizare λ pentru principalele categorii de pămînturi, în funcție de factorii enumerați mai sus.

4. CARACTERIZAREA NISIPURILOR

Alături de argile, nisipurile formează categoria de pămînturi cea mai studiată. Aceasta se datorează, în mare măsură faptului că realizarea probelor de argile sau nisip ridică dificultăți relativ reduse în comparație cu celelalte tipuri de pămînturi.

a. MODULUL SECANT DE ELASTICITATE TRANSVERSALĂ

Studiile experimentale au arătat că valoarea modulului G_s pentru nisipuri este puternic influențată de nivelul deformației, de tensiunea efectivă medie inițială și de indicele de pori sau densitatea relativă.

Pentru a separa influența tensiunii efective medii inițiale σ'_m de influența celorlalți factori asupra modulului de elasticitate transversală G_s, s-a considerat că legătura dintre G_s și σ'_m este de tipul

$$G_s = K \sqrt{\sigma'_m}.$$

În acest fel influența celorlalți factori asupra modulului G_s se va reflecta în influența lor asupra parametrului K.

Folosind ecuația propusă de Hardin și Drnevich [3] pentru curba de reducere a modulului secant G_s în raport cu deformația specifică de lunecare γ, Seed și Idriss prezintă grafic ([9], fig. 2) influența unghiului de frecare internă Φ, a indicelui porilor e, a tensiunii efective verticale inițiale σ'_v și a coeficientului de împingere laterală K_0 (și implicit a coeficientului lui Poisson ν) asupra parametrului K.

S-a observat că aceste influențe variază în funcție de nivelul de deformație atins. Astfel:

— pentru deformații mici ($\gamma \leqslant 10^{-3}$ %) parametrul K depinde numai de indicele porilor e;

— pentru deformații moderate (10^{-3} % $\leqslant \gamma < 10^{-1}$%) parametrul K rămîne puternic influențat de indicele porilor; apare însă o variație slabă cu tensiunea efectivă verticală σ'_v și o foarte slabă influență a unghiului de frecare internă Φ și a coeficientului de împingere laterală K_0;

— pentru deformații mari ($\gamma \geqslant 10^{-1}$%) parametrul K este puternic influențat de tensiunea efectivă verticală σ'_v și devine independent de e, Φ și K_0.

Pentru a pune în evidență efectul indicelui de pori și, respectiv, al densității relative, manifestat în domeniul deformațiilor mici și moderate (întîlnite cel mai des în practică), Seed și Idris [9] construiesc diagrama de variație a parametrului K în raport cu deformația specifică de lunecare γ, pentru diferite valori ale indicelui porilor și ale densității relative $e \in [0{,}1; 0{,}9]$, $D_r \in [30\,\%, 90\,\%]$ ([9], fig. 5, 6).

S-a observat că în timpul încărcării ciclice cu tensiune controlată, modulul secant G_s crește cu numărul de cicluri N, indiferent de valoarea

tensiunii statice peste care se suprapune tensiunea ciclică. Această creştere este importantă doar pentru primele zece cicluri, după care se înregistrează o creştere relativ scăzută a modulului G_s [11]. De asemenea, s-a observat o creştere a valorii modulului secant de elasticitate transversală G_s odată cu creşterea gradului de compactare (creşte densitatea relativă) [12].

Concluzionînd cele de mai sus, se poate spune că modulul de elasticitate transversală G_s al nisipurilor este funcţie crescătoare în raport cu tensiunea efectivă medie σ'_m, coeficientul de împinegere laterală K_0, unghiul de frecare internă Φ, numărul de cicluri şi gradul de compactare şi descrescătoare în raport cu deformaţia specifică de lunecare γ, indicele porilor e şi densitatea relativă D_r.

Pentru determinarea experimentală a valorii modulului secant G_s al nisipurilor se consideră adecvate următoarele metode ([9], [17]) :

— măsurătorile seismice ale vitezelor de propagare a undelor, pentru $\gamma \leqslant 5.10^{-4}$ %;

— încercări de vibraţii forţate, pentru 10^{-4} % $\leqslant \gamma \leqslant 10^{-2}$ %;

— încercări de vibraţii libere, pentru 10^{-3} % $\leqslant \gamma \leqslant 1$ %;

— determinarea curbelor tensiune-deformaţie din experienţe de laborator, pentru 10^{-2} % $\leqslant \gamma \leqslant 5$ %.

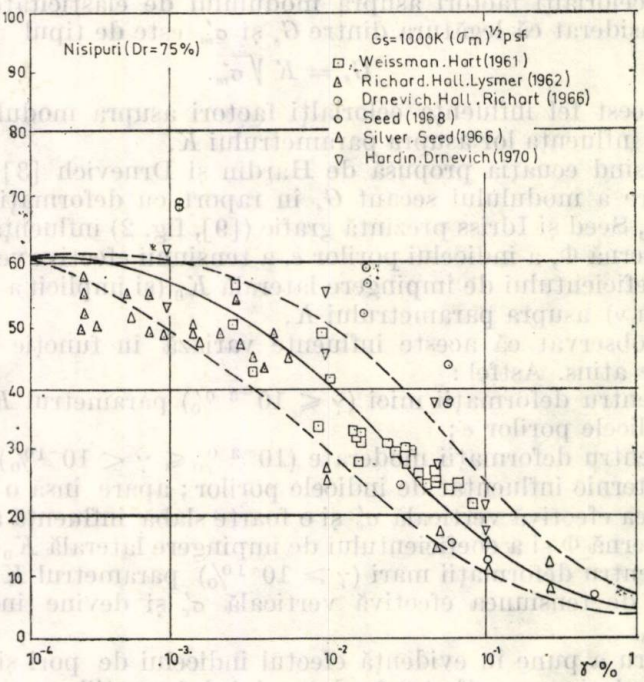


Fig. 1

Împrăştierea destul de redusă a datelor experimentale [9] şi concordanţa destul de bună între valorile obţinute în laborator şi in situ au permis trasarea unei curbe medii de reducere a modulului secant G_s în raport cu γ (curba plină din fig. 1) valabilă, cu o aproximaţie acceptabilă, pentru orice tip de nisip.

b) COEFICIENTUL DE AMORTIZARE INTERNĂ

Din analiza făcută de Hardin și Drnevich [3] rezultă că în cazul nisipurilor, coeficientul de amortizare histeretică λ este influențat de deformația specifică de lunecare γ, de tensiunea efectivă medie inițială σ'_m (sau de σ'_v și K_0), de indicele porilor e (densitatea relativă D_r) și de numărul de cicluri de solicitare. Influență mai mică o au tensiunea octaedrică inițială, unghiul de frecare internă Φ și gradul de saturare S. Se consideră că mărimea și forma granulelor de nisip nu influențează coeficientul de amortizare λ.

Seed și Idriss [9] prezintă curbe de amortizare trasate la diferite valori ale tensiunii verticale inițiale, indicelui porilor, coeficientului de împingere laterală, gradului de saturare și unghiului de frecare internă ([9], fig. 8, 9). Aceste diagrame conduc la concluzia că în raport cu indicele porilor, coeficientul de amortizare histeretică este funcție crescătoare, iar în raport cu tensiunea verticală inițială, coeficientul de împingere laterală, unghiul de frecare internă și gradul de saturare este funcție descrescătoare. Coeficientul λ descrește pentru nisipuri cu numărul de cicluri N. Această descreștere este foarte accentuată pentru $N \leqslant 5$ și lentă pentru $N > 5$.

Pentru determinarea experimentală a coeficientului de amortizare histeretică al nisipurilor sînt indicate [9], [11] următoarele metode:

— încercările de vibrații libere și forțate pentru $10^{-4}\% \leqslant \gamma \leqslant 10^{-3}\%$;

— determinarea experimentală a curbelor tensiune-deformație din încercări ciclice de laborator pentru $10^{-2}\% \leqslant \gamma \leqslant 5\%$;

— analiza răspunsului la mișcări seismice;

Ca și în cazul modulului secant G_s și pentru coeficientul de amortizare λ al nisipurilor se observă o împrăștiere relativ redusă a datelor experimentale (fig. 2), ceea ce face acceptabilă folosirea unei curbe medii de amortizare (trasată cu linie plină în fig. 2) pentru toate tipurile de nisipuri.

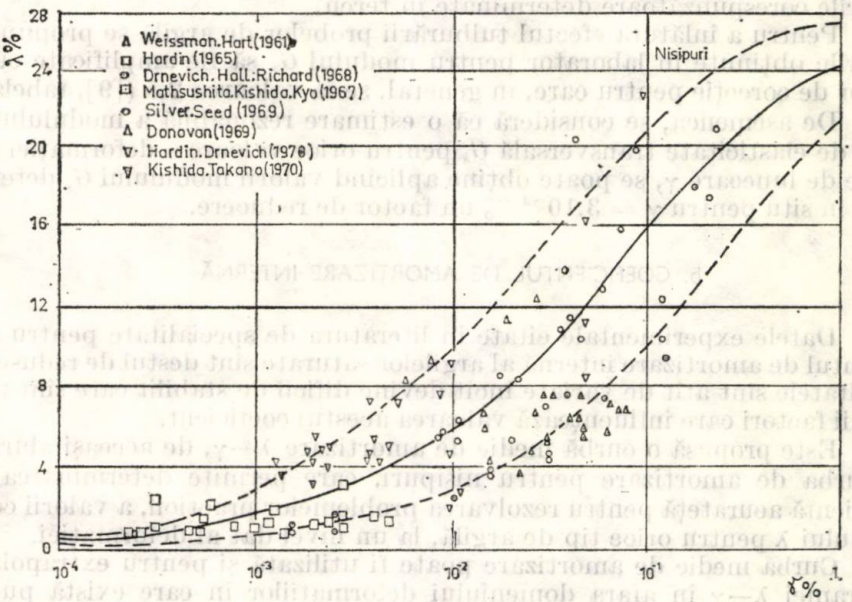


Fig. 2

5. CARACTERIZAREA ARGILELOR SATURATE

În general, pentru studierea comportării mecanice a argilelor saturate (studiul argilelor nesaturate ridică mari dificultăți atît teoretice, cît și practice) se folosesc aceleași metode teoretice și aceleași metode experimentale, ca și pentru nisipuri, considerîndu-se că deosebirea dintre comportarea argilelor saturate și cea a nisipurilor este doar cantitativă nu și calitativă.

a. MODULUL SECANT DE ELASTICITATE TRANSVERSALĂ

Studiile experimentale au arătat că modulul secant de elasticitate transversală G_s al argilelor depinde de aceiași factori ca și cel al nisipurilor, cu o singură excepție, comportarea în raport cu numărul ciclurilor de solicitare. Astfel, în timp ce la nisipuri se observă o ușoară creștere a modulului G_s cu numărul de cicluri de solicitare N, la argile se înregistrează o descreștere semnificativă a lui G_s în raport cu N (apare fenomenul de degradare ce va fi descris în partea a doua a acestui articol).

Metodele experimentale de determinare a modulului secant G_s al nisipurilor sînt aplicate și în cazul argilelor. Apare însă o problemă deosebit de acută, anume, tulburarea probelor în timpul prelevării are efecte foarte mari asupra valorii modulului G_s.

Măsurătorile in situ elimină această problemă, dar ele se realizează doar pentru nivelele mici ale deformației, nefiind elaborate încă metode de realizare in situ a unor solicitări cicline cu deformație controlată pentru deformații mari.

Din datele citate în literatura de specialitate [9], [11] rezultă că valorile obținute în laborator pentru modulul G_s reprezintă circa 40% din valorile corespunzătoare determinate în teren.

Pentru a înlătura efectul tulburării probelor de argilă se propune ca valorile obținute în laborator pentru modulul G_s să fie amplificate cu un factor de corecție pentru care, în general, se ia valoarea 2,5 ([9], tabela 4).

De asemenea, se consideră că o estimare rezonabilă a modulului secant de elasticitate transversală G_s pentru orice valoare a deformației specifice de lunecare γ, se poate obține aplicînd valorii modulului G_s determinată in situ pentru $\gamma = 3.10^{-4}$ % un factor de reducere.

b. COEFICIENTUL DE AMORTIZARE INTERNĂ

Datele experimentale citate în literatura de specialitate pentru coeficientul de amortizare internă al argilelor saturate sînt destul de reduse, iar rezultatele sînt atît de variate încît devine dificil de stabilit care sînt principalii factori care influențează valoarea acestui coeficient.

Este propusă o curbă medie de amortizare $\lambda - \gamma$, de aceeași alură ca și curba de amortizare pentru nisipuri, care permite determinarea, cu suficientă acuratețe pentru rezolvarea problemelor practicii, a valorii coeficientului λ pentru orice tip de argilă, la un nivel dat al deformației.

Curba medie de amortizare poate fi utilizată și pentru extrapolarea diagramei $\lambda - \gamma$ în afara domeniului deformațiilor în care există puncte experimentale.

6. CARACTERIZAREA CALCARELOR

Literatura de specialitate este foarte săracă în informaţii privind proprietăţile elastice şi disipative ale rocilor.

Vom prezenta rezultatele obţinute de Yang şi Hatheway [14] pentru comportarea mecanică a calcarelor marine la solicitări ciclice. Principalele obiective ale acestui studiu au fost :

— compararea datelor experimentale obţinute în laborator (triaxial şi coloana rezonantă) şi in situ ;

— stabilirea modului de variaţie în raport cu deformaţia specifică de lunecare a modulului de elasticitate transversală şi a coeficientului de amortizare pentru calcare ;

— compararea curbelor de reducere şi amortizare obţinute pentru calcare [14], argile, nisipuri [9] şi roci [10].

Pentru experienţele de laborator, s-au folosit probe netulburate obţinute din carote prelevate, prin foraje la două adîncimi diferite, din terenul în care s-au făcut măsurătorile in situ (Puerto Rico).

Valorile vitezei de propagare a undelor de forfecare V_s obţinute în laborator sînt cu 30 % — 40 % şi chiar 60 % mai mici decît valorile măsurate in situ.

Se consideră că principalele cauze ale acestor discrepanţe sînt următoarele :

— tulburarea probelor ;

— neomogenitatea probelor ;

— diferenţa dintre starea de tensiune din teren şi starea creată în laborator prin consolidarea sub presiune izotropă ;

— condiţiile de frontieră diferite impuse de aparatura de laborator ;

— compararea undelor de forfecare orizontală obţinute în laborator cu undele de forfecare verticală măsurate in situ ;

— heterogeneitatea materialului şi refractarea undelor pot conduce la estimări superioare ale vitezei de propagare a undelor ;

Experienţele efectuate pentru caracterizarea răspunsului dinamic al calcarelor au furnizat date cu o împrăştiere foarte mare.

În figura 3 sînt figurate datele experimentale obţinute în triaxial şi în coloana rezonantă. Cu linie plină sînt trasate curbele medii de variaţie în raport cu deformaţia specifică de lunecare γ a modulului secant de elasticitate transversală G_s (fig. 3*a*, 3*c*) şi a coeficientului de amortizare λ (fig. 3*b*, 3*d*) pentru cele două eşantioane de calcare analizate.

Comparaţia între aceste curbe şi curbele corespunzătoare obţinute pentru argile şi nisipuri de Seed şi Idriss [9] şi pentru roci de Schnabel [10] este prezentată în figurile 4*a* şi 4 *b*. Se observă că în timp ce curba de reducere pentru ambele calcare este mai apropiată de curba medie de reducere tipică pentru nisipuri, curba de amortizare λ—γ pentru calcar 1 (recoltat de la o adîncime mai mică) se apropie de curba de amortizare a argilelor, iar curba de amortizare pentru calcar 2 se apropie de curba dată pentru roci.

Primită la redacţie la 29 ianuarie 1980

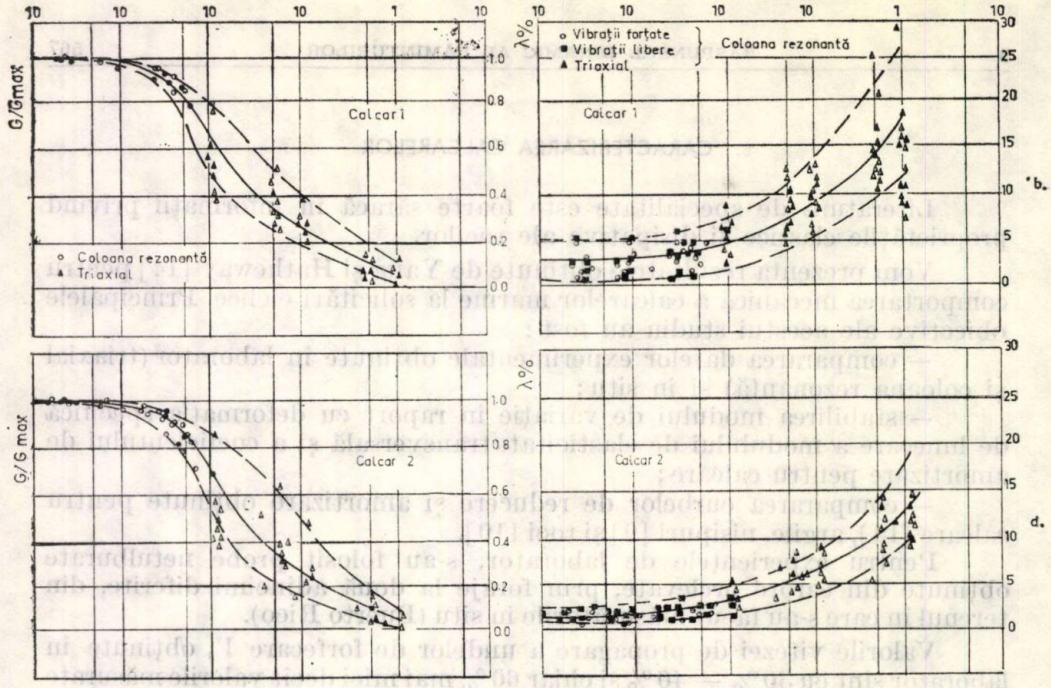

G/Gmax
Calcar 1
Coloana rezonantă
Triaxial
λ%
Vibrații forțate
Vibrații libere
Triaxial
Coloana rezonantă
Calcar 1
a
b.
G/G max
Calcar 2
λ%
Calcar 2
c
d.

Fig. 3

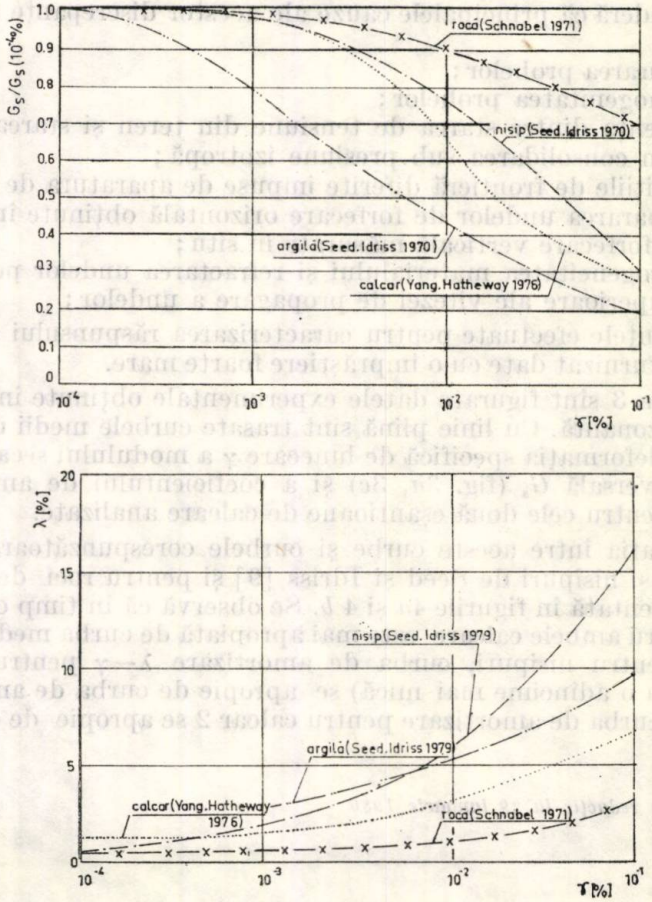

$G_S/G_S(10^{-4}\%)$
rocă(Schnabel 1971)
nisip(Seed.Idriss 1970)
argilă(Seed.Idriss 1970)
calcar(Yang.Hatheway 1976)
γ[%]
λ[%]
nisip(Seed.Idriss 1979)
argilă(Seed.Idriss 1979)
calcar(Yang.Hatheway 1976)
rocă(Schnabel 1971)
γ[%]

Fig. 4 a, b

BIBLIOGRAFIE

1. M. Annaki, L. L. Kenneth, *Equivalent uniform cycle concept for soil dynamics*, J. Geotech., Eng., Div., ASCE *GTG* (1977).
2. B. O. Hardin, W. L. Black, *Vibration modulus for normally consolidated clays*, J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, *SM6* (1969).
3. B. O. Hardin, V. P. Drnevich, *Shear modulus and damping in soils* I. *Measurement and parameter effects*, II. *Design equations and curves*, Report no. UKY 27—70—CE2 Univ. of Kentucky (1970).
4. B. O. Hardin, V. P. Drnevich, *Shear modulus and damping in soils: design equation and curves*, J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, *SM7* (1972).
5. I. M. Idriss, R. Dobry, R. D. Singh, *Nonlinear behaviour of soft clays during cyclic loading*, J. Geotech. Eng. Div., ASCE, *GT12* (1978).
6. L. Jacobsen, *Motion of a soil subjected to simple harmonic ground vibration*, Bul. Am. Seism., Soc., **20**, (1930).
7. B. J. Lazan, *Damping of materials and members in structural mechanics*, Pergamon Press, New York, 1968.
8. W. Olszack, P. Perzyna, A. Sawczuk, *Teoria plasticității* (trad. din lb. poloneză), Edit. tehnică, București, 1970.
9. H. B. Seed, I. M. Idriss, *Soil moduli and damping factors for dynamic response analyses*, Report No. EERC 70—10, Univ. of California, Berkeley, 1970.
10. P. Schnabel, H. B. Seed, J. Lysmer, *Modification of seismograph records for effects of local soil conditions*, Report No EERC 71—8, Univ. of California, Berkeley (1971).
11. M. L. Silver, H. B. Seed, *Deformation characteristics of sands under cyclic loading*, J. Soil Mech. Foun. Div., ASCE, *SM8* (1971).
12. M. L. Silver, H. B. Seed, *Volume changes in sands during cyclic loading*, J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, *SM9* (1971).
13. P. W. Taylor, T. J. Larkin, *Seismic site response of nonlinear soil media*, J. Geotech. Eng. Div., ASCE, *GT3* (1978).
14. Z. Yang, A. W. Hatheway, *Dinamic response of tropical marine limestone*, J. Geotech. Eng. Div., ASCE, *GT2* (1976).

UN ARC ELICOIDAL CILINDRIC CU RIGIDITATE PROGRESIVĂ CU SARCINA, DESTINAT SUSPENSIEI DACIA 1302

II. REZULTATE EXPERIMENTALE*

de N. TRUICĂ
Institutul de fizică şi tehnologia materialelor, Bucureşti
M. MITRACHE
Centrul de cercetare ştiinţifică şi inginerie tehnologică pentru autoturisme, Piteşti

În această a doua parte a articolului sînt prezentate rezultatele experimentărilor făcute cu arcul elicoidal cilindric cu rigiditate progresivă cu sarcina destinat suspensiei spate a automobilului Dacia 1302. Se stabileşte expresia analitică a caracteristicii elastice pe o altă cale decît cea utilizată în prima parte a lucrării.

§ 5. MĂSURAREA EFORTURILOR UNITARE TANGENŢIALE

§ 5.1. Coordonatele aproximative ale mărcilor tensometrice utilizate pentru măsurarea eforturilor unitare tangenţiale au fost $\xi_i = 1{,}2$; 3,2 şi 6,2 spire; $i = 1, 2, 3$. Măsurătorile au fost făcute solicitînd rivarcul atît static, pe o presă a laboratorului „Mecanica solidelor", cît şi dinamic pe hidropulsul secţiei „Prototipuri" a C.C.S.I.T.A. Piteşti.

Rezultatele încercării statice sînt prezentate grafic în figura 7 : pe axa absciselor au fost trecute valorile forţei axiale care comprimă rivarcul, respectiv parametrul α, reprezentînd coordonata extremităţii elicei scoase din lucru ; pe axa ordonatelor figurează efortul unitar tangenţial corectat τ, corespunzător fibrelor de frontieră ale sîrmei situate către interior, pentru modulul de elasticitate transversal al materialului $G = 78.500$ N/mm^2. Din aceste diagrame desprindem următoarele :

Eforturile unitare tangenţiale măsurate de primele două mărci tensometrice s-au stabilizat pentru $\alpha_1 = 1{,}2 + 0{,}4$ şi, respectiv, pentru $\alpha_2 = 3{,}2 + 0{,}5$ spire. A treia marcă a fost lipită pe prima spiră cu pas constant a rivarcului (reamintim că rivarcul Dacia 1302 are primele şase spire cu pas variabil şi următoarele două cu pas constant). Faptul că semnalul dat de marca 3 a crescut liniar cu forţa axială de comprimare a rivarcului este corect : în spirele cu pas constant efortul unitar tangenţial creşte liniar cu săgeata δ a spirei, pînă la anularea pasului interior al acestor spire. În cazul de care ne ocupăm, datorită geometriei elicei, săgeata δ creşte liniar cu forţa tot timpul comprimării rivarcului.

* Prima parte a acestui articol a apărut în St. cerc. mec. apl., **39**, *2* (1980).

Extindem rezultatele primelor două mărci tensometrice: „într-o secțiune oarecare ξ a spirelor cu pas variabil, efortul unitar tangențial crește continuu cu parametrul α și se stabilizează pentru $\alpha = \xi + \alpha_0$, $\alpha_0 > 0$". Deci spira continuă să se torsioneze și după ce parametrul α ia valoarea ξ corespunzătoare secțiunii considerate; rivarcul Dacia 1302 se

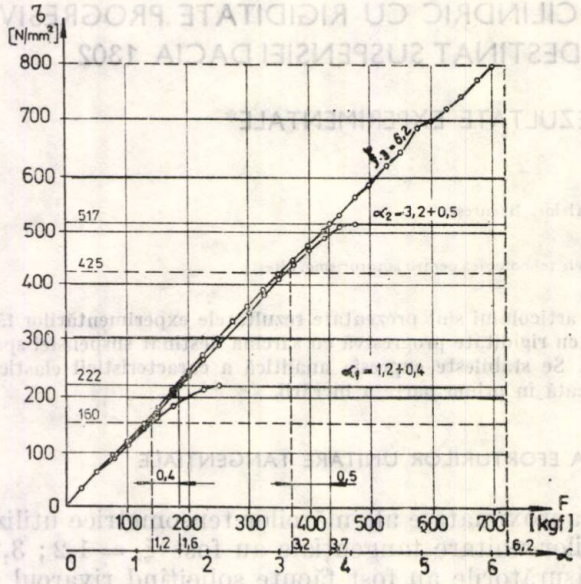


Fig. 7. — Diagramele eforturilor unitare tangențiale din secțiunile $\xi = 1{,}2$; 3,2 și 6,2 spire, măsurate în timpul comprimării statice a rivarcului.

comportă, din punctul de vedere al deformării la răsucire, ca și cum ar avea 1/2 spire active mai mult ($\alpha_0 = 1/2$; vezi fig. 8).

Scriem expresia momentului de răsucire:

$$\mathcal{M}(\xi) = A\,R\,\tilde{q}(\xi), \tag{5.1}$$

unde $\tilde{q}(\xi) = \begin{cases} q_0(\xi + \alpha_0) & \text{pentru} \quad \xi \in [-\alpha_0, \alpha - \alpha_0], \\ q_0(\alpha) & \text{pentru} \quad \xi \in [\alpha - \alpha_0, n]. \end{cases}$

Mărimea $A = \dfrac{GI_p}{2\pi R^3}$ reprezintă rigiditatea unei singure spire, I_p — momentul de inerție polar al ariei secțiunii normale a sîrmei, R — raza cilindrului de înfășurare a elicei.

Relațiile (5.1) fac posibilă deducerea expresiei săgeții rivarcului, stabilită în prima parte a lucrării din considerente de geometrie a elicei, admițînd că lucrul mecanic al forței exterioare axiale care comprimă rivarcul se transformă în întregime în energie de deformație elastică a sîrmei acestuia:

$$\mathrm{d}\mathcal{L} = F(\alpha)\,\mathrm{d}f = \mathrm{d}W = RF(\alpha)\,\mathrm{d}\theta, \tag{5.2}$$

în care θ reprezintă deformaţia unghiulară a secţiunii normale pe elice în punctul $\xi = n$.

Ţinînd seama că deformaţia unghiulară a unui element infinit mic de bară supusă la torsiune are expresia

$$d\theta = \frac{\mathcal{M}(\xi)}{GI_p} 2\pi R d\xi, \tag{5.3}$$

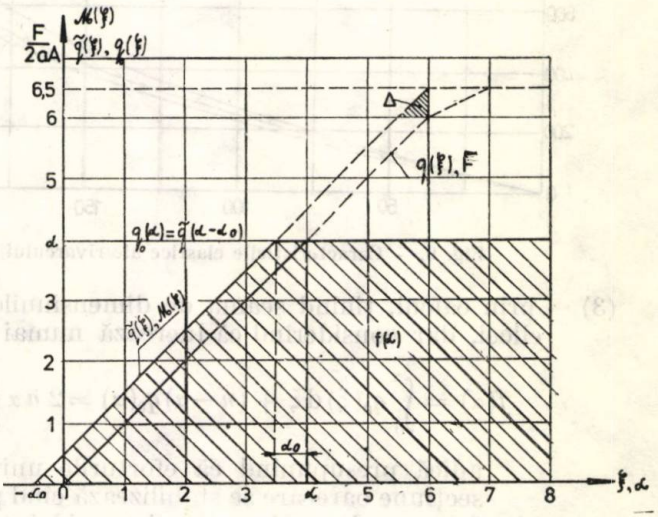


Fig. 8. — Rivarcul Dacia 1302 se comportă sub sarcină ca şi cum ar avea $n + \frac{1}{2}$ spire active.

regăsim expresia săgeţii rivarcului de care ne ocupăm :

$$f(\alpha) = \int_{-\alpha_0}^{n} \tilde{q}(\xi)\, d\xi = 2a\alpha \left(n + \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} \right), \tag{5.4}$$

în care $\alpha_0 = 0{,}5$.

Din cele de mai sus rezultă că rivarcul se comportă ca şi cum lungimea elicei spirelor active ar avea valoarea $2\pi R(n+\alpha_0)$. Expresia săgeţii rivarcului fiind obţinută cu ipotezele admise în prima parte a lucrării, cu ajutorul relaţiilor (5.1) şi (5.4) se determină valoarea lui α_0 pentru orice lege geometrică impusă elicei. Din figura 8 mai observăm că, în cazul rivarcului Dacia 1302, ultima 1/2 spiră, din spirele cu pas variabil, continuă să se deformeze pînă la scoaterea din lucru a spirelor cu pas constant. Săgeata totală a acestui rivarc, corespunzătoare comprimării spiră pe spiră şi a spirelor cu pas constant, este mai mare decît cea stabilită iniţial, cu valoarea ariei Δ a triunghiului haşurat din figura 8 :

$$\Delta = a/4 = 0{,}7875 \text{ mm}.$$

În figura 9 au fost reprezentate caracteristicile săgeată-forță ale rivarcului Dacia 1302 stabilite astfel:

(1) — experimental, pe presă;

(2) — prin calcul cu formula (5.4), ținînd seama de dimensiunile geometrice reale ale rivarcului încercat;

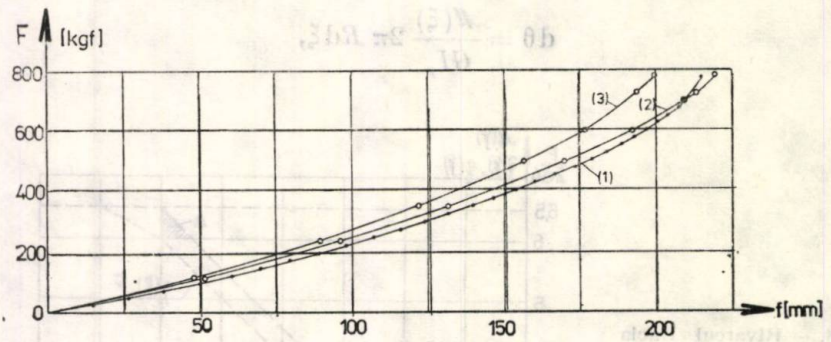


Fig. 9. — Caracteristicile elastice ale rivarcului Dacia 1302.

(3) — prin calcul, ținînd seama de dimensiunile geometice reale ale elicei, dar considerînd că lucrează numai n spire, cu formula

$$f(\alpha) = \int_0^{\alpha} q_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + (n-\alpha)\,q_0(\alpha) = 2\,a\alpha\left(n - \frac{\alpha}{2}\right),$$

adică presupunînd că eforturile unitare tangențiale dintr-o secțiune oarecare se stabilizează cînd parametrul α ia valoarea ξ a coordonatei secțiunii considerate, așa cum dealtfel am admis inițial. Observăm că diagrama astfel stabilită diferă mult de cea experimentală.

Dacă aplicăm relația (5.4) arcului cu pas constant, și ținem seama că săgeata spirei este aceeași pentru toate cele n spire active $\left(\tilde{q}(\xi) = \frac{F}{A}\right)$ și $\alpha_0 = 0$, obținem relația cunoscută $F = \frac{A}{n} f$.

§ 5.2. Definim rigiditatea unghiulară $\overline{c(\alpha)}$ a spirelor active ca fiind derivata momentului de torsiune $\mathcal{M}(\alpha)$ în raport cu deformația unghiulară θ a secțiunii normale definite de coordonata $\xi = n$:

$$\overline{c(\alpha)} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{M}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{R^2\,\mathrm{d}F}{\mathrm{d}f} = R^2\,c(\alpha), \tag{5.5}$$

în care $c(\alpha) = A/\mu$ reprezintă rigiditatea axială a rivarcului stabilită în prima parte a lucrării: $\mu = n + \frac{1}{2} - \alpha$. Din relația de mai sus regăsim expresia lungimii spirelor active ale rivarcului:

$$l(\alpha) = 2\,\pi\,R\,\mu, \tag{5.6}$$

stabilită experimental și confirmată de bilanțul dintre lucrul mecanic exterior și energia elastică a deformației.

Frecvența proprie a rivarcului la oscilații de răsucire are expresia

$$\bar{v}_0 = \frac{1}{2\pi\, l(\alpha)} \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \tag{5.7}$$

Pentru $G = 7{,}85 \times 10^{10}$ Nm^{-2} și $\rho = 7{,}85 \times 10^{3}$ kgm^{-3}, obținem formula aproximativă

$$\bar{\nu}_0 = \frac{500}{l(\alpha)} \text{ [Hz]}.$$

Valoarea pentru $l(\alpha)$ se introduce în metri. În timpul funcționării rivarcului Dacia 1302, $\bar{\nu}_0$ variază continuu între 130 și 500 Hz.

§5.3. În figura 10 este prezentată oscilograma înregistrată în timpul încercării rivarcului Dacia 1302 pe hidropuls. Au fost înregistrate numai

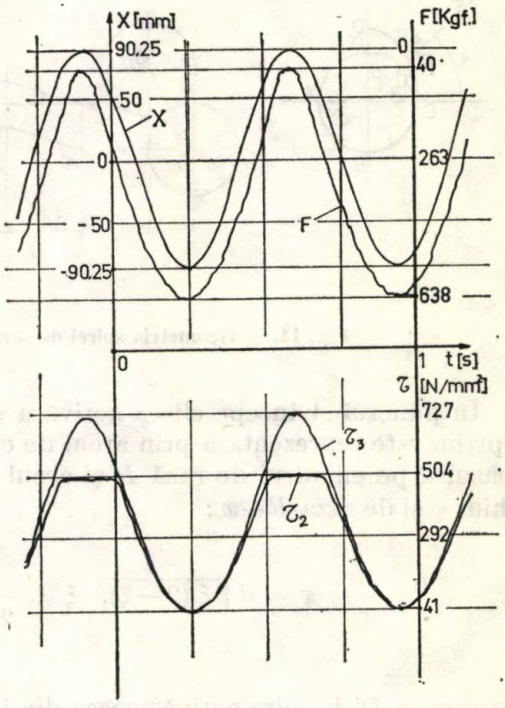


Fig. 10 — Oscilograma înregistrată în timpul încercării rivarcului pe hidropuls: X — deplasarea sinusoidală a cilindrului hidropulsului, cu frecvența de 1,5 Hz; x — deformarea axială a rivarcului, în raport cu starea statică de echilibru; $x = X$; F — forța axială care comprimă rivarcul; τ_2, τ_3 — eforturile unitare tangențiale corectate din secțiunile $\xi_2 = 3{,}2$ și respectiv $\xi_3 = 6{,}2$ spire.

semnalele date de mărcile 2 și 3. Valoarea efortului unitar stabilizat, indicată de marca 2 în regim dinamic este cu 2,5% mai mică decît valoarea indicată în timpul încercării statice; această diferență poate fi datorată

lanțurilor de măsură diferite folosite în cele două situații, atît pentru măsurarea eforturilor unitare, cît și pentru măsurarea forțelor.

§5.4. Încercate la oboseală pe hidropuls, la un ciclu pulsator sinusoidal cu frecvența de 1,5 Hz, toate rivarcurile s-au rupt pentru valori ale numărului de cicluri cuprinse între 81.000 și 120.000. În timpul încercării efortul unitar tangențial corectat a luat valori între 40 și 870 N/mm ^{2}.

Trei automobile Dacia 1302 echipate cu rivarcuri au făcut încercări de teren în condiții grele de încărcare și de drum. Pînă la sfîrșitul lunii ianuarie 1980 automobilele au parcurs 76.000, 40.000 și respectiv 22.000 km. Nu au apărut ruperi de rivarcuri. În timpul rulării aceste mașini au o mai bună ținută de drum și respectiv o comportare mai bună în curbe, în comparație cu cele echipate cu arcurile normale cu pas constant. S-a îmbunătățit de asemenea aderența roților motoare față.

§ 5.5. Pentru ca elicea spirelor scoase din lucru să aibă pasul d este necesar ca spira de sprijin și talerul respectiv să aibă o configurație anumită (fig. 11).

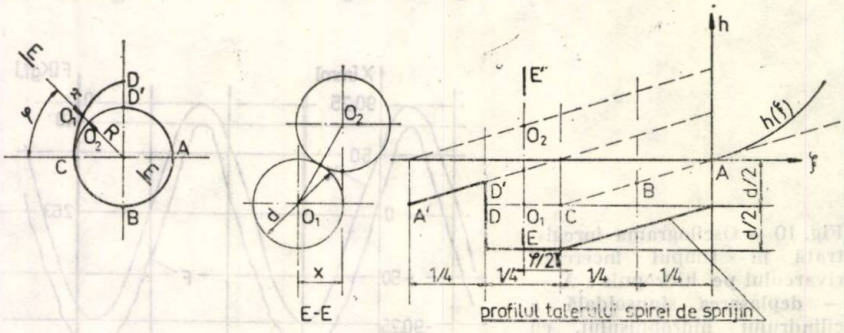


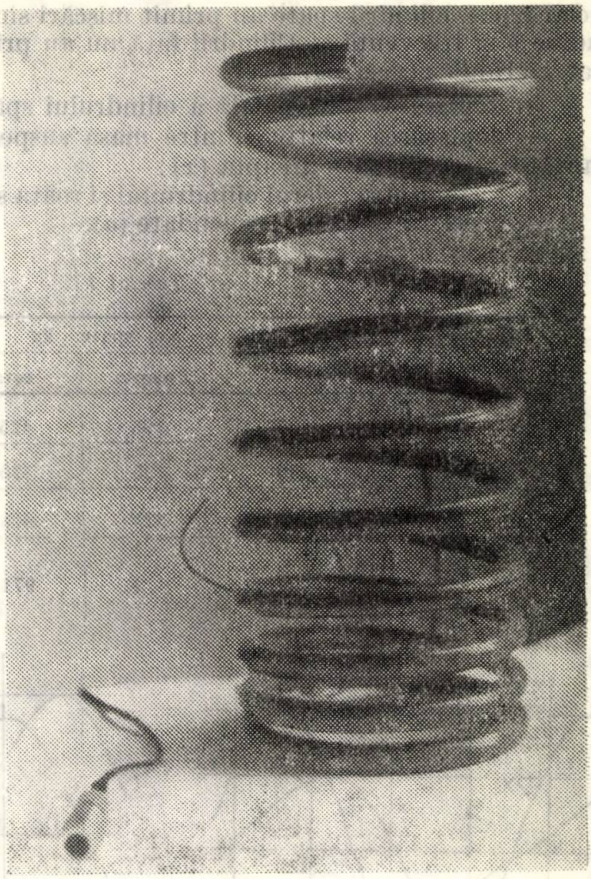
Fig. 11. — Geometria spirei de sprijin a rivarcului.

În punctul A începe elicea activă a rivarcului. Fibra medie a spirei de sprijin este reprezentată prin arcul de curbă ABC, reprezentînd o elice cu pasul d pe cilindrul de rază R și arcul de curbă plană CD, definit de unghiul φ și de raza $R+x$:

$$x = d\sqrt{\xi\,(2-\xi)}, \quad \xi = \frac{\varphi}{2\pi} \in \left[0, \frac{1}{4}\right]$$

Pe porțiunea $D'A'$ spira activă scoasă din lucru se sprijină direct pe taler. Acesta îmbracă spira, mai mult arcul CD, întrucît această porțiune va avea tendința să se depărteze de axa arcului, sub sarcină, și mai puțin pe celelalte porțiuni.

Fig. 12. — Rivarcul Dacia 1302.



§ 6. COMPORTAREA SUSPENSIEI SPATE LA OSCILAȚII ÎNTREȚINUTE

Încercările au fost făcute pe hidropuls în luna iulie 1979, cu o mașină nouă Dacia 1302, pentru trei stări de încărcare :

(A) — automobil echipat de drum, numai cu șofer, fără încărcătură ;

(*B*) — automobil echipat de drum, numai cu șofer, cu 250 kg încărcătură uniform distribuită ;

(*C*) — automobil echipat de drum, cu șofer și pasager, cu 500 kg încărcătură uniform distribuită.

Simbolurile notate deasupra cu o bară se referă la suspensia echipată cu arcurile de serie cu pas constant, cele fără bară se referă la suspensia echipată cu rivarcuri.

Distribuția masei automobilului pe axa spate în timpul încercărilor este dată în tabelul 1.

Automobilul a fost urcat pe hidropuls, cilindrii acestuia fiind situați la același nivel și echipați cu talere care îmbracă parțial pneul. În timpul

încercărilor, cilindrii spate au primit mişcări sinusoidale în fază, de amplitudine b şi frecvenţă υ. Cilindrii faţă nu au primit mişcare. S-au înregistrat mărimile (vezi fig. 13):

— deplasarea sinusoidală a cilindrului spate dreapta (X);

— deplasarea relativă dintre masa suspendată şi axa spate, corespunzătoare roţii spate dreapta (x);

— forţa dintre talerul cilindriului şi roata spate dreapta (N);

— acceleraţia masei suspendate (a).

Tabelul 1

Starea de încărcare	Masa pe axa spate kg			Forţa excitatoare P_0 kgf
	stînga	dreapta	total	
A	227	198	425	90,5
$\bar{A}$	230	195	425	
$B, \bar{B}$	353	325	678	128
C	499	472	971	176,5
$\bar{C}$				106

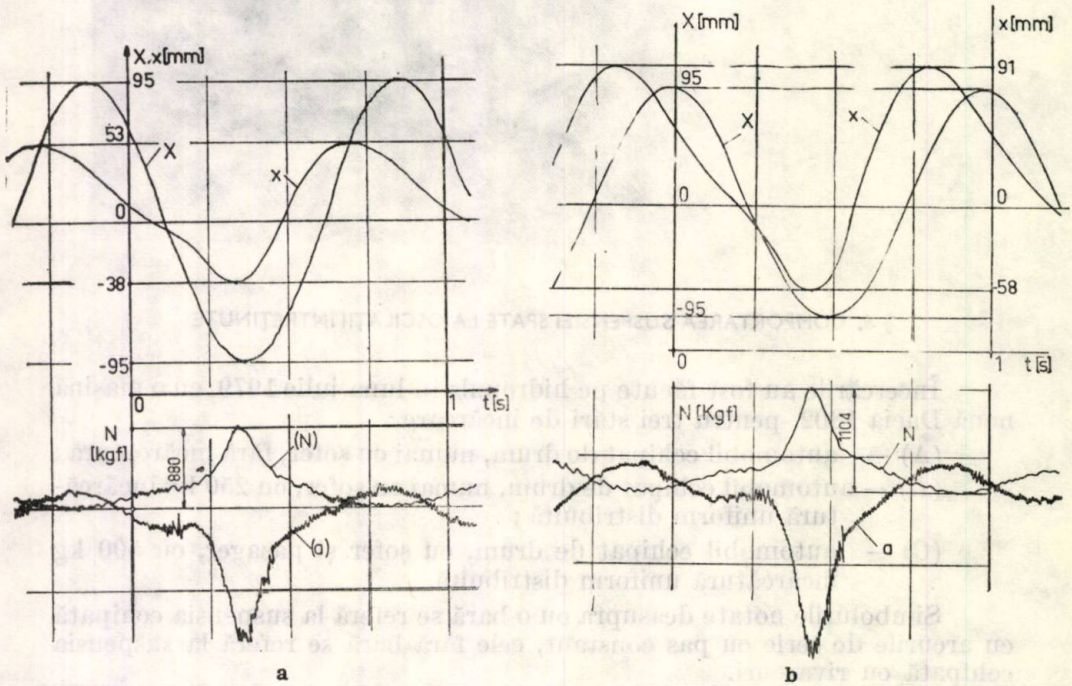
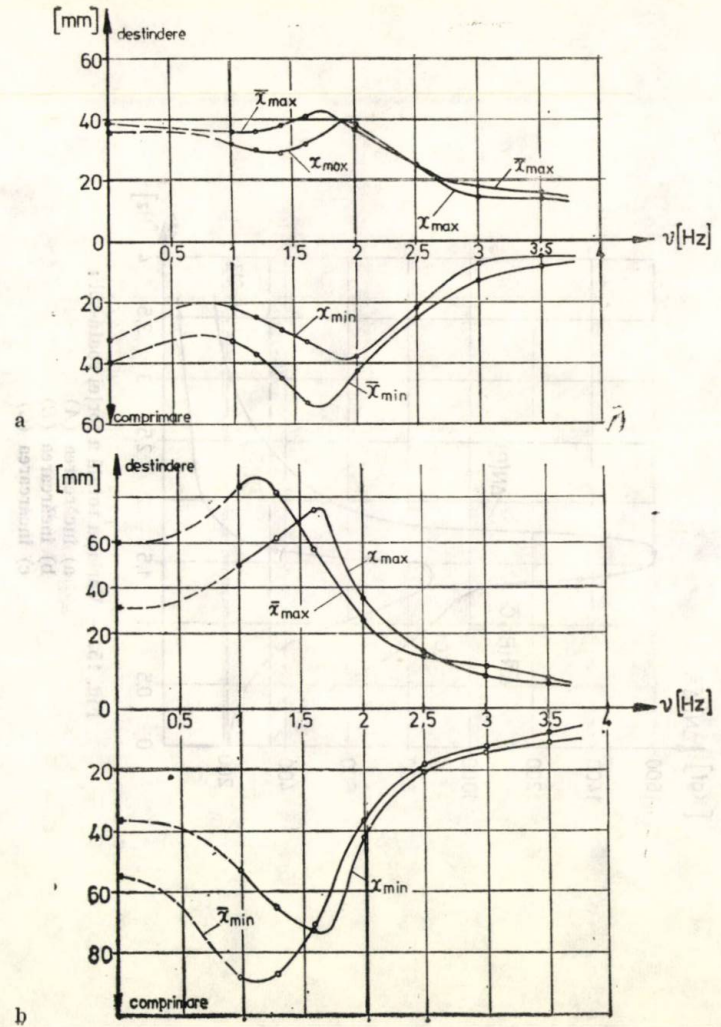


Fig. 13. — Oscilograma înregistrată în timpul încercării pe hidropuls a automobilului Dacia 1302:
a) suspensia spate echipată cu rivarcuri;
încărcătură nominală ($C1$)
b) suspensie spate din fabricaţia de serie;
încărcătură nominală ($\bar{C}1$).



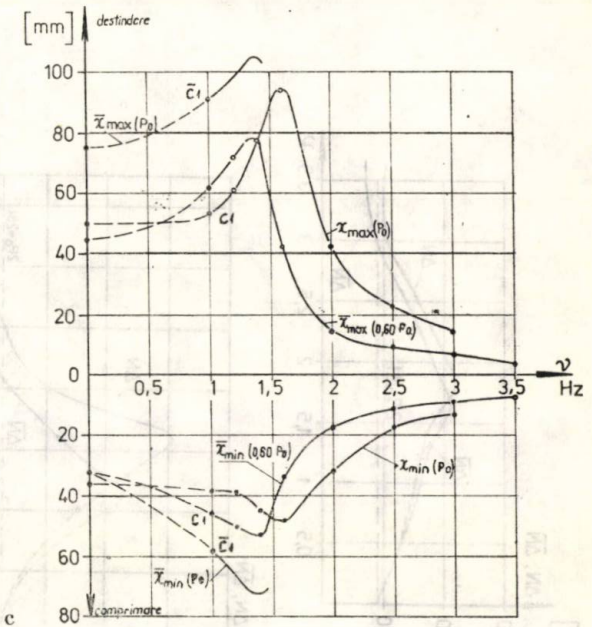


Fig. 14. — Amplitudinile oscilațiilor suspensiei spate :

a) încărcarea (*A*)
b) încărcarea (*B*)
c) încărcarea (*C*)

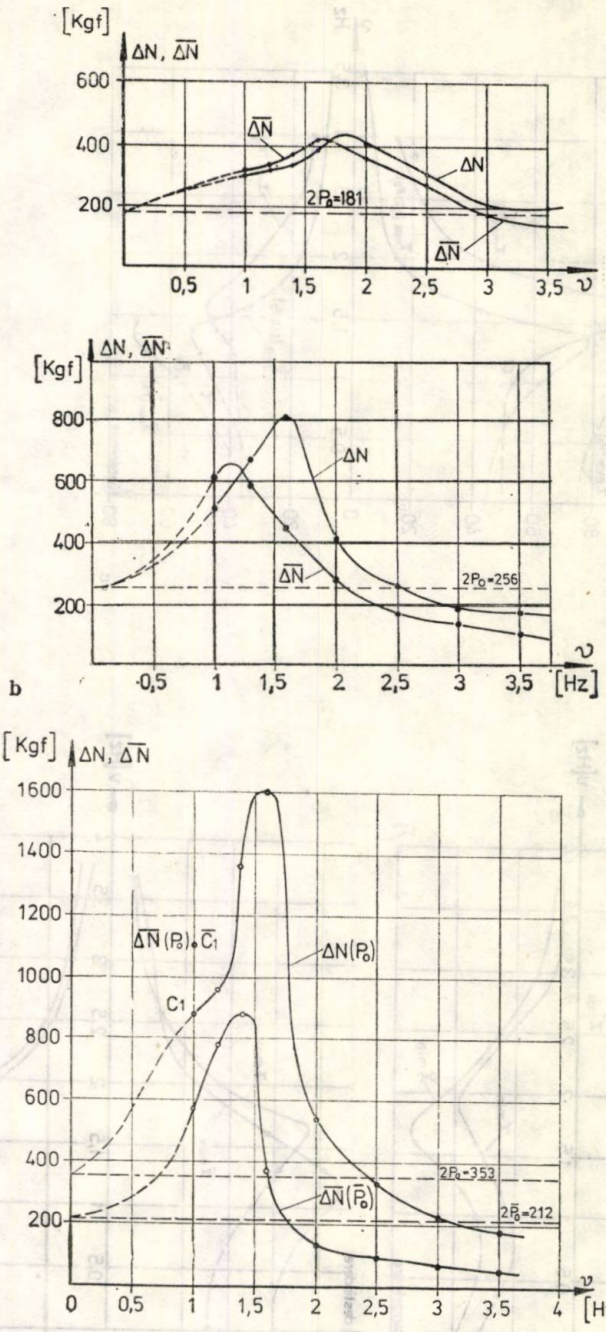


Fig. 15. — Variația totală a forței roată-sol :
a) încărcarea (*A*)
b) încărcarea (*B*)
c) încărcarea (*C*)

Diagramele $C1$ și $\bar{C}1$ din figurile 13*a* și respectiv 13*b* au fost înregistrate la frecvența de 1 Hz, starea de încărcare C, valoarea forței excitatoare aplicată masei suspendate corespunzătoare rivarcului spate dreapta avînd valoarea :

$$P_0 = Mb(2\pi v)^2 = 176{,}5 \text{ kgf} ,$$

($b = 95$ mm, $\upsilon = 1$ Hz, $M = 462$ kg).

Pentru aceeași stare de încărcare, în timpul încercărilor forța P_0 a rămas constantă, cu o singură excepție : diagramele $\bar{C}$ au fost făcute la forța :

$$P_0 = 0{,}60 \; P_0 = 106 \text{ kgf},$$

întrucît exista pericolul ca din cauza amplitudinilor mari ale masei suspendate, automobilul să sară de pe cilindrii hidropulsului. Numai înregistrarea $\bar{C}1$ a fost făcută la $P_0 = 176{,}5$ kgf. Pentru stările de încărcare A și B forțele de excitație au fost aceleași în ambele situații : suspensie de serie, respectiv suspensie cu rivarcuri și amortizoare modificate pentru a micșora cursele maxime.

Valorile maxime ale oscilațiilor x au fost trecute, în funcție de frecvența la care s-a făcut înregistrarea, în diagramele 14 : x_{max} reprezintă destinderea maximă a rivarcului, x_{min} comprimarea maximă a rivarcului, în raport cu starea de echilibru static (aceleași mărimi cu bară deasupra se referă la suspensia de serie). Punctele balustrate de pe diagrame reprezintă valori obținute experimental, cu excepția valorilor statice, care au fost calculate.

Valorile variației totale ale forței normale dintre roată și cilindru sînt trecute în diagramele 15. Diagramele accelerațiilor masei suspendate nu au fost prelucrate din două motive : precizia înregistrării accelerațiilor este sensibil mai mică decît cea a forțelor ; forța dintre roată și sol este proporțională cu accelerația masei suspendate aferente roții respective ; pînă la frecvența de 3,5 Hz aportul maselor nesuspendate la variația forței roată-sol poate fi neglijat.

§ 7. CONCLUZII

a. Modelul matematic al rivarcului a cărui elice este descrisă de o parabolă simplă este corect, prevederile teoretice fiind confirmate experimental.

b. Suspensia echipată cu rivarcuri îmbunătățește ținuta de drum a automobilului la variații mari ale stării de încărcare, comportarea în curbe și mărește aderența roților față, diminuează amplitudinile oscilațiilor masei suspendate în timpul rulării pe drumuri cu denivelări.

Rivarcul Dacia 1302 a fost omologat pentru fabricația de serie. Această soluție urmează să fie experimentată și pentru Dacia 1300.

Primită la redacție la 6 martie 1980

ASUPRA UTILIZĂRII REGULATORULUI RADIAL LA LAGĂRE RADIALE HIDROSTATICE

de ȘTEFAN STANCIU
Institutul politehnic București

În lucrare este studiată funcționarea în regim staționar a unui regulator de debit original, dispozitiv care poate asigura alimentarea simultană cu lubrifiant a tuturor degajărilor unui lagăr radial hidrostatic. Studiul analitic pornește de la rezolvarea sistemului de ecuații liniare, obținut prin metoda bilanțului de debite aplicată fiecărui circuit de alimentare. Sînt prezentate, pe baza unui program de calcul și a determinărilor experimentale, caracteristicile unui lagăr hidrostatic echipat cu un regulator radial și anume : portanța, debitul de scăpări și rigiditatea statică. Rezultatele obținute conduc la recomandări pentru proiectare și pun bazele studiului în regim dinamic.

Studiind lucrările de referință [1], [3], [4] se constată marea diversitate de drosele și regulatoare automate care echipează lagărele hidrostatice, axiale sau radiale, în vederea alimentării și reglării debitului de ulei.

Droselele utilizate în prezent prezintă ca dezavantaj principal faptul că nu pot alimenta decît cîte un singur buzunar de lagăr, droselul capilar circumferențial multiplu fiind un dispozitiv superior din acest punct de vedere [6]; regulatoarele de debit uzuale au de asemenea funcționalitate limitată, deservind cel mult două buzunare hidrostatice.

În lucrare se studiază un nou regulator, capabil să alimenteze și să regleze automat debitul de ulei în lagăre hidrostatice radiale, cu număr par de buzunare, indiferent de numărul acestora, dispozitiv numit regulator radial (R.R.). Automatul studiat se recomandă a fi folosit la lagărele hidrostatice radiale dar, prin construcție, el poate fi utilizat și la lagăre hidrostatice axiale închise.

DESCRIEREA REGULATORULUI RADIAL

O variantă constructivă a regulatorului radial este prezentată în figura 1. Se constată asemănarea de principiu cu droselul capilar circumferențial multiplu prezentat în [6]. Schema de alimentare a regulatorului este de altfel identică cu cea a droselului amintit.

Urmărind figura 1 se poate observa că uleiul intrat pe la capetele regulatorului la presiunea constantă p_a parcurge interstițiul circumferențial de lungime $2\,l$, după care iese prin găurile radiale (în număr par) spre

buzunarele lagărului hidrostatic. Este esențial ca racordurile regulatorului cu buzunarele lagărului să fie realizate ca în figura 2 *a*, astfel încît să se asigure reglarea diferențială a debitului.

Deosebirea principală a regulatorului radial față de droselul capilar circumferențial multiplu este că corpul central, flotorul, rămîne complet liber față de corpul regulatorului; la droselul capilar circumferențial mul-

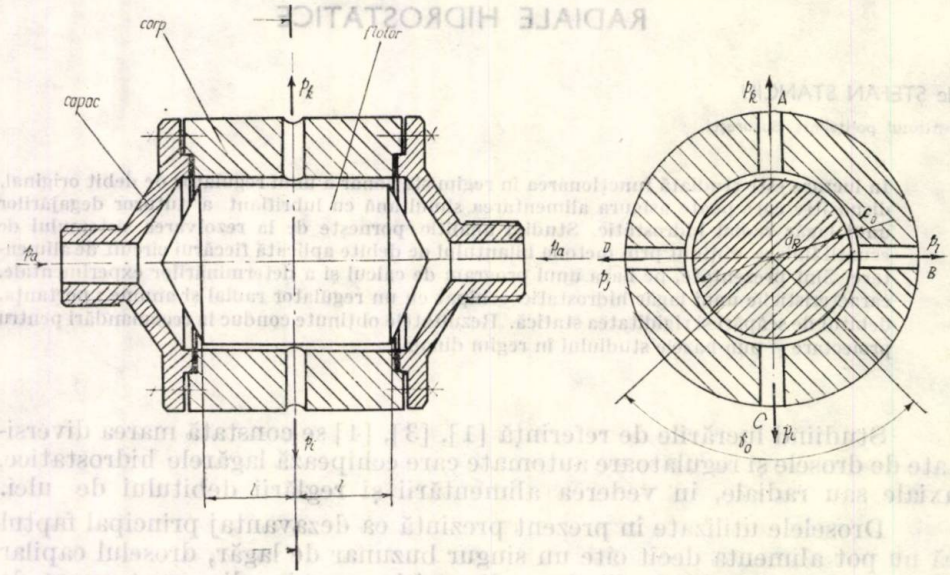


Fig. 1

tiplu interstițiul de laminare a uleiului rămîne același pentru orice sarcină, rezistența hidraulică fiind constantă pentru toate buzunarele lagărului. La regulatorul radial flotorul de diametru d_R este concentric cu corpul numai cînd lagărul este neîncărcat, adică la excentricitate nulă.

Poziția flotorului în corpul regulatorului este dată de rezultanta presiunilor pe circumferința acestuia, axa lui rămînînd totdeauna paralelă cu axa corpului, indiferent de sarcină.

Procesul reglării poate fi urmărit în figura 2 *a*). Pentru încărcarea nulă în lagăr ($P = 0$), fusul rămîne concentric cu cuzinetul, flotorul rămînînd de asemenea concentric cu corpul regulatorului. Presiunile în buzunarele lagărului sînt în acest caz identice, fiind inferioare presiunii de alimentare (din amontele regulatorului), datorită căderii de presiune produse prin laminarea uleiului în interstițiul circumferințial de grosime c_0, pe lungimea 2 l. La încărcare $P > 0$ fusul se deplasează în cuzinet pe distanța e, deplasarea influențată ca direcție în special și de efectul hidrodinamic din lagăr. Această descentrare produce creșterea presiunii în buzunarele cuzinetului de care fusul se apropie și scăderea corespunzătoare a presiunii în buzunarele diametral opuse. Creșterea presiunii în buzunarele 3 și 4, de exemplu, determină scăderea debitului de alimentare a acestora, ceea ce

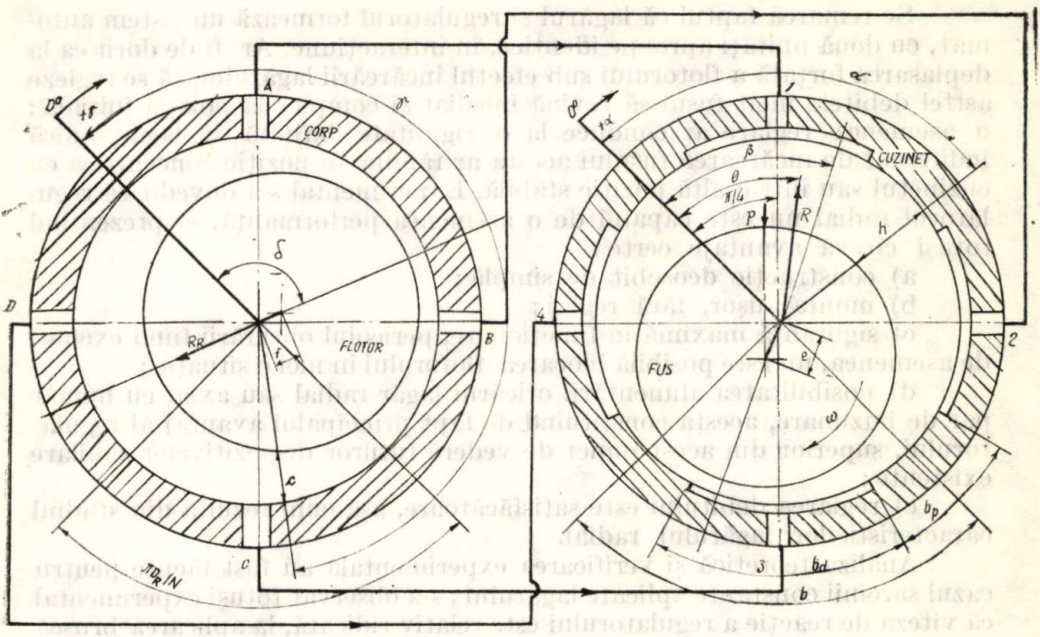


Fig. 2a

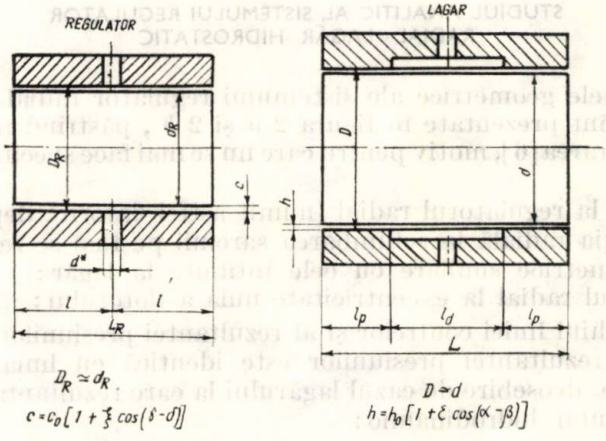


Fig. 2b

conduce la creşterea simultană a presiunii în zona orificiilor C şi D din regulator, fapt care determină deplasarea flotorului spre orificiile A şi B pe distanţa f. Ca efect de reglaj, deplasarea flotorului determină micşorarea rezistenţei hidraulice în interstiţiul aferent orificiilor C şi D, ceea ce înseamnă că o mai mare cantitate de ulei va trece spre buzurarele 3 şi 4 ale lagărului, contribuind astfel la readucerea parţială a fusului spre poziţia iniţială.

Se remarcă faptul că lagărul şi regulatorul formează un sistem automat, cu două unităţi aproape identice, în interacţiune. Ar fi de dorit ca la deplasarea forţată a flotorului sub efectul încărcării lagărului, să se regleze astfel debitele încît fusul să revină imediat şi complet la poziţia iniţială; o asemenea reglare ar conduce la o rigiditate infinită în lagăr, adică indiferent de încărcarea fusului acesta ar rămîne în poziţie concentrică cu cuzinetul sau într-o altă poziţie stabilă. Experimental s-a dovedit că regulatorul radial nu este capabil de o asemenea performanţă, el prezentînd totuşi cîteva avantaje certe:

a) construcţie deosebit de simplă;

b) montaj uşor, fără reglaj;

c) siguranţă maximă în funcţionare, pericolul obturării fiind exclus; de asemenea, nu este posibilă blocarea flotorului în nici o situaţie;

d) posibilitatea alimentării oricărui lagăr radial sau axial cu număr par de buzunare, acesta constituind de fapt principalul avantaj al regulatorului, superior din acest punct de vedere tuturor dispozitivelor similare existente;

e) reglarea debitului este satisfăcătoare, aşa cum rezultă din studiul caracteristicilor lagărului radial.

Analiza teoretică şi verificarea experimentală au fost făcute pentru cazul sarcinii constante aplicate lagărului; s-a observat totuşi experimental că viteza de reacţie a regulatorului este relativ ridicată, la aplicarea bruscă a sarcinii pe fus.

STUDIUL ANALITIC AL SISTEMULUI REGULATOR RADIAL—LAGĂR HIDROSTATIC

Elementele geometrice ale sistemului regulator radial—lagăr hidrostatic radial sînt prezentate în figura 2 *a* şi 2 *b*, păstrînd toate notaţiile utilizate în lucrarea [6], motiv pentru care nu se mai face specificarea tuturor acestora.

Privitor la regulatorul radial (numit astfel datorită deplasării flotorului în direcţia radială la schimbarea sarcinii pe fus) se remarcă cîteva elemente geometrice similare cu cele întîlnite la lagăr:

c_0 — jocul radial la excentricitate nulă a flotorului;

δ — unghiul liniei centrelor şi al rezultantei presiunilor în regulator, R_R; direcţia rezultantei presiunilor este identică cu linia centrelor în regulator, spre deosebire de cazul lagărului la care rezultanta este deviată datorită efectului hidrodinamic;

$\xi = f/c_0$ este excentricitatea relativă a flotorului faţă de corpul regulatorului.

Păstrînd aceleaşi notaţii ca la droselul capilar circumferenţial multiplu, cu care regulatorul radial se confundă la excentricitate nulă, se evidenţiază aceiaşi parametri constructivi:

(c_0/h_0) — raportul jocurilor radiale la excentricitate nulă;

$K_D = D_R/D = d_R/d$, raportul diametrelor;

$K_R = d_R/2\,l$, constanta regulatorului.

Datorită analogiei cu lagărul, regulatorul prezintă aceeaşi lege de variaţie a grosimii filmului:

$$c = c_0[1 + \xi \cos(\gamma - \delta)], \tag{1}$$

în care γ este unghiul curent.

În vederea particularizării ecuaţiei de bilanţ de debite în sistemul regulator—lagăr se determină iniţial debitul axial în regulator; se evidenţiază faptul că debitul se exprimă pentru zona de influenţă a orificiului i al regulatorului, corespunzător buzunarului i al lagărului, în care se exercită presiunea p_i. Deschiderea pe care se consideră că această presiune este constantă este dată atît în lagăr, cît şi în regulator, de unghiul la centru $2\pi/N$, unde N este numărul par de buzunare hidrostatice.

Debitul axial în regulator pentru zona de influenţă i este de forma

$$q_{R_i} = \frac{c_0^3 K_R p_a}{12\eta} A_i (1 - \bar{p}_i), \tag{2}$$

în care

$$A_i = 2 \int_{\frac{2\pi}{N}(i-1)}^{\frac{2\pi}{N} i} [1 + \xi \cos(\gamma - \delta)]^3 \, d\gamma. \tag{3}$$

Date fiind presiunile diferite în dreptul orificiilor radiale ale regulatorului se va produce o circulaţie circumferenţială spre, sau dinspre orificiile $i+1$ şi $i-1$, învecinate cu orificiul i. Presupunînd că distribuţia de presiuni pe circumferinţa flotorului este ca cea reprezentată în figura 3 şi

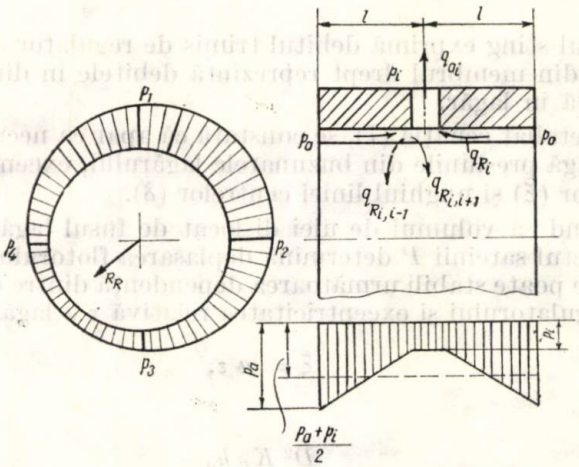


Fig. 3

remarcînd faptul că variaţia de presiuni în direcţia axială este liniară, se mediază presiunile pentru zonele de deschidere unghiulară $2\pi/N$ şi se expimă debitele circumferenţiale în regulator :

$$q_{R_{i,i+1}} = \frac{N c_0^3 p_a}{24 \pi \eta K_R} \left\{ 1 + \xi \cos \left[\frac{2\pi}{N} i - \delta \right] \right\}^3 (\bar{p}_i - \bar{p}_{i+1}), \tag{4}$$

$$q_{R_{i,i-1}} = \frac{N c_0^3 p_a}{24 \pi \eta K_R} \left\{ 1 + \xi \cos \left[\frac{2\pi}{N} (i-1) - \delta \right] \right\}^3 (\bar{p}_i - \bar{p}_{i-1}), \tag{5}$$

în care cu $\bar{p}$ au fost notate presiunile adimensionale, pe baza relaţiei

$$\bar{p} = p/p_a.$$

În calculul de mediere a presiunii pe lungimea flotorului a fost făcută ipoteza că diametrul orificiilor radiale ale regulatorului este mult mai mic decît lungimea flotorului.

Debitul de alimentare trimis de regulator spre buzunarul i al lagărului hidrostatic este dat de relaţia

$$q_a = q_{R_i} - q_{R_{i,i+1}} - q_{R_{i,i-1}}, \tag{6}$$

în care termenii din membrul drept sînt exprimaţi în relaţiile (2), (4) şi (5).

Referitor la debitele din lagăr se utilizează expresiile din lucrarea [6] şi anume : relaţia (13) pentru debitul axial q_i şi relaţiile (15) şi (16) pentru debitele circumferenţiale $q_{i,i+1}$ şi $q_{i,i-1}$.

Pe baza debitelor deduse se poate scrie ecuaţia de bilanţ de debite pentru buzunarul i al lagărului hidrostatic :

$$q_a = q_i + q_{i,i+1} + q_{i,i-1}, \tag{7}$$

în care termenul stîng exprimă debitul trimis de regulator spre buzunarul i, iar termenii din membrul drept reprezintă debitele în direcţie axială şi circumferenţială în lagăr.

Scriind detaliat ecuaţia (7), se constată că apar ca necunoscute suplimentare, pe lîngă presiunile din buzunarele lagărului, excentricitatea relativă în regulator (ξ) şi unghiul liniei centrelor (δ).

Considerînd că volumul de ulei dislocat de fusul lagărului la deplasarea e sub efectul sarcinii P determină deplasarea flotorului regulatorului pe distanţa f, se poate stabili următoarea dependenţă dintre excentricitatea relativă ξ a regulatorului şi excentricitatea relativă ε a lagărului :

$$\xi = a \varepsilon, \tag{8}$$

în care

$$a = \frac{D^2 K_R h_0}{D_R^2 K c_0}. \tag{9}$$

În acest mod a fost eliminată din calcule mărimea intrinsecă ξ, iar factorul A_i din relația (3) devine :

$$A_i = 2 \int_{\frac{2\pi}{N}(i-1)}^{\frac{2\pi}{N} i} [1 + a\varepsilon \cos(\gamma - \delta)]^3 \, d\gamma. \qquad (3').$$

În vederea stabilirii unei corelații dintre unghiul liniei centrelor în regulator (δ) și presiunile din buzunarele lagărului hidrostatic, se pleacă de la ideea că la deplasarea flotorului, în momentul modificării sarcinii în lagăr, proiecția rezultantei presiunilor pe o direcție perpendiculară celei de deplasare este nulă. Pentru cazul unui lagăr hidrostatic cu patru buzunare corelația căutată are forma :

$$\frac{p_1 - p_3}{p_2 - p_4} = \frac{\operatorname{tg}\delta + 1}{\operatorname{tg}\delta - 1}, \qquad (10)$$

în care $p_1 \ldots p_4$ sînt presiunile necunoscute din buzunarele lagărului.

În formă completă, ecuația de bilanț de debite, relația (7), scrisă pentru buzunarul i, are forma :

$$\frac{c_0^3 K_R p_a}{12\eta} A_i - \frac{c_0^3 K_R p_a}{12\eta} A_i \bar{p}_i - \frac{N c_0^3 p_a}{24\pi\eta K_R} \left\{1 + a\varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{N} i - \delta\right]\right\}^3 \bar{p}_i -$$

$$- \frac{N c_0^3 p_a}{24\pi\eta K_R} \left\{1 + a\varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{N}(i-1) - \delta\right]\right\}^3 \bar{p}_i +$$

$$+ \frac{N c_0^3 p_a}{24\pi\eta K_R} \left\{1 + a\varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{N} i - \delta\right]\right\}^3 \bar{p}_{i+1} +$$

$$+ \frac{N c_0^3 p_a}{24\pi\eta K_R} \left\{1 + a\varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{N}(i-1) - \delta\right]\right\}^3 \bar{p}_{i-1} =$$

$$= \frac{K}{1 - K_l} \cdot \frac{h_0^3}{12\eta} p_a \bar{p}_i I_i + \frac{N K_l}{12\pi K (1 - K_b)} \cdot \frac{h_0^3}{\eta} p_a \cdot$$

$$\cdot \left\{1 + \varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{N} i - \beta\right]\right\}^3 \bar{p}_i - \frac{N K_l}{12\pi K (1 - K_b)} \cdot \frac{h_0^3}{\eta} p_a \cdot$$

$$\cdot \left\{1 + \varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{N} i - \beta\right]\right\}^3 \bar{p}_{i+1} + \frac{d\omega}{4} l_a h_0 \left\{1 + \varepsilon \cos\left[\frac{2\pi}{N} i - \beta\right]\right\} +$$

$$+\frac{NK_l}{12\,\pi\,K(1-K_b)}\cdot\frac{h_0^3}{\eta}\,p_a\left\{1+\varepsilon\cos\left[\frac{2\pi}{N}(i-1)-\beta\right]\right\}^3\bar{p}_i-$$

$$-\frac{N\,K_l}{12\,\pi\,K\,(1-K_b)}\cdot\frac{h_0^3}{\eta}\,p_a\left\{1+\varepsilon\cos\left[\frac{2\pi}{N}(i-1)-\beta\right]\right\}^3\bar{p}_{i-1}-$$

$$-\frac{d\omega}{4}\,l_a\,h_0\left\{1+\varepsilon\cos\left[\frac{2\pi}{N}(i-1)-\beta\right]\right\}. \qquad (11)$$

Pe baza relaţiei (11) se formează un sistem de N ecuaţii liniare a cărui rezolvare conduce la aflarea presiunilor din buzunare. Aşa cum se procedează de obicei [2], [5], [6], în vederea rezolvării sistemului se impune o valoare pentru excentricitatea relativă ε şi se fac calculele pentru diferite valori ale unghiului β. În plus, este necesară alegerea unui unghi oarecare δ_0, pe baza căruia se află presiunile $p_0^1 \ldots, p_0^4$; se calculează apoi unghiul δ_1 din relaţia (10); mediind valoarea iniţială δ_0 cu cea calculată δ_1 se reface calculul presiunilor, iterativ, pînă cînd diferenţa $\delta_{j+1} - \delta_j$ este mai mică decît 1, de exemplu.

Determinarea portanţei, a debitului de scăpări şi a rigidităţii statice a lagărului se face în acelaşi mod ca şi în lucrările [2], [5], [6].

DETERMINAREA CARACTERISTICILOR LAGĂRELOR HIDROSTATICE ECHIPATE CU REGULATOARE RADIALE

În urma efectuării calculelor pentru numeroase variante constructive de regulator şi pentru diferite condiţii de funcţionare au fost trasate curbele din figurile 4...11, considerate ca reprezentative.

Analizînd influenţa geometriei regulatorului asupra caracteristicilor lagărului radial hidrostatic se constată în primul rînd importanţa alegerii jocului radial c_0. Astfel, din figura 4, se observă că numai în cazul jocurilor radiale mici portanţa relativă $\bar{R}$ poate avea valori importante şi anume numai la excentricităţi mari. Portanţa converge către aceeaşi valoare la jocuri mari în regulator, pentru orice excentricitate şi practic pentru orice mărime de regulator radial. De altfel, din aceeaşi figură, se constată importanţa redusă pe care o are raportul K_R — constanta regulatorului — asupra portanţei relative.

Concluzia de mai sus este valabilă şi în ceea ce priveşte debitul axial de scăpări din lagăr, Q (fig. 5). De remarcat că debitul de scăpări trebuie să aibă valori cît mai reduse, aceasta presupunînd că şi debitul de alimentare este redus. Valori mici ale lui Q se întîlnesc în cazul jocurilor radiale c_0 mici, pentru orice mărime de regulator şi pentru orice excentricitate. Este adevărat că debite nimine au rezultat pentru $K_R = 0{,}5$, adică pentru aceeaşi valoare pentru care şi portanţa este maximă, dar influenţa dată de constanta regulatorului este foarte mică.

Favorabile sînt jocurile mici şi pentru rigiditatea statică relativă $d\bar{R}/d\,\varepsilon$ (fig. 6); această caracteristică scade foarte mult la creşterea jocului c_0, indiferent de excentricitate. Deşi diferenţele sînt foarte mici, se remarcă

și în cazul acestei caracteristici superioritatea regulatoarelor cu constanta $K_R \geqslant 0{,}5$.

Concluziile parțiale pentru proiectare sînt următoarele : realizarea regulatoarelor radiale cu jocuri mici, deși execuția acestora este mai scumpă ; funcționarea lagărului la excentricități relative mari ; alegerea rapoartelor K_R cît mai mari (0,5 ... 0,6) pentru a asigura portanța și rigidi-

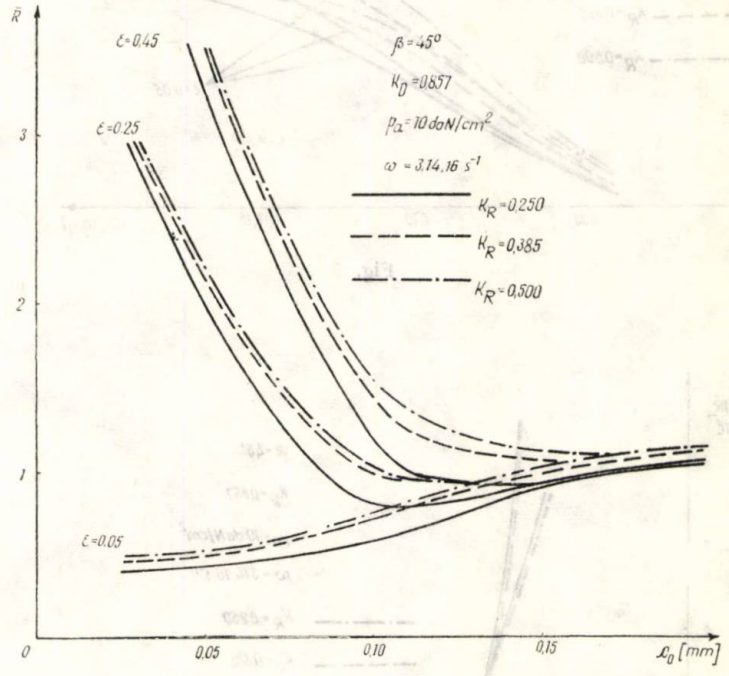


Fig. 4

tate maxime și debit minim. Dacă regulatorul trebuie să aibă un gabarit radial mic atunci se va alege totuși o valoare mai mică pentru constanta K_R și anume între 0,3 și 0,4.

Din analiza rezultatelor obținute pe calculator se desprinde o concluzie interesantă și anume aceea că raportul d_R/d al diametrelor nu influențează sensibil asupra variației caracteristicilor studiate, motiv pentru care nu au mai fost trasate diagrame în plus.

Observînd figurile 7 și 8, se constată că lagărul are caracteristici superioare dacă fusul este mai înalt turat. Portanța crește cu cît viteza unghiulară ω crește, fapt datorat efectului hidrodinamic, pentru jocuri radiale în regulator de pînă la 0,15 mm. Același efect favorabil îl au turațiile înalte și asupra rigidității statice relative, $\mathrm{d}\bar{R}/\mathrm{d}\,\varepsilon$, remarcînd în special cazul excentricităților mari, la care valorile absolute ale rigidității sînt foarte ridicate. De exemplu, într-unul din cazurile calculate a rezultat o rigiditate absolută de 100 daN/μm.

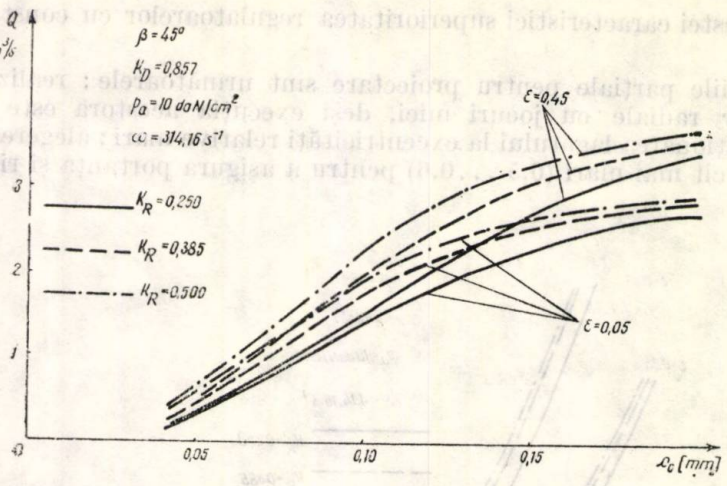

Q
cm³/s
β = 45°
K_D = 0,857
p_a = 10 daN/cm²
ω = 314,16 s⁻¹
K_R = 0,250
K_R = 0,385
K_R = 0,500
ε = 0,45
ε = 0,05
3
2
1
0
0,05
0,10
0,15
ℓ_c [mm]

Fig. 5

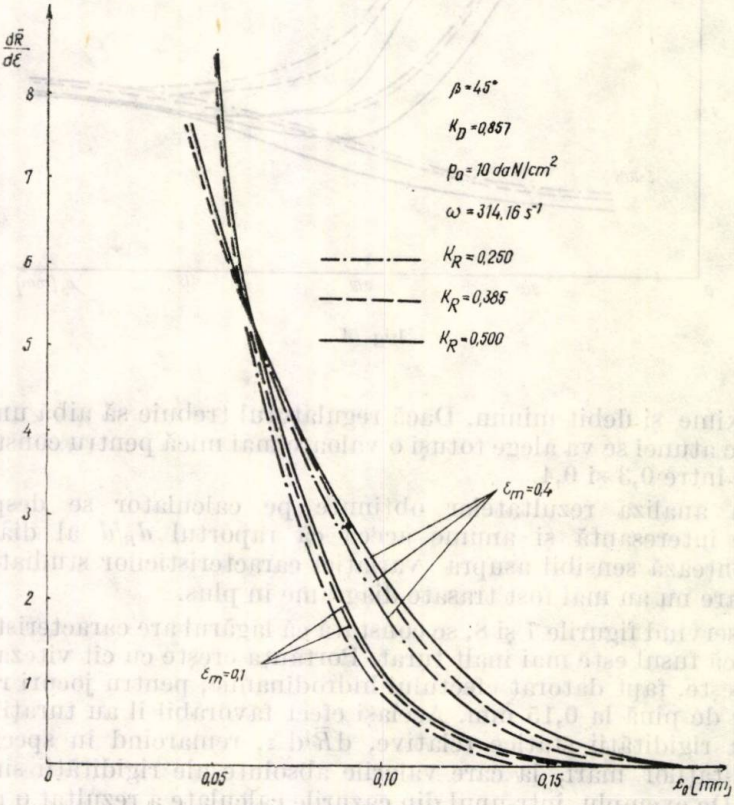

dR̄/dε
β = 45°
K_D = 0,857
p_a = 10 daN/cm²
ω = 314,16 s⁻¹
K_R = 0,250
K_R = 0,385
K_R = 0,500
ε_m = 0,4
ε_m = 0,1
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0,05
0,10
0,15
ℓ_a [mm]

Fig. 6

În mod evident, variația turației fusului nu are nici o influență asupra debitului de scăpări al lagărului.

În figurile 9 ... 11 a fost pusă în evidență variația caracteristicilor lagărului cu excentricitatea relativă ε și de asemenea cu presiunea de alimentare p_a.

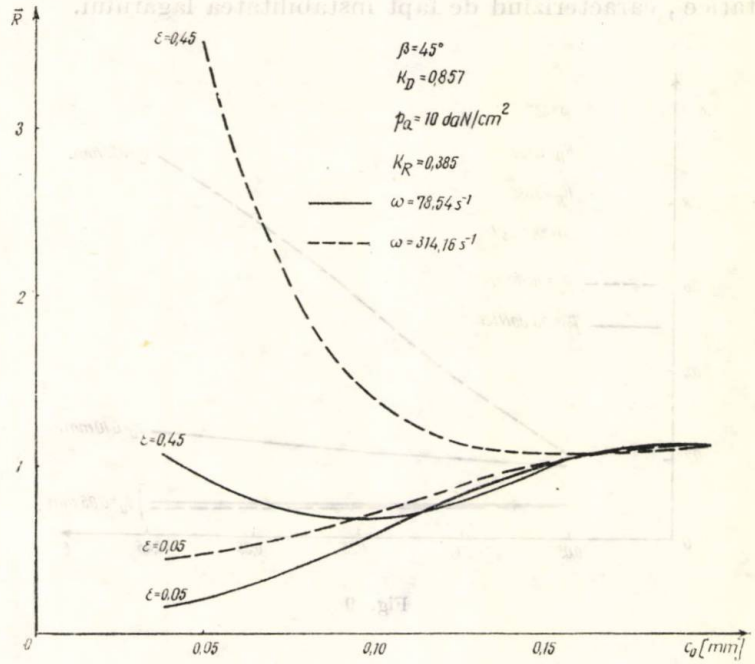


Fig. 7

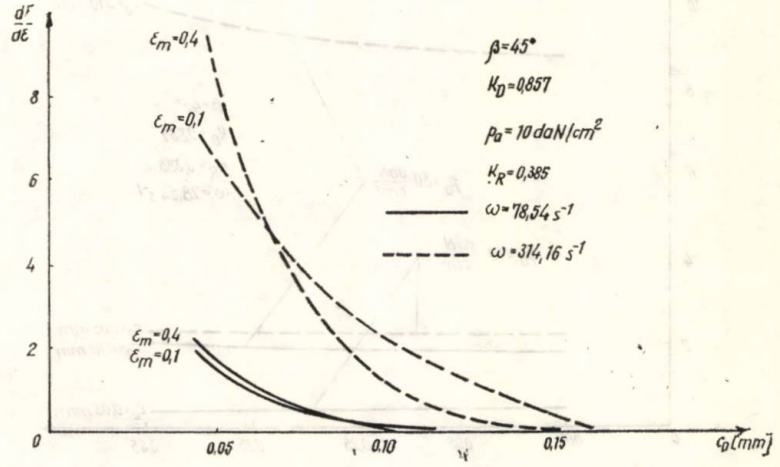


Fig. 8

Aşa cum rezultă din figura 9 dar mai ales din figurile 4 şi 7 portanţa creşte în general la creşterea excentricităţii ; regula este infirmată în cazul regulatoarelor cu jocuri mari la care circulaţia de ulei în direcţie circumferenţială este foarte importantă. În aceste situaţii, funcţionarea lagărului devine imposibilă datorită instabilităţii fusului în cuzinet. În cazul regulatoarelor cu jocuri radiale mari, din calcule rezultă valori negative ale rigidităţii statice , caracterizînd de fapt instabilitatea lagărului.

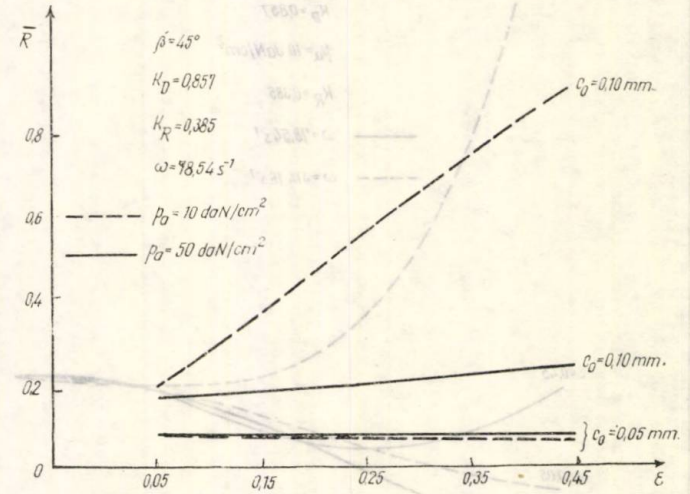


Fig. 9

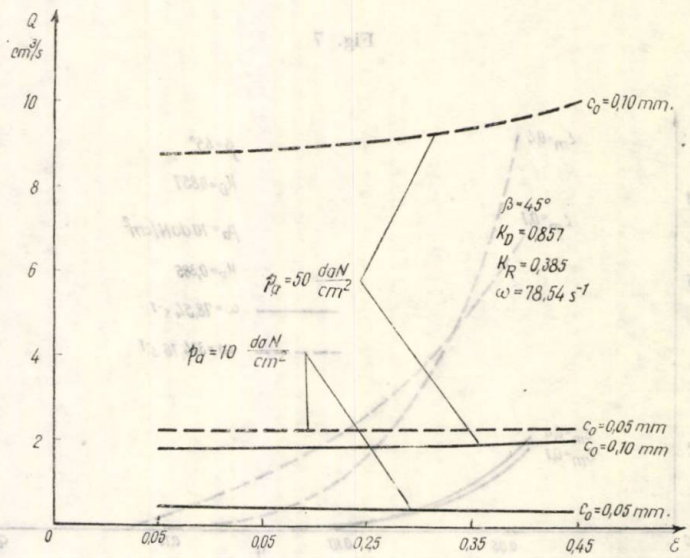


Fig. 10

Din figurile 9...11 se poate deduce concluzia parţială că este avantajoasă utilizarea unei presiuni de alimentare reduse, pentru realizarea portanţei relative maxime, la jocuri radiale c_0 mari; de asemenea, tot la presiuni mici de alimentare se obţin valori reduse ale debitului de scăpări

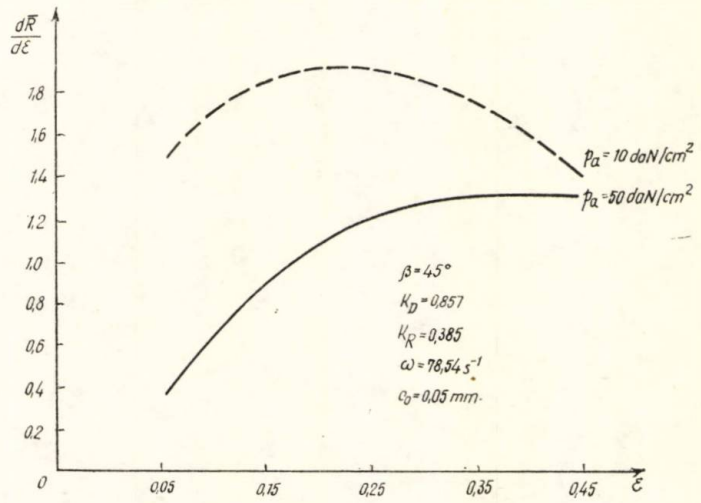


Fig. 11

şi rigidităţi statice ridicate. Acest aspect a fost observat şi în cazul alimentării lagărului prin droselul capilar circumferenţial multiplu [6]. În realitate mărimile absolute ale portanţei şi rigidităţii statice sînt direct proporţionale cu presiunea de alimentare p_a. Pe baza calculelor, ţinînd cont de aspectele menţionate, se poate afirma că efectul indirect al presiunii de alimentare scăzute este mai puţin important decît efectul direct, ceea ce conduce la recomandarea presiunilor de alimentare ridicate; acest aspect este neeconomic datorită creşterii puterii de pompare cerute de sistem. Pentru a ţine cont de cele două aspecte contradictorii se pot indica, ca valori acceptabile, presiuni de alimentare cuprinse între 40 şi 60 daN/cm^2.

Cu recomandările făcute, regulatorul radial poate fi proiectat şi utilizat, în regim static de încărcare; pentru lagăre asupra cărora acţionează sarcini variabile, echipate cu regulatorul radial, sînt necesare studii speciale.

Primită la redacţie la 11 februarie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. P. Q'Donoghue, W. B. Rowe, *Metode de reglare a lagărelor hidrostatice*, Expres Informaţia, Detali Maşin, **36** (1970).
2. Gh. Manea, ş.a. *Aspecte teoretice caracteristice şi metodă de calcul pentru lagărele radiale hidrostatice fără canale longitudinale unse cu lichide*, St. cerc. mec. apl., **32**, *1* (1973).
3. H. C. Rippel, *Cast Bronze Hydrostatic Bearing Design Manual*, Machine Design, aug.—dec., 1973.
4. W. B. Rowe, J. P. O'Donoghue, *A review of hydrostatic bearings design*, Joint Conference on Externally Pressurized Bearings, London, nov. 1971.
5. St. Stanciu, *Lagăre radiale hidrostatice echipate cu drosele din materiale sinterizate*, St. cerc. mec. apl., **38**, 2 (1979).
6. St. Stanciu, *Caracteristicile lagărelor radiale hidrostatice alimentate prin droselul capilar circumferenţial multiplu*, St. cerc. mec. apl., **38**, 3 (1979).

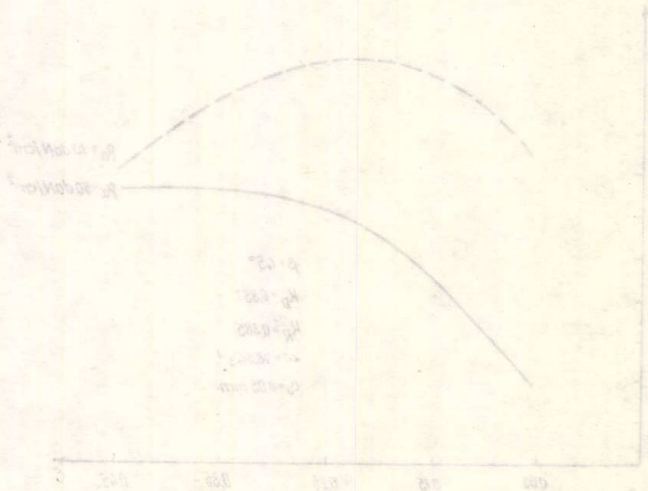


Fig. 11

CALCULUL DIMENSIUNILOR FLANCĂRII LA O ROATĂ DINȚATĂ ȘI LA CREMALIERA GENERATOARE CONJUGATĂ ÎN CAZUL ANGRENAJELOR CILINDRICE CU DINȚI DREPȚI

de GEORGE DOBRE
Institutul politehnic din București

Pornind de la analiza rezolvării problemei în literatură, se propune o metodă de calcul a dimensiunilor flancării la angrenajele cilindrice cu dinți drepți; se stabilesc, de asemenea, elementele geometrice ale cremalierei generatoare conjugate roții flancate, care definește profilul pietrei de rectificat pentru execuția flancării. Problema este importantă la proiectarea și execuția angrenajelor de puteri și turații ridicate.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Utilizarea pe scară tot mai largă în construcția de mașini a angrenajelor de puteri și turații ridicate, tendință impusă de cerința creșterii capacității de lucru și productivității și a reducerii gabaritului, face necesară luarea măsurilor corespunzătoare pentru îmbunătățirea comportării vibroacustice. O îmbunătățire hotărîtoare a comportării vibroacustice a angrenajelor cilindrice cu dinți drepți în evolventă o realizează corecția prin flancare a danturii, care reduce atît excitația parametrică cauzată de variația în trepte a rigidității danturii (excitație determinantă a regimului vibratoriu, în sensul existenței a numeroase domenii de instabilitate), cît și cvasișocurile de la intrarea și ieșirea din angrrnare cauzate de interferența de sarcină (ultimul fenomen fiind caracteristic angrenajelor precise).

Bazele teoretice asupra formei profilului corectat prin flancare și elementelor geometrice ale acestuia la angrenajele cilindrice cu dinți drepți în evolventă au fost formulate cel mai complet de Schlaf [4], ele fiind preluate în formă integrală în literatura domeniului (vezi, de exemplu, [3, 5, 6]). În ceea ce privește flancarea evolventică, cea mai facilă tehnologic, Schlaf indică o metodă de calcul a elementelor geometrice ale profilului obținut prin flancare, care deși este denumită exactă, se bazează pe aproximația că un punct al profilului corectat este punctul de pe cercul de vîrf definit de relația

$$s_{e(1)} - s_{eF1(2)} = \frac{2\,w_{B(D)}}{\cos \delta_{e1(2)}}, \qquad (1)$$

în care $s_e(s_{eF})$ este arcul de vîrf al dintelui fără (cu) flancare ; $w_{B(D)}$ — deformația unei perechi de dinți în punctul interior B (exterior D) de angrenare singulară ; 1(2) — indicele pinionului (roții). În plus, unghiul δ_e[1] este definit de relația (vezi fig. 1)

$$\delta_e = \text{tg } \alpha_e - \text{inv } \alpha_v, \tag{2}$$

în care intervin : α_e — unghiul de presiune pe cercul de vîrf ; α_v — unghiul de presiune pe cercul vîrfurilor ascuțite. Accepția relației (1) a permis la timpul său o rezolvare parțial pe cale grafică [4].

Autorul prezentei lucrări propune baze de calcul care evită aproximația (1) (vezi și [1]), considerîndu-se că unul din punctele profilului corectat este W (fig. 1), aflat pe linia de angrenare la distanța $w_{B(D)}$ în cazul pinionului, respectiv al roții.

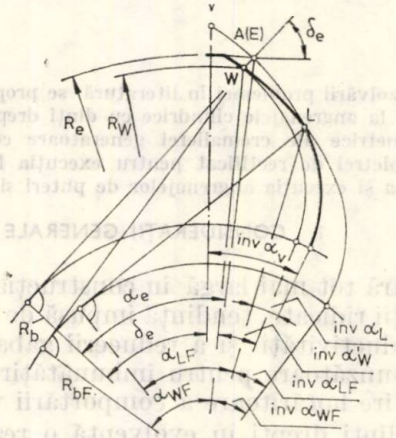


Fig. 1

Diferențele între rezultatele obținute prin aplicarea relațiilor (1) și (2) și a metodei propuse de autor sînt de ordinul toleranțelor ; ținînd însă seama de faptul că flancarea se execută pe adîncimi de ordinul micronilor și de importanța asigurării formei corecției pentru realizarea scopului funcțional pentru care se execută, este utilă acceptarea bazelor de calcul exact

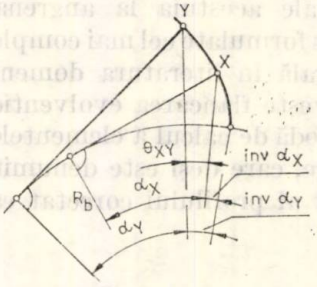


Fig 2

[1] În continuare se renunță la indicele de roată, ținînd seama de observația că în unele relații corespunzătoare pinionului și roții intervin deformațiile w_B, respectiv w_D.

propuse de autor, mai ales că — în condițiile actuale ale aplicării P.A.D. pe sisteme de calcul — algoritmul de rezolvare numerică este același pentru ambele metode.

2. CALCULUL DIMENSIUNILOR FLANCĂRII LA O ROATĂ DINȚATĂ

Se va folosi următoarea propoziție : evolventa este complet determinată dacă se dau centrul cercului de bază și două puncte ale evolventei căutate. Afirmația rezultă imediat din analiza sistemului de ecuații rezultat din condițiile de mai sus (fig. 2) :

$$R_b = \frac{R_X}{\cos \alpha_X},$$

$$R_b = \frac{R_Y}{\cos \alpha_Y}, \tag{3}$$

$$\text{inv } \alpha_Y - \text{inv } \alpha_X = \theta_{XY}.$$

Într-adevăr, sistemul (3) are trei ecuații și trei necunoscute (R_b , α_X α_Y), deci este compatibil.

Centrul cercului de bază al flancării coincide cu centrul cercului de bază al roții, iar punctele cunoscute ale profilului rezultat prin flancare sînt (fig. 1) : a) punctul W de pe linia de angrenare, menționat la punctul 1 al lucrării ; b) punctul limită L al începutului flancării, care se poate alege[2] la pinion (roată), în cazul flancării scurte, la jumătatea segmentului de angrenare dublă DE (AB) sau în poziții pe DE (la pinion) și AB (la roată) aflate la distanța de un pas de bază ; în cazul flancării lungi — punctul D (B) ; în cazul flancării supralungi — punctul $B(D)$. Scrierea ecuațiilor de forma (3) pentru profilul obținut prin flancare se face ținînd seama de observațiile : a) la primele două ecuații, notația R_b se înlocuiește cu R_{bF} (raza cercului de bază al flancării) ; b) a treia ecuație rezultă utilizînd elemente de geometrie definite de evolventa cercului de bază de rază R_b care trece prin W (pentru care se fac notații cu indicele superior prim). Prin eliminarea lui R_{bF} din primele două ecuații, se obține sistemul

$$R_W \cos \alpha_{WF} - R_{LF} \cos \alpha_{LF} = 0,$$

$$\text{inv } \alpha_{WF} - \text{inv } \alpha_{LF} = \text{inv } \alpha'_W - \text{inv } \alpha_L + \frac{w^*}{R_b}, \tag{4}$$

în care intervin

$$R_W = \sqrt{R_b^2 + (R_e \sin \alpha_e - w^*)^2},$$

$$\alpha_e = \arccos \frac{R_b}{R_e}, \tag{5}$$

$$\alpha'_W = \text{arctg} \frac{R_e \sin \alpha_e - w^*}{R_b},$$

iar $w = w_{B(D)}$ la pinion, respectiv la roată.

[2] Nu se fac aprecieri asupra variantei optime privind poziția punctului începutului flancării, problematică a unei lucrări viitoare.

Rezolvarea sistemului (4) se poate face printr-o metodă iterativă cu o foarte bună precizie. După stabilirea soluțiilor, rezultă raza cercului de bază al flancării

$$R_{bF} = R_L \cos \alpha_{LF}, \tag{6}$$

sau

$$R_{bF} = R_W \cos \alpha_{WF}. \tag{7}$$

3. DIMENSIUNILE FLANCĂRII LA CREMALIERA GENERATOARE CONJUGATĂ ROȚII FLANCATE

Cremaliera generatoare cu flancare este complet definită dacă se stabilesc unghiul de flancare al profilului de referință α_{0F} și coeficientul înălțimii de flancare a profilului de referință, f_{0F}.

Se pornește de la observația că, deoarece pașii pe oricare cerc corespunzători profilurilor necorectate și corectate prin flancare sînt identici (demonstrația este evidentă, rezultînd din diferența unor arce de cerc egale), cercurile de divizare relative la cele două tipuri de profiluri coincid. Ca urmare

$$R_{dF} = R_d. \tag{8}$$

Rezultă

$$\alpha_{oF} = \arccos \frac{R_{bF}}{R_{dF}}. \tag{9}$$

În sfirșit, cu notațiile din figura 3 rezultă celălalt parametru

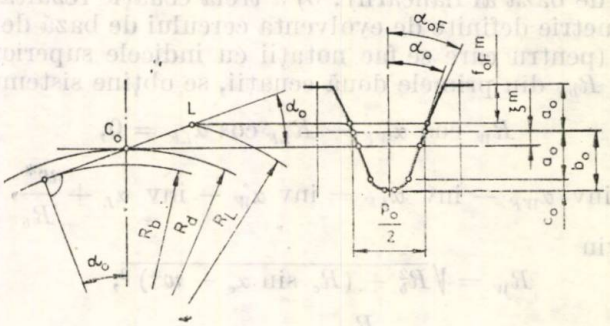


Fig. 3

$$f_{oF} = f_0 + \xi - \frac{1}{m}\left(\sqrt{R_L^2 - R_b^2} - R_d \sin \alpha_0\right) \sin \alpha_0. \tag{10}$$

În acest mod au rezultat toate mărimile necesare pentru definirea sculei (pietrei de rectificat) care realizează flancarea.

4. EXEMPLU

Pentru efectuarea calculelor conform metodicii analizate, a fost întocmit un program de calcul a dimensiunilor flancării la roata unui angrenaj și la cremaliera generatoare conjugată roții flancate; ca subprogram se folosește un program pentru calculul rigidității și deformației danturii la angrenajele cilindrice cu dinți drepți, întocmit conform metodologiei indicate în [2].

În tabelul 1 sînt indicate rezultatele obținute în cazul flancării lungi pentru angrenajul cilindric cu roți generate de cremaliera generatoare (la care s-a admis $w_0 = 0{,}25$) cu datele : $A = 90$ mm ; m = 2,5 mm ; $z_1 = 17$; $z_2 = 54$; $\xi_s = 0{,}525378$. Încărcarea este corespunzătoare forței normale raportate la lățimea danturii $F_n/B = 200$ N. Numărul mare de zecimale ale mărimilor α_{oF} și f_{oF} este redat conform editării la imprimantă, urmînd ca în practică să se utilizeze valorile care satisfac precizia dimensională a execuției.

Tabelul 1

Nr. crt.	Deplasările specifice parțiale		Unghiul de flancare a profilului de referință α_{oF}		Coeficientul înălțimii de flancare a profilului de referință, f_{oF}	
	pinion	roată	pinion	roată	pinion	roată
1	0	0,525378	20,470480	20,467471	0,81475153	0, 80421207
2	0,131345	0,394034	20,475711	20,467966	0,84693176	0,75452429
3	0,262689	0,262689	20,489745	20,478313	0,87727554	0,70241455
4	0,394034	0,131345	20,514682	20,498520	0,90565250	0,64817447
5	0,525378	0	20,552006	20,530322	0,93190917	0,59203861

Primită la redacție la 6 februarie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. G. Dobre, *Elementele geometrice ale profilului flancat la angrenajele cilindrice cu dinți drepți*, Lucrările simpozionului „Proiectarea asistată de calculator", Brașov, 1978, vol. II, p. 119...122.
2. G. Dobre, *Elemente de calcul a deformațiilor și rigidității danturii la angrenajele cilindrice cu dinți drepți*, Lucrările simpozionului „Proiectarea asistată de calculator", Brașov, 1978, vol. II, p. 123... 129.
3. G. Rădulescu, *Untersuchungen über den Einfluss der Profilrücknahme auf die Zahnverformung und das Geräusch geradverzahnter Stirnränder*, Diss. TU Dresden, 1966.
4. G. Schalf, *Beitrag zur Steigerung der Tragfähigkeit und Laufruhe geradverzahnter Stirnräder durch Profilrücknahme*, Diss. TU Dresden, 1962.
5. F. Tesch, *Der fehlerhafte Zahneingriff und seine Auswirkungen auf die Geräuschabstrahlung*, Diss. TH Aachen, 1969.
6. A. Toppe, *Untersuchungen über die Geräuschanregung bei Stirnrädern unter besonderer Berücksichtigung der Fertigungsgenauigkeit*, Diss. TH Aachen, 1966.

STABILIREA PROFILULUI DE IEȘIRE LA MATRIȚE DESTINATE EXTRUDĂRII LA CALD A BURGHIELOR ELICOIDALE

de GL. ABRUDAN, GH. ACHIMAȘ, FL. CIȘMAȘIU
Institutul politehnic din Cluj-Napoca

În cadrul lucrării se prezintă o metodă originală de determinare a profilului din secțiunea transversală a burghielor-profil, care stă la baza proiectării matrițelor de extrudat, utilizînd matricele de transfer.

Canalele de evacuare a așchiilor la burghiele elicoidale, constituie din punct de vedere geometric, suprafețe elicoidale generate de o curbă plană, ce se sprijină pe o elice cilindrică de pas p_E și unghi de înclinare ω.

Profilul din secțiunea transversală a burghielor este necesar pentru controlul matriței de extrudat-profil, care stă la baza proiectării calibrului și totodată definește precizia profilului burghiului extrudat.

În cele ce urmează, se stabilește metoda analitică de calcul a acestui profil, metodă care, pe baza datelor inițiale din secțiunea normală, cuprinde toată gama de diametre a burghielor standardizate. Curba generatoare a acestei suprafețe elicoidale este determinată de necesitatea obținerii, după ascuțirea burghiului, a unei muchii rectilinii a tăișului. Această curbă generatoare este materializată de profilul frezei de ordinul II cu care se prelucrează canalul burghiului și reprezintă profilul canalului într-o secțiune normală pe elicea medie.

Pentru realizarea matriței de extrudare a burghielor elicoidale este necesar să se cunoască forma profilului canalului elicoidal într-o secțiune normală pe axa burghiului, aceasta pentru a se putea verifica dimensional profilul rezultat și mai ales că acest profil materializează secțiunea de ieșire a părții active a pastilei de extrudare.

Profilul canalului elicoidal într-o secțiune normală pe elicea medie este prezentat în figura 1. Acest profil (notat cu Γ) este format din arcele de cerc $\overset{\frown}{AMB}$, $\overset{\frown}{BNC}$ și $\overset{\frown}{CPD}$ racordate în punctele B și C.

Ecuațiile parametrice ale curbei Γ, considerînd ψ_1, ψ_2 și ψ_3 ca parametri ce descriu arcele de mai sus, se obțin astfel:

— pentru arcul $\overset{\frown}{AMB}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= R_1 \cos \psi_1 - a, \\ y_1 &= R_1 \sin \psi_1, \end{aligned} \tag{1}$$

unde $\psi_1 \in [0, \psi_{1max}]$

— pentru arcul $\overset{\frown}{BNC}$:

$$x_1 = R_2 \cos \psi_2,$$

$$y_1 = R_2 \sin \psi_2 + H, \tag{2}$$

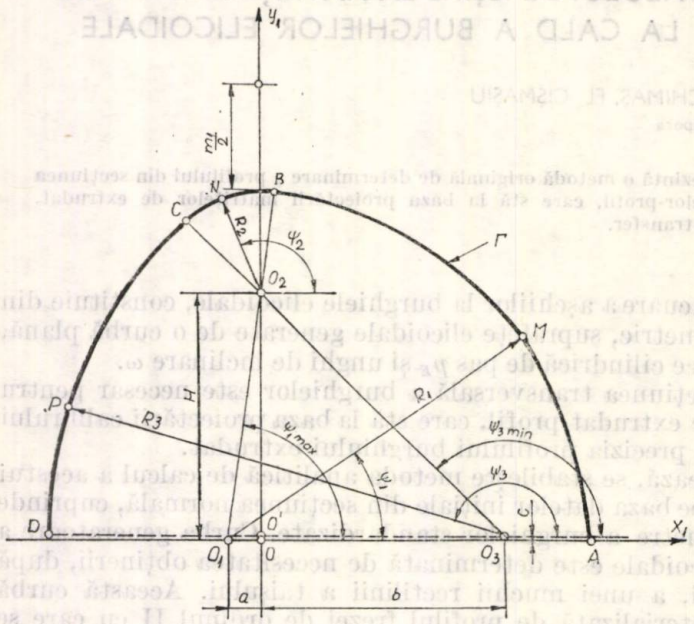


Fig. 1. — Profilul canalului elicoidal al burghiului într-o secţiune normală pe elicea medie.

unde $\psi_2 \in [\psi_{1max}, \psi_{3min}]$,
iar din ΔOO_2O_1, rezultă $H = OO_2 = \sqrt{(R_1 - R_2)^2 - a^2}$;

— pentru arcul $\overset{\frown}{CPD}$:

$$x_1 = R_3 \cos \psi_3 + b, \tag{3}$$

$$y_1 = R_3 \sin \psi_3 + c,$$

unde $\psi_3 \in [\psi_{3min}, \pi]$.

Limitele de variaţie ale parametrilor ψ_{1max} şi ψ_{3min}, se determină din condiţia de racordare ale celor trei arce în B, respectiv în C, astfel :

$$\psi_{1max} = \arccos \frac{a}{R_1 - R_2},$$

$$\psi_{3min} = 180^\circ - \arccos \frac{b}{R_3 - R_2}.$$

Ecuațiile (1), (2) și (3) se pot exprima într-o formă unică, convenabilă pentru programarea pe calculator, astfel:

$$x_1 = (k_1R_1 + k_2R_2 + k_3R_3)\cos\psi - k_1a + k_3b, \tag{4}$$

$$y_1 = (k_1R_1 + k_2R_2 + k_3R_3)\sin\psi + k_2H + k_3c,$$

în care, punînd condițiile:

$$k_1 = 1;\ k_2 = 0;\ k_3 = 0,\ \text{cînd}\ \psi \in \left[0;\ \arccos\frac{a}{R_1 - R_2}\right],$$

$$k_1 = 0;\ k_2 = 1\ \ k_3 = 0\ \ \text{cînd}\ \psi \in \left(\arccos\frac{a}{R_1 - R_2};\ 180^\circ - \right.$$

$$\left. - \arccos\frac{b}{R_3 - R_2}\right)$$

și

$$k_1 = 0;\ k_2 = 0;\ k_3 = 1\ \text{cînd}\ \psi \in \left[180^\circ - \arccos\frac{b}{R_3 - R_2};\ \pi\right],$$

se obțin succesiv cele trei arce ale curbei Γ.
Pentru simplificarea ecuației (4), se vor face următoarele notații:

$$K = k_1R_1 + k_2R_2 + k_3R_3,$$

$$A = -k_1a + k_3b,$$

$$B = k_2H + k_3c.$$

Ca urmare, pentru curba Γ, se obține următoarea ecuație:

$$(\Gamma)\quad \begin{cases} x_1 = K\cos\psi + A, \\ y_1 = K\sin\psi + B, \\ z_1 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

sau sub formă matriceală:

$$\Gamma = \begin{Vmatrix} K\cos\psi + A \\ K\sin\psi + B \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}. \tag{6}$$

Pentru determinarea profilului normal pe axa burghiului, se va utiliza în continuare ecuaţia (6) a curbei Γ, utilizînd metoda matricelor de transfer. În acest scop, se vor adopta următoarele sisteme de axe (fig. 2):

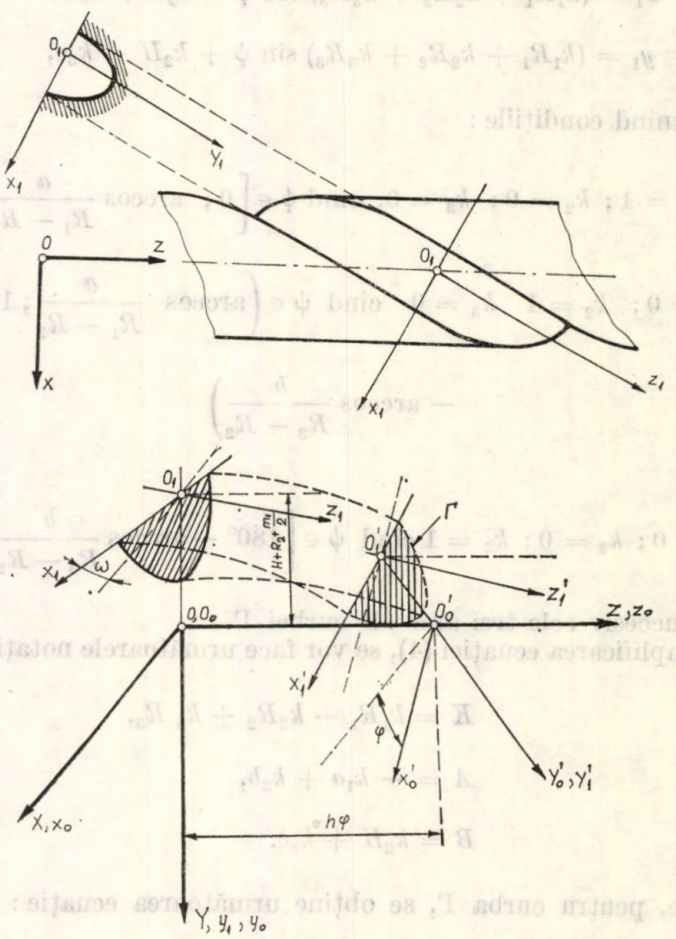


Fig. 2. — Generarea suprafeţei canalului elicoidal al burghiului.

— sistemul $x_1O_1y_1z_1$, aflat într-un plan normal pe elicea medie a canalului elicoidal;

— sistemul $XOYZ$ — luat ca sistem de referinţă fix, ataşat burghiului, cu axa OZ de-a lungul axei de simetrie a burghiului;

— sistemul $x_0O_0y_0z_0$ — într-un plan normal pe axa burghiului.

Din punct de vedere cinematic, suprafaţa elicoidală a canalului burghiului va fi generată de curba Γ, printr-o mişcare de rotaţie cu unghiul φ şi o mişcare de translaţie cu $h \cdot \varphi$ ($h = p_E/2\,\pi$), această mişcare fiind înregistrată faţă de sistemul fix $XOYZ$.

Ecuaţia (6) reprezintă curba Γ în sistemul $x_1O_1Y_1z_1$ şi se va nota cu $\Gamma^{(1)}$, iar în sistemul $x_0O_0y_0z_0$, va fi dată de relaţia

$$\Gamma^{(0)} = M_{01} \cdot \Gamma^{(1)}, \tag{7}$$

în care M_{01} este matricea de transfer din sistemul $x_1O_1y_1z_1$ în sistemul $x_0O_0y_0z_0$.

Matricea de transfer M_{01}, este de forma :

$$M_{01} = \begin{Vmatrix} \cos\omega & 0 & \sin\omega & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -m_1/2 - H - R_2 \\ -\sin\omega & 0 & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{8}$$

Prin înmulţirea matricei (6) cu matricia (8), rezultă ecuaţia curbei Γ, în sistemul $x_0O_0y_0z_0$, iar relaţia (7) devine :

$$\Gamma^{(0)} = \begin{Vmatrix} K\cos\psi\cos\omega + A\cos\omega \\ K\sin\psi + B - m_1/2 - H - R_2 \\ -K\cos\psi\sin\omega - A\sin\omega \\ 1 \end{Vmatrix}. \tag{9}$$

Ecuaţia suprafeţei elicoidale a canalului va fi dată de relaţia

$$S_e = M \cdot \Gamma^{(0)}, \tag{10}$$

în care M este matricea de transfer pentru mişcarea elicoidală şi are forma :

$$M = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & h\cdot\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{11}$$

Înmulţim matricele (9) şi (11), se obţine :

$$S_e = \begin{Vmatrix} K\cos\psi\cos\omega\cos\varphi + A\cos\omega\cos\varphi - K\sin\psi\sin\varphi - \\ \quad -(B - m_1/2 - H - R_2)\sin\varphi \\ K\cos\psi\cos\omega\sin\varphi + A\cos\omega\sin\varphi + K\sin\psi\cos\varphi + \\ \quad +(B - m_1/2 - H - R_2)\cos\varphi \\ -K\cos\psi\sin\omega - A\sin\omega + h\cdot\varphi \\ 1 \end{Vmatrix}. \tag{12}$$

S-a obţinut astfel ecuaţia suprafeţei elicoidale a burghiului, care se mai poate scrie şi sub forma :

$$\begin{aligned} X &= K\cos\psi\cos\omega\cos\varphi + A\cos\omega\cos\varphi - K\sin\psi\sin\varphi - \\ &\quad -(B - m_1/2 - H - R_2)\sin\varphi; \\ Y &= K\cos\psi\cos\omega\sin\varphi + A\cos\omega\sin\varphi + K\sin\psi\cos\varphi + \\ &\quad +(B - m_1/2 - H - R_2)\cos\varphi; \\ Z &= -K\cos\psi\sin\omega - A\sin\omega + h\cdot\varphi. \end{aligned} \tag{13}$$

Ecuația profilului canalului, într-o secțiune normală pe axa burghiului, se va determina din intersecția suprafeței elicoidale cu un plan $Z =$ $=$ const., sau, mai particular, $Z = 0$. Din această condiție se obține

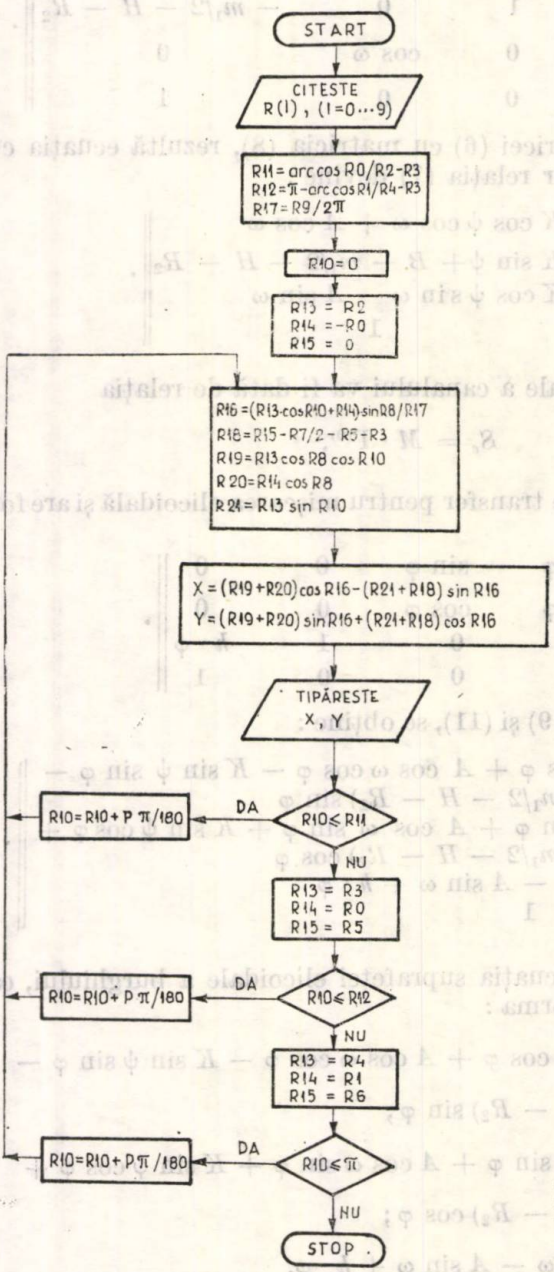


Fig. 3. — Organigrama procedeului de calcul al profilului canalului de la burghie.

pentru φ valoarea:

$$\varphi^* = \frac{(K \cos \psi + A) \sin \omega}{h}, \tag{14}$$

iar ecuația profilului devine:

$$X_{(p)} = K \cos \psi \cos \omega \cos \varphi^* + A \cos \omega \cos \varphi^* - K \sin \psi - \sin \varphi^* - \\ - (B - m_1/2 - H - R_2) \sin \varphi^*;$$

$$Y_{(p)} = K \cos \psi \cos \omega \sin \varphi^* + A \cos \omega \sin \varphi^* + K \sin \psi \cos \varphi^* + \\ + (B - m_1/2 - H - R_2) \cos \varphi^*;$$

$$Z_{(p)} = 0.$$

Metoda de calcul are un caracter general, putînd fi particularizată pentru orice dimensiuni constructive ale burghielor, modificînd datele inițiale corespunzător.

Considerînd un pas de variație a parametrului ψ egal cu 5°, se pot determina coordonatele punctelor profilului canalului elicoidale al burghielor ilustrat în organigrama din figura 3.

Ecuațiile stabilite au un caracter general, putînd fi utilizate și pentru alte scule cu canale elicoidale, modificînd corespunzător ecuațiile parametrice ale profilului, de asemenea precizia profilului poate fi mărită, alegînd pentru pas valori cît mai mici, crescînd astfel numărul punctelor determinate.

Primită la redacție la 25 noiembrie 1978

BIBLIOGRAFIE

1. Gl. Abrudan, *Generalizarea metodei de determinare a erorilor de profil rezultate la prelucrarea pieselor cu scule profilate*, Teză de doctorat. Cluj-Napoca. Institutul politehnic, 1971.
2. I. Drăgan, *Tehnologia deformărilor plastice*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1976.
3. A. Dobrescu, *Geometrie diferențială*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1963.
4. Z. Duca, *Teoria sculelor așchietoare*, București, Edit. tehnică, 1967.
5. St. Enache, *Proiectarea și tehnologia sculelor așchietoare*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1973.
6. I. D. Lăzărescu, Gl. Abrudan, ș.a., *Așchierea și scule așchietoare*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1976.
7. E. Murgulescu, ș.a., *Geometria analitică și diferențială*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1962.
8. L. Sauer, *Proiectarea sculelor*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1967.
9. * * * *Scule așchietoare* (Standarde și comentarii). Biblioteca Standardizării, Seria tehnică A, nr. 84. București, Edit. tehnică, 1973.

EVALUAREA POSIBILITĂȚII DE PRELUNGIRE A DURATEI EFECTIVE DE SERVICIU, DINCOLO DE DURATA DE SERVICIU DE CALCUL LA SERPENTINELE DE REACȚIE ALE CUPTOARELOR TUBULARE TEHNOLOGICE PETROCHIMICE. II *

de A. PAVEL
Institutul de petrol și gaze Ploiești

Se elaborează criteriile privind aprecierea cantitativă a posibilității de prelungire a duratei de serviciu și prognozarea acestei prelungiri pentru tubulatura serpentinelor de reacție ale cuptoarelor tehnologice petrochimice proiectate pentru 100 000 h de serviciu efectiv sub sarcină.

4. PROGNOZAREA PRELUNGIRII DURATEI EFECTIVE DE SERVICIU DINCOLO DE DURATA DE SERVICIU DE CALCUL EGALĂ CU 100 000 h

În urma investigării unui număr corespunzător de documente normative și prescripții tehnice (API, ASME, ISCIR), standarde (ASTM, DIN, ISO, STAS), studii și alte lucrări de specialitate [10; 13—24] etc., pentru tubulaturile executate din oțeluri Cr/Mo de tip 2,25/1,00 ale serpentinelor de reacție din cuptoarele tehnologice petrochimice, au fost întocmite tabelele comparative privind:

— valorile normate (medii) ale rezistenței tehnice de durată $\sigma^t_{r\,100\,000\,me}$ pentru temperaturi ale metalului $t = 470...704$°C, respectiv $T = 743...977$K (tab. 3);

— valorile (medii) normate sau calculate (pentru $c_{d\,med} \geqslant 1{,}500$) ale rezistenței admisibile σ_a pentru $\tau_s = 100\,000$ h și pentru aceleași temperaturi ale metalului $t = 470...704$°C, respectiv $T = 743...977$K (tab. 4);

— valorile (medii) normate sau calculate ale coeficientului global de siguranță $c_{d\,med} \geqslant 1{,}500$ (tab. 5).

În tabelul 6 sînt centralizate *valorile minime* normate sau calculate ale rezistenței tehnice de durată $\sigma^t_{r/100\,000\,med}$ și cele ale rezistenței admisibile σ_a pentru $\tau_s = 100\,000$ h și temperaturi ale metalului $t = -29 ... ...649$°C, respectiv $T = 244...922$K, corespunzătoare tubulaturilor executate din oțeluri Cr/Mo de tip 2,25/1,00, valorile respective fiind extrase din tabelele 3 și 4. După cum rezultă din tabelul 6, cu o singură excepție

* Pentru notații și referiri bibliografice, a se vedea prima parte a lucrării.

Tabelul 3

Valorile normale ale rezistenţei tehnice de durată $\sigma^t_{r/100\,000\ med}$ corespunzătoare tubulaturilor executate din oţeluri Cr/Mo de tip 2,25/1,00 ale serpentinelor de reacţie din cuptoarele tehnologice petrochimice

Tabel comparativ

Marca oţelului	Standardul sau sursa de documentare	Rezistenţa tehnică de durată $\sigma^t_{r/100\,000\ med}$, în N/mm², la temperatura, în °C, de																														
		470	475	480	490	500	510	520	525	530	538	540	550	560	566	570	575	580	590	593	600	610	620	621	649	677	704
SA-213/A-213 Grade T 22	API, ASTM [15 ; 16]	—	—	—	—	—	—	—	—	—	95	—	—	—	69	—	—	—	—	52	—	—	—	36	25	16	10
SA-213/A-213 Grade T 22	ASME [13 ; 14]	—	—	149,9(?)	—	—	126	—	—	—	89,3	—	—	—	66,4	—	—	—	—	48,1	—	—	—	34,4	18,3	—	—
10CMo10	STAS 8184—68	207	—	186	165	147	128	112	—	98	—	85	73	63	—	55	—	49	43	—	39	35	32	—	—	—	—
10CrMo9.10	DIN 17175 [10 ; 19—23]	—	188	—	167	147(142)	128	—	102	98	—	—	73(65,7)	—	—	—	51	—	—	—	39	—	—	—	—	—	—
TS 34	ISO DIS 2605	—	—	—	153	—	122	—	—	93	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
SA-213/A-213 Grade T 22	ICEM [18]	—	—	—	128*	—	109*	—	—	86*	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—

* Aceste valori corespund rezistenţei tehnice de durată $\sigma^t_{r/20\,000}$ determinate pe epruvete prelevate din tubulatura rectilinie a serpentinelor de reacţie ale cuptoarelor tehnologice petrochimice de tip RC după o durată efectivă de serviciu (sub sarcină) egală cu 110 000 h. Cu aproximaţia respectivă, s-ar putea spune, deci, că aceste valori revin de fapt rezistenţei tehnice de durată $\sigma^t_{r/130\,000}$.

Tabelul 4

Valorile normate sau calculate ale rezistenței admisibile σ_a pentru τ_s = 100 000 h, corespunzătoare tubulaturilor executate din oțeluri Cr/Mo de tip 2,25/1,00 ale serpentinelor de reacție din cuptoarele tehnologice petrochimice

Tabel comparativ

| Marca oțelului | Sursa de documentare sau modul de calcul | Rezistența admisibilă σ_a, în N/mm², la temperatura, în °C, de | | |

Tabelul 5

Valorile normate sau calculate ale coeficientului global de siguranță $c_{d\ med}$ corespunzătoare tubulaturilor executate din oțeluri Cr/Mo de tip 2,25/1,00 ale serpentinelor de reacție din cuptoarele tehnologice petrochimice

Tabel comparativ

Marca oțelului	Sursele de referință	Coeficientul global de siguranță $c_{d\ med} = \frac{\overset{t}{\sigma}_{d\ med}}{\sigma_a} = \frac{\overset{t}{\sigma}_{r/100\,000\ med}}{\sigma_a}$	Observații
SA-213/A-213 Grade T 22 (API, ASTM)	[15; 16]	1,660...1,667	Calculat sau admis [10; 11; 24]
SA-213/A-213 Grade T 22 (ASME)	[13; 14]	1,660	Admis [10; 11; 24]
10CMo10	STAS 8184–68	1,500	Admis [10; 11; 17; 24]
10CrMo9.10	DIN 17175 [10; 19–24]	1,611...1,677	Calculat [24]
RS 34	ISO DIS 2605	1,600	Admis [11; 24]
SA-213/A-213 Grade T 22 (ICEM)	[18]	1,500	Admis [10; 11; 17; 24]

neconcludentă*, pentru toate celelalte cazuri avute în vedere corespunde :

$$c_d \geqslant 1{,}50,$$

respectiv (formula 12) :

$$c_\tau = c_d^N \geqslant c_d^4 = 1{,}50^{\,4} = 5{,}0625,$$

deci (formulele 20 și 23) :

$$\tau_r = c_\tau\ \tau_{calc} \geqslant 5{,}0625 \cdot 100\,000 = 506\,250\ \text{h};$$

$$\Delta\tau_s = \tau_r - \tau_{calc} \leqslant 506\,250 - 100\,000 = 406\,250\ h,$$

dacă se are în vedere că, pentru oțelurile Cr/Mo de tip 2,25/1,00 lucrînd sub sarcină la temperaturi $t \leqslant 704°C$, corespunde $N = 4{,}4 > 4{,}0$ (tabelele 1 și 2),

În cazul — dealtfel neconcludent — pentru care :

$$c_d = 1{,}35,$$

* Valoarea $\sigma^{550}_{r/100\,000\ med} = 65{,}7\ \text{N/mm}^2$, pentru care $c_{d\ med} = 1{,}35$, apare numai în lucrarea [23], ea nefiind menționată în normativele și standardele consultate.

Tabelul 6

Valorile minime normate sau calculate ale mărimilor $\sigma^t_{r/100\,000\ med}$, σ_a și $c_{a\ med}$, corespunzătoare tubulaturilor executate din oțeluri Cr/Mo de tip 2,25/1,00 ale serpentinelor de reacție din cuptoarele tehnologice petrochimice

Temperatura T sau t		$\sigma^t_{r/100\,000\ med}$, în N/mm²	σ_a, în N/mm²	$c_{a\ med} = \frac{\sigma^t_{r/100\,000\ med}}{\sigma_a}$
°C	K			
−29 ... 343	244 ... 616	—	103	—
371	644	—	103	—
399	672	—	103	—
427	700	—	103	—
454	727	—	99,3	—
470	743	207	138(?)	1,50
475	748	188	—	—
480	753	149,9(?)	90,3	1,66
490	763	153	95,6(?)	1.60
500	773	147(142)	91,2	1,61(1,56)
510	783	122	75,9	1,61
520	793	112	74,6	1,50
525	798	102	60,8	1,68
530	803	93	58,1	1,60
538	811	89,3	53,8	1,66
540	813	85	49	1,73
550	823	73(65,7)	48,6	1,50(1,35) (?)
560	833	63	42	1,50
566	839	66,4(?)	40	1,66
570	843	55	36,6	1,50
575	848	51	—	—
580	853	49	32,6	1,50
590	863	43	28,6	1,50
593	866	48,1(?)	29(?)	1,66
600	873	39	26	1,50
610	883	35	23,3	1,50
620	893	32	21,3	1,50
621	894	34,4(?)	20,7	1,66
649	922	18,3	11	1,66
677	950	16	—	—
704	977	10	—	—

se obține:

$$c_\tau \geqslant 1{,}35^{\,4} = 3{,}3215;$$

$$\tau_r \geqslant 3{,}3215 \cdot 100\,000 = 332\,150 \text{ h};$$

$$\Delta\tau_s \leqslant 332\,150 - 100\,000 = 232\,150 \text{ h}.$$

Așadar, pentru tubulaturile executate din oțeluri Cr/Mo de tip 2,25/1,00 ale serpentinelor de reacție din cuptoarele tehnologice petrochimice, care inițial au fost proiectate (calculate) pentru o durată de funcționare (serviciu) în condiții de fluaj $\tau_{calc} = \tau_s = 100\,000$ h și un coeficient de siguranță $c_d \geqslant 1{,}35$, rezultă o *apreciabilă disponibilitate* de durată efectivă de serviciu de cel puțin $\Delta\tau_s \leqslant 232\,150$ h atîta vreme cît coeficientul c_d îndeplinește condiția inițială ($c_d \geqslant 1{,}35$). De aici rezultă imediat că, în condițiile precizate, durata efectivă de serviciu *se poate prelungi* dincolo de durata de serviciu de calcul, egală cu 100 000 h, cu pînă la 230 000 h (pentru $c_d \geqslant 1{,}35$), fără a fi prejudiciată — din acest punct de vedere — securitatea tehnică a sistemelor (serpentinelor, cuptoarelor) tubulare și deci a instalațiilor tehnologice care intră sub incidența problematicii studiului de față.

Expresia generală de calcul cu ajutorul căreia se poate *prognoza* prelungirea duratei efective de serviciu dincolo de durata de serviciu de calcul va fi deci:

— în cazul cunoașterii duratei de serviciu de calcul $\tau_{calc} = \tau_s$:

$$\Delta\tau_s = \tau_{calc}\,(c_d^N - 1) = \tau_s\,(c_d^N - 1); \tag{32}$$

— în cazul cunoașterii duratei de distrugere prin fluaj τ_r:

$$\Delta\tau_s = \tau_r\,(1 - c_d^{-N}), \tag{33}$$

pentru $c_d = 1{,}00$, ceea ce înseamnă $\sigma_{max} = \sigma_d^t$, rezultînd — cum este firesc — $\Delta\tau_s = 0$.

Introducînd notația:

$$k_s = c_d^N - 1 = \left(\varphi\frac{\sigma_d^t}{\sigma_{max}}\right)^N - 1 = \left(\varphi\frac{\sigma_d^t}{\sigma_{as}}\right)^N - 1 = \left(\frac{\sigma_d^t}{\sigma_a}\right)^N - 1 \geqslant 0, \tag{34}$$

se obține

$$\Delta\tau_s = k_s\ \tau_{calc} = k_s\ \tau_s, \tag{35}$$

respectiv

$$\Delta\tau_s = k_r\ \tau_r, \tag{36}$$

unde

$$0 \leqslant k_r = 1 - c_d^{-N} = 1 - \left(\frac{\sigma_{max}}{\varphi\ \sigma_d^t}\right)^N = 1 - \left(\frac{\sigma_{as}}{\varphi\ \sigma_d^t}\right)^N = 1 - \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_d^t}\right)^N =$$

$$= \frac{k_s}{k_s + 1} < 1{,}0. \tag{37}$$

Valorile factorilor k_s și k_r sînt indicate în tabelele 7 și, respectiv, 8, pentru $c_d \in [1{,}0\,;\,1,\,7]$ și $N \in [4{,}0\,;\,10{,}0]$. Pentru aceleași intervale valorice ale mărimilor c_d și N, în tabelul 9 și figura 6 se indică durata efectivă de serviciu $\Delta\tau_s$ care se poate prelungi dincolo de durata de serviciu de

Tabelul 7

Valorile factorului k_S (formula 34)

t, în °C	N \ c_d	1,05	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70
—	4,0	0,2155	0,4641	1,0736	1,8561	2,8416	4,0625	5,5536	7,3521
704	4,4	0,2394	0,5209	1,2304	2,1721	3,3950	4,9539	6,9091	9,3270
—	4,5	0,2455	0,5355	1,2715	2,2564	3,5454	5,2002	7,2897	9,8898
—	5,0	0,2762	0,6105	1,4883	2,7129	4,3782	6,5937	9,4857	13,1985
677	5,2	0,2887	0,6415	1,5807	2,9129	4,7526	7,2352	10,5192	14,7882
—	5,5	0,3077	0,6891	1,7258	3,2333	5,3636	8,3004	12,2635	17,5126
649	5,9	0,3335	0,7547	1,9320	3,7018	6,2804	9,9380	15,0069	21,8901
—	6,0	0,3400	0,7715	1,9859	3,8268	6,5295	10,3906	15,7772	—
621	6,3	0,3598	0,8229	2,1538	4,2220	7,3292	11,8639	19,3177	—
—	6,5	0,3731	0,8580	2,2709	4,5034	7,9090	12,9506	—	—
—	7,0	0,4071	0,9487	2,5831	5,2748	9,5413	16,0859	—	—
593	7,2	0,4208	0,9862	2,7162	5,6129	10,2751	17,5292	—	—
566	7,5	0,4418	1,0438	2,9251	6,1544	11,4726	19,9259	—	—
—	8,0	0,4774	1,1435	3,2998	7,1573	13,7578	—	—	—
—	8,5	0,5139	1,2482	3,7102	8,3007	16,4617	—	—	—
538	8,8	0,5362	1,3134	3,9750	9,0623	18,3164	—	—	—
—	9,0	0,5513	1,3579	4,1597	9,6044	19,6610	—	—	—
—	9,5	0,5896	1,4730	4,6522	11,0909	—	—	—	—
—	10,0	0,6288	1,5937	5,1917	12,7858	—	—	—	—

Tabelul 8

Valorile factorului k_T (formula 37)

t, în °C	N \ c_d	1,05	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70
—	4,0	0,1772	0,3169	0,5177	0,6498	0,7396	0,8024	0,8474	0,8802
704	4,4	0,1931	0,3425	0,5516	0,6847	0,7724	0,8320	0,8735	0,9031
—	4,5	0,1971	0,3487	0,5597	0,6929	0,7799	0,8387	0,8793	0,9081
—	5,0	0,2164	0,3790	0,5981	0,7306	0,8140	0,8683	0,9046	0,9295
677	5,2	0,2240	0,3908	0,6125	0,7444	0,8261	0,8785	0,9131	0,9366
—	5,5	0,2353	0,4079	0,6331	0,7637	0,8428	0,8924	0,9246	0,9459
649	5,9	0,2501	0,4301	0,6589	0,7873	0,8626	0,9085	0,9375	0,9563
—	6,0	0,2537	0,4355	0,6651	0,7928	0,8671	0,9122	0,9403	—
621	6,3	0,2646	0,4514	0,6829	0,8085	0,8799	0,9222	0,9507	—
—	6,5	0,2717	0,4617	0,6942	0,8182	0,8877	0,9283	—	—
—	7,0	0,2893	0,4868	0,7209	0,8406	0,9051	0,9414	—	—
593	7,2	0,2962	0,4965	0,7309	0,8487	0,9113	0,9460	—	—
566	7,5	0,3064	0,5107	0,7452	0,8602	0,9198	0,9522	—	—
—	8,0	0,3231	0,5334	0,7674	0,8774	0,9322	—	—	—
—	8,5	0,3394	0,5552	0,7876	0,8924	0,9427	—	—	—
538	8,8	0,3490	0,5677	0,7989	0,9006	0,9482	—	—	—
—	9,0	0,3553	0,5759	0,8061	0,9057	0,9515	—	—	—
—	9,5	0,3709	0,5956	0,8230	0,9172	—	—	—	—
—	10,0	0,3860	0,6144	0,8384	0,9274	—	—	—	—

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848

Tabelul 9

Durata efectivă de serviciu $\Delta\tau_s$ care se poate prelungi dincolo de durata de serviciu de calcul egală cu 100 000 h

t, în °C	N \ c_d	1,05	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70
—	4,0	21 550	46 410	107 360	185 610	284 160			
704	4,4	23 940	52 090	123 040	217 210				
—	4,5	24 550	53 550	127 150	225 640				
—	5,0	27 620	61 050	148 830	271 290				
677	5,2	28 870	64 150	158 070	291 290				
—	5,5	30 770	68 910	172 580					
649	5,9	33 350	75 470	193 200					
—	6,0	34 000	77 150	198 590					
621	6,3	35 980	82 290	215 380					
—	6,5	37 310	85 800	227 090		Peste	Peste	Peste	Peste
—	7,0	40 710	94 870	258 310		300 000	300 000	300 000	300 000
593	7,2	42 080	98 620	271 620	Peste				
566	7,5	44 180	104 380	292 510	300 000				
—	8,0	47 740	114 350						
—	8,5	51 390	124 820						
538	8,8	53 620	131 340	Peste					
—	9,0	55 130	135 790	300 000					
—	9,5	58 960	147 300						
—	10,0	62 880	159 370						

calcul egală cu 100 000 h, iar în tabelul 10 se prezintă durata efectivă de distrugere prin fluaj corespunzătoare de asemenea duratei de serviciu de calcul egale cu 100 000 h. Din formulele (35) — (37) se va observa că

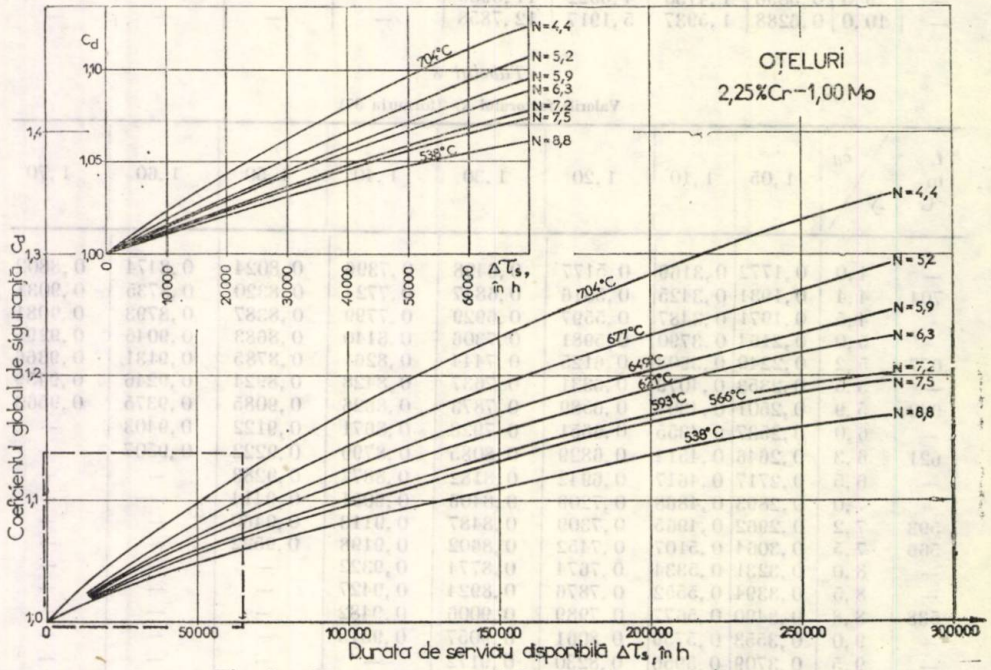


Fig. 6 — Nomograma corelării minimilor c_d și $\Delta\tau_s$.

Tabelul 10

Durata efectivă de distrugere prin fluaj corespunzătoare unei durate de serviciu de calcul egale cu 100 000 h

t, în °C	c_s / N	1,05	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70
—	4,0	121 613	146 449	207 378	285 641	384 207			
704	4,4	123 977	152 087	223 060	317 233				
—	4,5	124 556	153 570	227 175	325 645				
—	5,0	127 634	161 081	248 837	371 324				
677	5,2	128 883	164 150	258 073	391 308				
—	5,5	130 769	168 938	272 595					
649	5,9	133 346	175 470	293 215					
—	6,0	134 016	177 152	298 586			Peste	Peste	Peste
621	6,3	135 978	182 299	315 390			506 000	655 000	835 000
—	6,5	137 320	185 834	327 124		Peste			
—	7,0	140 718	194 884	358 315		439 000			
593	7,2	142 066	198 630	371 624	Peste				
566	7,5	144 190	204 386	392 525	423 000				
—	8,0	147 756	214 379						
—	8,5	151 414	224 819						
538	8,8	153 638	231 354	Peste					
—	9,0	155 164	235 787	429 000					
—	9,5	158 964	247 313						
—	10,0	162 901	259 391						

(pentru $\tau_{calc} = \tau_s$):

$$\tau_r = \frac{k_s}{k_r}\tau_s = (k_s+1)\tau_s = c_d^N \tau_s = \left(\varphi \frac{\sigma_d^t}{\sigma_{max}}\right)^N \tau_s =$$

$$= \left(\varphi \frac{\sigma_d^t}{\sigma_{as}}\right)^N \tau_s = \left(\frac{\sigma_d^t}{\sigma_a}\right)^N \tau_s, \qquad (38)$$

respectiv

$$\tau_{calc} = \tau_s = \frac{k_r}{k_s}\tau_r = \frac{\tau_r}{k_s+1} = c_d^{-N}\tau_r =$$

$$= \left(\frac{\sigma_{max}}{\varphi\ \sigma_d^t}\right)^N \tau_r = \left(\frac{\sigma_{as}}{\varphi\ \sigma_d^t}\right)^N \tau_r = \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_d^t}\right)^N \tau_r . \qquad (39)$$

Avîndu-se în vedere că durata efectivă (convențională) de serviciu *anuală*, este egală cu 8 000 h/an, din datele prezentate în tabelele 9 și 10, de asemenea în figura 6, rezultă că :

— pentru perechile de mărimi $c_d \geqslant 1{,}5$ și $N \geqslant 4{,}0$, $c_d \geqslant 1{,}40$ și $N \geqslant 4{,}4$ (pentru care $t \leqslant 704°C$), $c_d \geqslant 1{,}30$ și $N \geqslant 5{,}5$ (pentru care $t \leqslant 677°C$), respectiv $c_d \geqslant 1{,}20$ și $N \geqslant 8{,}0$ (pentru care $t \leqslant 566°C$), întrucît $\Delta\tau_s > 300\,000\ h = 300\,000/8\,000 = 37{,}5$ ani, în mod practic, prelungirea duratei efective de serviciu dincolo de durata de serviciu de calcul egală cu

100 000 h se poate face, fără precauții deosebite, pînă la scadențele de casare;

— pentru perechile de mărimi $c_d = 1{,}40$ și $N = 4{,}0$, $c_d > 1{,}30$ și $N > 4{,}4$ (pentru care $t \leqslant 704°C$), respectiv $c_d > 1{,}20$ și $N > 6{,}0$ (pentru care $t < 621°C$), întrucît $\Delta\tau_s > 200\,000$ h $= 200\,000/8\,000 = 25{,}0$ ani, prelungirea duratei efective de serviciu dincolo de durata de serviciu de calcul egală cu 100 000 h de asemenea se poate face, tot fără precauții deosebite, pînă la scadențele de casare;

— pentru perechile de mărimi $c_d = 1{,}30$ și $N = 4{,}0$, $c_d > 1{,}20$ și $N > 4{,}0$, respectiv $c_d > 1{,}10$ și $N > 7{,}2$ (pentru care $t < 593°C$), prelungirea respectivă depășește valoarea $\Delta\tau_s = 100\,000$ h $= 100\,000/8\,000 = 12{,}5$ ani, în mod practic putîndu-se, deci, dubla durata efectivă de serviciu ($2 \times 100\,000$ h) fără precauții deosebite din punctul de vedere al fluajului;

— pentru oricare valoare $c_d > 1{,}05$ și $N > 4{,}0$, prelungirea duratei efective de serviciu dincolo de durata de serviciu de calcul egală cu 100 000 h se poate realiza — fără precauții deosebite din punctul de vedere al fluajului și în mod corespunzător — cu cel puțin $\Delta\tau_s > 21\,550$ h,

toate aceste concluzii fiind aplicabile pentru $\tau_s > \tau_{calc} = 100\,000$ h atîta vreme cît legea $\tau_r(\sigma_d^t)^N = C$ își menținea valabilitatea.

5. REZISTENȚA TEHNICĂ DE DURATĂ CORESPUNZĂTOARE DURATEI EFECTIVE DE SERVICIU PRELUNGITE DINCOLO DE DURATA DE SERVICIU DE CALCUL EGALĂ CU 100 000 h

Cunoscîndu-se durata de distrugere prin fluaj de referință $\tau_{r\,ref}$, egală cu durata de serviciu de calcul $\tau_s = \tau_{calc} = 100\,000$ h și rezistența tehnică de durată corespunzătoare acesteia $\sigma^t_{r/100\,000\,med}$, pentru același material, în baza ecuației fundamentale $\tau_r(\sigma_d^t)^N = C$, se poate scrie egalitatea:

$$\tau_{r\,ref}\,(\sigma^t_{r/100\,000\,med})^N = \tau_r(\sigma^t_{r/\tau_r med})^N, \tag{40}$$

de unde rezultă următoarea expresie de calcul pentru rezistența tehnică de durată $\sigma^t_{r/\tau_r\,med}$, corespunzătoare duratei (în h) de distrugere prin fluaj $\tau_r > \tau_{r\,ref} = 100\,000$ h:

$$\sigma^t_{r/\tau_r\,med} = \left(\frac{\tau_{r\,ref}}{\tau_r}\right)^{\frac{1}{N}} \sigma^t_{r/100\,000\,med} =$$

$$= \left(\frac{100\,000}{\tau_r}\right)^{\frac{1}{N}} \sigma^t_{r/100\,000\,med}\,. \tag{41}$$

Valorile calculate cu formula (41) ale rezistenței tehnice de durată $\sigma^t_{r/\tau_r\,\mathrm{med}}$ pentru $\tau_r \in [100\,000\,;\ 500\,000]$ h, corespunzătoare tubulaturilor executate din oțeluri Cr/Mo de tip SA-213/A-213 Grade *T* 22 ale serpentinelor de reacție din cuptoarele tehnologice petrochimice, sînt date în

tabelul 11. Valorile calculate convențional *minime* ale aceleiași rezistențe tehnice de durată, corespunzătoare tubulaturilor executate din oțeluri Cr/Mo de tip 2,25/1,00 ale serpentinelor de reacție din cuptoarele tehnologice petrochimice, sînt date în tabelul 12. Rezultă :

— din [18], respectiv din tabelul 3 (valoarea experimentală ICEM) :

$$\sigma^{530}_{r/130\,000} = 86{,}00 \text{ N/mm}^2;$$

— din tabelul 11 (valoarea calculată prin extrapolare) :

$$\sigma^{538}_{r/130\,000} = 92{,}20 \text{ N/mm}^2;$$

— din tabelul 12 (valoare, convențional minimă, calculată) :

$$\sigma^{538}_{r/130\,050} = 86{,}67 \text{ N/mm}^2,$$

Tabelul 11

Valorile calculate ale rezistenței tehnice de durată $\sigma^t_{r/\tau_r med}$ pentru $\tau_r \in$ [100 000 ; 500 000] h, corespunzătoare tubulaturilor executate din oțeluri Cr/Mo de tip SA-213/A-213 Grade T 22 ale serpentinelor de reacție din cuptoarele tehnologice petrochimice

τ_r, în h \ t, în °C / N	538	566	593	621	649	677	704
	8,8	7,5	7,2	6,3	5,9	5,2	4,4
100 000	95,00*	69,00*	52,00*	36,00*	25,00*	16,00*	10,00*
110 000	93,97	68,12	51,31	35,45	24,59	15,70	9,78
120 000	93,05	67,34	50,69	34,97	24,23	15,44	9,59
130 000	92,20	66,62	50,13	34,53	23,91	15,21	9,42
140 000	91,43	65,97	49,62	34,12	23,61	14,99	9,26
150 000	90,72	65,36	49,15	33,75	23,33	14,79	9,11
160 000	90,05	64,80	48,71	33,41	23,08	14,61	8,98
170 000	89,44	64,28	48,30	33,09	22,84	14,44	8,86
180 000	88,86	63,79	47,92	32,79	22,62	14,28	8,74
190 000	88,31	63,34	47,56	32,51	22,42	14,14	8,64
200 000	87,80	62,90	47,22	32,24	22,22	14,00	8,54
210 000	87,31	62,50	46,90	32,00	22,04	13,87	8,44
220 000	86,85	62,11	46,60	31,76	21,87	13,74	8,35
230 000	86,42	61,74	46,31	31,54	21,70	13,63	8,27
240 000	86,00	61,39	46,04	31,32	21,55	13,52	8,19
250 000	85,60	61,06	45,78	31,12	21,40	13,41	8,12
300 000	83,85	59,59	44,64	30,23	20,75	12,95	7,79
350 000	82,39	58,38	43,69	29,50	20,21	12,57	7,52
400 000	81,15	57,35	42,89	28,88	19,76	12,25	7,29
450 000	80,07	56,46	42,19	28,35	19,37	11,98	7,10
500 000	79,12	55,67	41,58	27,88	19,03	11,74	6,93

* Aceste valori de referință $\sigma^t_{r/100\,000\,med}$ au rezultat din monograma redată în figura 3 din lucrarea [6].

toate aceste valori fiind *comparabile* din punctul de vedere al preciziei calculelor practice.

În tabelele 13 și 14 sînt indicate valorile calculate (tab. 13) și valorile convențional minime calculate (tab. 14) ale rezistenței admisibile σ_a pentru $c_{a\,med} = 1{,}50$ și $\tau_r \in [100\,000 ; 500\,000]$h, corespunzătoare tubulaturilor executate din oțeluri Cr/Mo de tip SA-213/A-213 Grade T 22 (tab. 13) și, respectiv, de tip 2,25/1,00 (tab. 14), ale serpentinelor de reacție

Tabelul 12

Valorile calculate minime ale rezistenței tehnice de durată $\sigma^t_{r/\tau_r med}$ pentru $\tau_r \in [100\,000 ; 500\,000]$ h, corespunzătoare țubulaturilor executate din oțeluri Cr/Mo de tip 2,25/1,00 ale serpentinelor de reacție din cuptoarele tehnologice petrochimice

t, în °C / τ_r, în h — N	538	566	593	621	649	677	704
	8,8	7,5	7,2	6,3	5,9	5,2	4,4
100 000	89,30*	66,40*	48,10*	34,40*	18,30*	16,00	10,00
110 000	88,33	65,56	47,46	33,88	18,00	15,70	9,78
120 000	87,46	64,80	46,89	33,41	17,74	15,44	9,59
130 000	86,67	64,11	46,37	32,99	17,50	15,21	9,42
140 000	85,95	63,48	45,90	32,61	17,28	14,99	9,26
150 000	85,27	62,90	45,46	32,25	17,08	14,79	9,11
160 000	84,65	62,36	45,06	31,92	16,89	14,61	8,98
170 000	84,07	61,86	44,68	31,62	16,72	14,44	8,86
180 000	83,53	61,39	44,32	31,33	16,56	14,28	8,74
190 000	83,01	60,95	43,99	31,06	16,41	14,14	8,64
200 000	82,53	60,53	43,68	30,81	16,27	14,00	8,54
210 000	82,07	60,14	43,39	30,57	16,13	13,87	8,44
220 000	81,64	59,77	43,11	30,35	16,01	13,74	8,35
230 000	81,23	59,42	42,84	30,13	15,89	13,63	8,27
240 000	80,84	59,08	42,59	29,93	15,77	13,52	8,19
250 000	80,46	58,76	42,35	29,74	15,66	13,41	8,12
300 000	78,81	57,35	41,29	28,89	15,19	12,95	7,79
350 000	77,45	56,18	40,41	28,19	14,79	12,57	7,52
400 000	76,28	55,19	39,67	27,60	14,46	12,25	7,29
450 000	75,27	54,33	39,03	27,09	14,18	11,98	7,10
500 000	74,37	53,57	38,46	26,64	13,93	11,74	6,93

* Aceste valori de referință $\sigma^t_{r/100\,000\,med}$ au rezultat din tabelul 6.

Tabelul 13

Valorile calculate ale rezistenței admisibile σ_a pentru $c_{d\,med} = 1{,}50$ și $\tau_r \in [100\,000 ; 500\,000]$ h, corespunzătoare tubulaturilor executate din oțeluri Cr/Mo de tip SA-213/A-213 Grade T 22 ale serpentinelor de reacție din cuptoarele tehnologice petrochimice

t, în °C / τ_r, în h — N	538	566	593	621	649	677	704
	8,8	7,5	7,2	6,3	5,9	5,2	4,4
100 000	63,33	46,00	34,66	24,00	16,66	10,66	6,66
110 000	62,64	45,41	34,20	23,63	16,39	10,46	6,52
120 000	62,03	44,89	33,79	23,31	16,15	10,29	6,39
130 000	61,46	44,41	33,42	23,02	15,94	10,14	6,28
140 000	60,95	43,98	33,08	22,74	15,74	9,99	6,17
150 000	60,48	43,57	32,76	22,50	15,55	9,86	6,07
160 000	60,03	43,20	32,47	22,27	15,38	9,74	5,98
170 000	59,62	42,85	32,20	22,06	15,22	9,62	5,90
180 000	59,24	42,52	31,94	21,86	15,08	9,52	5,82
190 000	58,87	42,22	31,70	21,67	14,94	9,42	5,76
200 000	58,53	41,93	31,48	21,49	14,81	9,33	5,69
210 000	58,20	41,66	31,26	21,33	14,69	9,24	5,62
220 000	57,90	41,40	31,06	21,17	14,58	9,16	5,56
230 000	57,61	41,16	30,87	21,02	14,46	9,08	5,51
240 000	57,33	40,92	30,69	20,88	14,36	9,01	5,46
250 000	57,06	40,70	30,52	20,74	14,26	8,94	5,41
300 000	55,90	39,72	29,76	20,15	13,83	8,63	5,19
350 000	54,92	38,92	29,12	19,66	13,47	8,38	5,01
400 000	54,10	38,23	28,59	19,25	13,17	8,16	4,86
450 000	54,38	37,64	28,12	18,90	12,91	7,98	4,73
500 000	52,74	37,11	27,72	18,58	12,68	7,82	4,62

Tabelul 14

Valorile calculate minime ale rezistenței admisibile σ_a pentru $c_{d\ med} = 1{,}50$ și τ_r [100 000; 500 000] h, corespunzătoare tubulaturilor executate din oțeluri Cr/Mo de tip 2,25/1,00 ale serpentinelor de reacție din cuptoarele tehnologice petrochimice

τ_r, în h \ t, în °C / N	538	566	593	621	649	677	704
	8,8	5,7	7,2	6,3	5,9	5,2	4,4
100 000	59,53	44,26	32,06	22,93	12,20	10,66	6,66
110 000	58,88	43,70	31,64	22,58	12,00	10,46	6,52
120 000	58,30	43,20	31,26	22,27	11,82	10,29	6,39
130 000	57,78	42,74	30,91	21,99	11,66	10,14	6,28
140 000	57,30	42,32	30,60	21,74	11,52	9,99	6,17
150 000	56,84	41,93	30,30	21,50	11,38	9,86	6,07
160 000	56,43	41,57	30,04	21,28	11,26	9,74	5,98
170 000	56,04	41,24	29,78	21,08	11,14	9,62	5,90
180 000	55,68	40,92	29,54	20,88	11,04	9,52	5,82
190 000	55,34	40,63	29,32	20,70	10,94	9,42	5,76
200 000	55,02	40,35	29,12	20,54	10,84	9,33	5,69
210 000	54,71	40,09	28,92	20,38	10,75	9,24	5,62
220 000	54,42	39,84	28,74	20,23	10,67	9,16	5,56
230 000	54,15	39,61	28,56	20,08	10,59	9,08	5,51
240 000	53,89	39,38	28,39	19,95	10,51	9,01	5,46
250 000	53,64	39,17	28,23	19,82	10,44	8,94	5,41
300 000	52,54	38,23	27,52	19,26	10,12	8,63	5,19
350 000	51,63	37,45	26,94	18,79	9,86	8,38	5,01
400 000	50,85	36,79	26,44	18,40	9,64	8,16	4,86
450 000	50,18	36,22	26,02	18,06	9,45	7,98	4,73
500 000	49,58	35,71	25,64	17,76	9,28	7,82	4,62

Tabelul 15

Diminuarea în timp a valorilor rezistenței tehnice de durată $\sigma^t_{r/\tau_r\ med}$, respectiv a valorilor rezistenței admisibile σ_a (pentru $c_{d\ med}$ = const.) sau a valorilor coeficientului de siguranță $c_{d\ med}$ (pentru σ_a = const.), pentru $\tau_r \in$ [100 000; 500 000] h, corespunzătoare tubulaturilor executate din oțeluri Cr/Mo de tip SA-213/A-213 Grade T 22, respectiv de tip 2,25/1,00, ale serpentinelor de reacție din cuptoarele tehnologice petrochimice

τ_r, în h \ t, în °C / N	538	566	593	621	649	677	704
	8,8	7,5	7,2	6,3	5,9	5,2	4,4
100 000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
110 000	0,989	0,987	0,986	0,984	0,983	0,981	0,978
120 000	0,979	0,975	0,974	0,971	0,969	0,965	0,959
130 000	0,970	0,965	0,964	0,959	0,956	0,950	0,942
140 000	0,962	0,956	0,954	0,947	0,944	0,936	0,926
150 000	0,954	0,947	0,945	0,937	0,933	0,924	0,911
160 000	0,947	0,939	0,936	0,928	0,923	0,913	0,898
170 000	0,941	0,931	0,928	0,918	0,913	0,902	0,886
180 000	0,935	0,924	0,921	0,910	0,904	0,892	0,874
190 000	0,929	0,917	0,914	0,903	0,896	0,883	0,864
200 000	0,924	0,911	0,908	0,895	0,888	0,875	0,854
210 000	0,919	0,905	0,901	0,888	0,881	0,866	0,844
220 000	0,914	0,900	0,896	0,882	0,874	0,858	0,835
230 000	0,909	0,894	0,890	0,876	0,868	0,851	0,827
240 000	0,905	0,889	0,885	0,870	0,862	0,845	0,819
250 000	0,901	0,884	0,880	0,864	0,856	0,838	0,812
300 000	0,882	0,863	0,858	0,839	0,830	0,809	0,779
350 000	0,867	0,846	0,840	0,819	0,808	0,785	0,752
400 000	0,854	0,831	0,824	0,802	0,790	0,765	0,729
450 000	0,842	0,818	0,811	0,787	0,774	0,748	0,710
500 000	0,832	0,806	0,799	0,774	0,761	0,733	0,693

din cuptoarele tehnologice petrochimice. Din tabelele 13—15 rezultă următoarea diminuare în timp a valorilor rezistenței tehnice de durată $\sigma^t_{r/\tau_r\,med}$, respectiv a valorilor rezistenței admisibile σ_a(pentru $c_{d\,med}$ = = const. în timp) sau a valorilor coeficientului de siguranță $c_{d\,med}$ (pentru σ_a = const. în timp), pentru $\tau_r \in [100\,000 ; 500\,000]$ h, corespunzătoare tubulaturilor executate din oțeluri Cr/Mo de tip SA-213/A-213 Grade *T* 22, respectiv de tip 2,25/1,00, ale serpentinelor de reacție din cuptoarele tehnologice petrochimice:

— în cazurile cînd $\tau_r \leqslant 200\,000$ h :

t, în °C	538	566	593	621	649	677	704
N	8,8	7,5	7,2	6,3	5,9	5,2	4,4
Diminuarea în timp, în %, max.	7,6	8,9	9,2	10,5	11,2	12,5	14,6

— în cazurile cînd $\tau_r \leqslant 300\,000$ h :

t, în °C	538	566	593	621	649	677	704
N	8,8	7,5	7,2	6,3	5,9	5,2	4,4
Diminuarea în timp, în %, max.	11,8	13,7	14,2	16,1	17,0	19,1	22,1

— în cazurile cînd $\tau_r \leqslant 500\,000$h :

t, în °C	538	566	593	621	649	677	704
N	8,8	7,5	7,2	6,3	5,9	5,2	4,4
Diminuarea în timp, în %, max.	16,8	19,4	20,1	22,6	23,9	26,7	30,7

— așadar, pentru $t \leqslant 704$°C, respectiv $N \geqslant 4{,}4$, în intervalul $\tau_r \in [100\,000 ; 5000\,000]$ h, diminuarea despre care se discută, datorită fluajului, poate atinge max. 14,6 % pentru $\tau_r = 200\,000$ h, max. 22,1 % pentru $\tau_r = 300\,000$ h și max. 30,7 % pentru $\tau_r = 500\,000$ h, bineînțeles, în condițiile valabilității legii fundamentale citate anterior;

— în cazurile cînd $t \leqslant 704$°C, respectiv $N \geqslant 4{,}4$:

τ_r, în 10^4 h	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Diminuarea în timp, în %, max.	1,11	2,04	2,88	3,74	4,50	5,17	5,84	6,52	6,99	7,57

τ_r, în 10^4 h	21	22	23	24	25	30	35	40	45	50
Diminuarea în timp, în %, max.	8,16	8,64	9,02	9,50	9,87	11,67	13,26	14,63	15,67	16,70

— așadar, pentru $t \leqslant 704°C$, respectiv $N \geqslant 4{,}4$, în intervalul $\tau_r \in$ $\in [100\,000 ; 500\,000]$ h, diminuarea despre care se discută, datorită influenței temperaturii, poate atinge max. 7,57 % pentru $\tau_r = 200\,000$ h, max. 11,67 % pentru $\tau_r = 300\,000$ h și max. 16,70 % pentru $\tau_r = 500\,000$ h, bineînțeles, în condițiile valabilității și de această dată a legii fundamentale cunoscute.

Se poate conchide, deci, că acceptarea unei diminuări în timp cu circa 30 % a valorii mărimilor $\sigma^t_{r/\tau r\ med}$, σ_a sau $c_{d\ med}$, datorită influenței fluajului și temperaturii, acoperă intregul interval de interes practic al valorilor uzuale τ_r și, respectiv, τ_s, în calculele mecanice de proiectare sau de verificare a tubulaturilor serpentinelor de reacție din cuptoarele tehnologice petrochimice urmînd să se considere următoarele *valori minime de calcul*:

$$\sigma^t_{r/\tau r\ calc} = 0{,}7\ \sigma^t_{r/\ 100\ 000 t\ med}; \tag{42}$$

$$\sigma_{a\ calc} = 0{,}7\ \sigma_a = 0{,}7\ \frac{\sigma^t_{r/\ 100\ 000\ med}}{c_{d\ med}} \tag{43}$$

pentru $c_{d\ med}$ considerat *constant* în timp și

$$c_{d\ calc} = 0{,}7\ c_{d\ med} = 0{,}7\ \frac{\sigma^t_{r/\ 100\ 000\ med}}{\sigma_a} \tag{44}$$

pentru σ_a considerat *constant* în timp, *indiferent de valoarea maximă a duratei efective de serviciu* $\tau_s = \tau_{s\ max}$.

Așadar, dacă este îndeplinită condiția de rezistență formulată pentru cazul general astfel:

$$\sigma_{max} \leqslant \sigma_{as\ calc} = \varphi\ \sigma_{a\ calc} =$$

$$= 0{,}7\ \varphi\ \sigma_a = 0{,}7\ \varphi\ \frac{\sigma^t_{r/\ 100\ 000\ med}}{c_{d\ med}}, \tag{45}$$

respectiv, pentru $\varphi = 1{,}00$ și $c_{d\ med} = 1{,}5$:

$$\sigma_{max} \leqslant 0{,}466\ \sigma^t_{r/\ 100\ 000\ med}, \tag{46}$$

atunci durata efectivă de serviciu *se poate prelungi din oficiu, practic nelimitat și fără precauții deosebite din punctul de vedere al fluajului, dincolo de durata de serviciu de calcul egală cu 100 000 h.*

6. APLICAȚII NUMERICE

Exemplul 1. Pentru tubulatura serpentinei de reacție a unui cuptor tehnologic *RC*, executată din oțel Cr/Mo de tip 2,25/1,00, se cunosc următoarele date : $\sigma_d^t = \sigma^{593}_{r/100\,000\,med} =$ $= 53{,}44$ N/mm^2 ; $\sigma_a = 29{,}00$ N/mm^2 și $N = 7{,}2$. Se cere să se prognozeze disponibilitatea privind prelungirea duratei efective de serviciu dincolo de durata de serviciu de calcul egală cu $\tau_{calc} = \tau_s = 100\,000$ h.

Rezolvare

Pentru

$$c_{d\ med} = \frac{\sigma^{593}_{r/100\,000\ med}}{\sigma_a} = \frac{53{,}44}{29{,}00} = 1{,}842,$$

corespunde (vezi formula 34)

$$k_s = c^N_{d\ med} - 1 = 1{,}842^{7{,}2} - 1 = 80{,}54$$

și rezultă

$$\Delta\tau_s = k_s\ \tau_s = 80{,}54 \cdot 100\,000 = 8{,}054 \cdot 10^6 \text{ h},$$

deci

$$\tau_r = c^N_d\ \tau_s = 1{,}842^{7{,}2} \cdot 100\,000 = 8{,}154 \cdot 10^6 \text{ h},$$

eea ce înseamnă că, practic, durata efectivă de serviciu se poate prelungi *nelimitat și nerestrictiv* din punctul de vedere al fluajului, dincolo de durata de serviciu de calcul egală cu 100 000 h, dacă se îndeplinește condiția de rezistență $\sigma_{max} \leqslant \sigma_{as} = \varphi\,\sigma_a$. De altfel, în acest din urmă caz tot calculul efectuat devine superfluu, dacă se îndeplinește condiția (45), conform căreia (pentru $\varphi = 1{,}00$) :

$$\sigma_{max} \leqslant 0{,}7\ \varphi\ \frac{\sigma^{593}_{r/100\,000\ med}}{c_{d\ med}} = 0{,}7 \cdot 1 \cdot \frac{53{,}44}{1{,}842} = 20{,}3 \text{ N/mm}^2.$$

Exemplul 2. În condițiile exemplului de calcul 1, considerîndu-se $\sigma_a = 42{,}75$ N/mm^2 să se prognozeze disponibilitatea privind prelungirea duratei efective de serviciu dincolo de durata de serviciu de calcul egală cu $\tau_{calc} = \tau_s = 100\,000$ h.

Rezolvare

Pentru

$$c_{d\ med} = \frac{\sigma^{593}_{r/100\,000 med}}{\sigma_a} = \frac{53{,}44}{42{,}75} = 1{,}25,$$

corespunde (vezi formula 34) :

$$k_s = c^N_{d\ med} - 1 = 1{,}257^{2} - 1, = 3,\ 98767$$

și rezultă

$$\Delta\,\tau_s = k_s\ \tau_s = 3{,}98767 \cdot 100\,000 = 398\,767 \text{ h} = 49{,}84 \text{ ani},$$

deci

$\tau_r = c^N_d\ \tau_s = 1{,}257^{2} \cdot 100\,000 = 498\,767$ h $= 62{,}34$ ani

concluziile formulate pentru, exemplul de calcul 1 rămînînd valabile și în acest caz, dacă se îndeplinește condiția (45), conform căreia (pentru $\varphi = 1{,}00$) :

$$\sigma_{max} \leqslant 0{,}7 \cdot 1 \cdot \frac{53{,}44}{1{,}25} = 29{,}92 \text{ N/mm}^2.$$

Exemplul 3. În condițiile exemplului de calcul 1, considerîndu-se $c_{d\ med}=1{,}05$, să se prognozeze disponibilitatea privind prelungirea duratei efective de serviciu dincolo de durata de serviciu de calcul egală cu $\tau_{calc} = \tau_s = 100\,000$ h.

Rezolvare

Pentru $c_{d\ med} = 1{,}05$ corespunde (vezi formula 34):

$$k_s = c_{d\ med}^{N} - 1 = 1{,}05^{7{,}2} - 1 = 0{,}42$$

și rezultă

$$\Delta\,\tau_s = k_s\,\tau_s = 0{,}42 \cdot 100\,000 = 42\,000 \text{ h} = 5{,}25 \text{ ani},$$

deci

$$\tau_r = c_d^N\ \tau_s = 1{,}05^{7{,}2} \cdot 100\,000 = 142\,000 \text{ h} = 17{,}76 \text{ ani}.$$

Primită la redacție la 27 iulie 1979

RECENZII

LUCRĂRILE CELEI DE-A VI-A CONFERINȚE DE MAȘINI HIDRAULICE (Budapesta, Septembrie 1979) Editori: L.Kisbocskoi și A. Szabó

Conferințele internaționale de la Budapesta în domeniul hidrodinamicii și mașinilor hidraulice au devenit tradiționale, ele constituie un prestigios for de dezbatere a celor mai noi rezultate în acest domeniu. Cele două volume ale recentei conferințe cuprind 139 lucrări prezentate de specialiști din 21 de țări, printre care și România. Tematica se referă la curgerea ideală și reală în mașini și sisteme conexe, fiind prezentate, printre altele, modele teoretice bi- și tridimensionale ale rețelelor de profile, caracteristici teoretice, cavitația și efectele ei, probleme de strat limită, fenomene tranzitorii ș.a. O parte importantă a materialului oferă detalii cu privire la proiectarea, construcția și funcționarea turbomașinilor. Diversele aspecte ale hidrodinamicii teoretice și aplicate, amintite mai sus, sînt tratate într-un număr de 36 de lucrări semnate de autori binecunoscuți : A. J. Acosta (S.U.A.), O. Füzy (R.P.U.), P. Fleischner (R.S.C.), K. Varsamov (R.P.B.), E. S. Burka (R.P.P.), ș.a.

Fenomenul de cavitație, care și la conferințele precedente a fost subiectul unor dezbateri deosebit de interesante, a fost abordat în 26 de lucrări, care au adus multe elemente noi și contribuții reale la cunoașterea mai aprofundată a acestui efect controversat. Printre autori sînt : S. P. Kozirev, K. K. Shalnev și M. K. Bologa (U.R.S.S.), P. Courbiere (Franța), S. P. Hutton (Anglia), J. Noskievic (R.S.C.), J. Osterwalder (R.F.G.), U. Pighini (Italia), Gy. Sebestyén (R.P.U.), K. Steller (R.P.P.).

Un număr mare de lucrări se ocupă de proiectarea, construcția și funcționarea pompelor (25), ventilatoarelor și compresoarelor (19) și a turbinelor (9). Ele oferă detalii foarte utile proiectanților și celor care se ocupă de exploatarea turbomașinilor. În mod deosebit trebuie remarcată contribuția unor autori ca G. Grabow (R.F.G.), G. Demarée (Franța), J. Blaha (R.S.C.), N. Blahó, Cs. Fáy, Z. Vajna, A. Verba, A. Szabó (R.P.U.).

Celelalte lucrări se referă la diverse probleme mai speciale din domeniul tehnicilor de măsurare, al curgerilor bifazice, al curgerii în conducte etc.

Lucrările cercetătorilor români se ocupă de eroziunea abrazivă în pompe speciale (Gh. Băran, C. Banu), de fenomene tranzitorii în stații de pompare (E. C. Isbășoiu, V. N. Nistireanu), de ecuația generalizată a lui Euler pentru turbomașini (O. Popa), de magnetodinamica ferofluidelor (I. Anton, L. Vékás, I. Potencz, E. Suciu) și de determinarea pierderilor în paletajele turbinelor (V. Pimsner și N. Băran).

Volumele conferinței editate de Editura Academiei R.P.U. într-un timp record și în condiții grafice deosebite, oferă tuturor specialiștilor în domeniul mașinilor hidraulice un bogat material documentar, o trecere în revistă a ultimelor rezultate obținute pe plan mondial.

Acad. *Ioan Anton*

Constantin Avram, Alexandru Pop, Iosif Deutsch, Andrei Weisz Birnholz, PROIECTAREA ECONOMICĂ A ELEMENTELOR DE CONSTRUCȚII DIN BETON ARMAT. Timișoara, Edit. Facla, 1979, 385 p., cu fig., abace și tab.

Cartea reprezintă un ghid practic pentru proiectarea economică a elementelor de construcții din beton armat, pe baza normelor semiprobabiliste de calcul la stări limită — STAS 10102-75 și STAS 10107/6—76.

Folosind o documentare largă și cercetările proprii ale colectivului de autori, lucrarea se distinge prin conceptele moderne de proiectare pe care le prezintă, prin criteriile riguroase tehnice și economice pe baza cărora se proiectează secțiunile de beton armat și prin modul remarcabil în

care se finalizează cercetările (programe pentru calculatoare cifrice, grafice, tabele) ușor de în practica curentă de proiectare.

Cartea este împărțită în patru părți ;

I. Principii de proiectare economică a elementelor de construcții din beton armat ;

II. Proiectarea economică la solicitări normale :

III. Proiectarea economică la solicitări tangente ;

IV. Exemple de proiectare economică.

Primele trei părți, cuprinzînd șapte capitole, se referă la principiile fundamentale de calcul a elementelor din beton armat, la conceptele de eficiență economică în proiectare, la proiectarea economică la eforturi unitare normale și la eforturi unitare tangențiale, iar partea a IV-a prezintă 17 exemple de proiectare economică a unor secțiuni de beton armat pe baza criteriilor tehnice și economice analizate.

Pe capitole, conținutul cărții se prezintă astfel :

Capitolul 1 precizează noțiunile fundamentale care intervin în proiectarea modernă a elementelor de construcții din beton armat și analizează stadiile de lucru ale betonului, metodele de calcul, normele în vigoare, tipurile de verificări necesare și caracteristice de calcul ale materialelor (betonul, armătura), inclusiv caracteristicile pentru oboseală, contracție și curgere lentă.

Capitolul 2, analizînd criteriile de proiectare și evoluția lor, formulează tendințele și principiile moderne în proiectarea construcțiilor, insistînd asupra conceptelor de eficiență prin optimizarea siguranței structurilor pe baza unei cercetări multicriteriale.

Capitolul 3 cuprinde algoritmele de calcul, programele corespunzătoare, tabelele și abacele necesare pentru dimensionarea și verificarea plăcilor și grinzilor din beton armat solicitate la încovoiere. Se subliniază, cu multă claritate, atît etapele ce trebuie parcurse la proiectare — calculul la starea limită de rezistență, verificarea la starea limită de deschidere a fisurilor, verificarea la starea limită de deformație — ,cît și aspectele teoretice și practice de proiectare referitoare la procentele optime de armare, modul de alcătuire constructivă și modul de realizare a soluției optime, în funcție de criteriile economice adoptate (cost total, consum minim de oțel, ciment, cofraj etc.).

Capitolul 4 studiază, cu mult discernămînt, toate cazurile de solicitare la compresiune centrică și excentrică a stîlpilor de beton armat, prezentînd algorimele de calcul, schemele logice ale programelor întocmite, abacele și tabelele necesare pentru o proiectare economică, pe baza optimizării atît a dimensiunilor secțiunii de beton, cît și a armăturii.

Capitolul 5 se referă la proiectarea și alcătuirea barelor solicitate la întindere centrică și excentrică, și prezintă detaliat atît etapele de dimensionare și de verificare la deschiderea fisurilor și la deformații, cît și modul cel mai economic de alcătuire constructivă.

Capitolul 6 se ocupă cu aspectele teoretice și practice privind calculul și alcătuirea constructivă a barelor solicitate la forțe tăietoare cum ar fi : grinzile încovoiate, consolele scurte și elementele întinse excentric.

Pentru grinzile încovoiate, se analizează detaliat, multicriterial, pe baza unor programe specializate, dimensionarea armăturii transversale și verificarea secțiunilor înclinate, atît pentru elementele cu înălțime constantă, cît și pentru cele cu înălțime variabilă. Tabelele întocmite, foarte cuprinzătoare din punct de vedere al cazurilor practice ce se pot întîlni, permit o dimensionare și o verificare rapidă, cu un efort minim din partea proiectantului.

Capitolul 7 prezintă algoritmele de calcul, schemele logice ale programelor, abacele și tabelele necesare pentru proiectarea economică a barelor din beton armat solicitate la torsiune și la încovoiere cu torsiune.

Din prezentarea conținutului pe capitole se poate remarca atît rigurozitatea științifică a lucrării, cît și modul remarcabil în care au fost finalizate algoritmele de calcul bazate pe criterii tehnice și economice.

Ca unități de măsură sînt folosite atît cele prevăzute în SI, cît și cele din sistemul M KfS.

Avînd în vedere că este o lucrare independentă ce cuprinde toate formulele și tabelele necesare, era indicat să se folosească numai unitățile din SI.

În ansamblu, această carte, concepută ca un ghid de proiectare, întrunește toate calitățile unei lucrări tehnice originale de foarte mare utilitate practică, în care contribuțiile științifice și vasta experiență a autorilor sînt prezente în toate capitolele. În concluzie, este o carte valoroasă, care îmbogățește literatura tehnică națională și mondială în domeniul proiectării elementelor de construcții din beton armat pe baza normelor semiprobabiliste de calcul la stări limită.

Nicolae Posea

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 39, nr. 5 septembrie—octombrie 1980

SUMAR

STUDII

MIHAI POPESCU, Asupra atingerii punctelor de libraţie ale sistemului Pămînt-Lună în timp minim 633

MIRCEA ARICIUC, Vibraţii şi microvibraţii acustice şi optice în corpuri cristaline cu structură complexă 639

IOAN JELEV, Calculul hidrodinamic al paletajului rotoric al unei turbomaşini axiale bulb. I 655

MIHAI BUCULEI, Relaţii globale în elastocinematica mecanismelor plane cu bare 679

GABRIEL D. POPA, Metoda de calcul, utilizînd seriile duble trigonometrice, pentru placă rigidizată cu nervuri înguste excentrice dispuse pe două direcţii 687

ECATERINA BORCIA, Caracterizarea răspunsului principalelor tipuri de pămînturi la solicitări seismice. II. Modele neliniare pentru răspunsul pămînturilor la solicitarea ciclică de forfecare 705

N. POSEA, C. MANEA, Analiza stării de eforturi şi deformaţii ale compensatoarelor lenticulare de dilataţie, cu lentile de tip „U" executate multistrat 719

A. PAVEL, L. RIZEA, C. MATEESCU, Studii şi cercetări teoretico-experimentale privind securitatea tehnică a mantalei cilindrice a unui expandor de înaltă presiune 741

MIRCEA IVAN, IOAN CRISTIAN, VICTOR BENCHE, Studiul teoretic şi experimental al variaţiei presiunii electrolitului în zona de lucru la prelucrarea electrochimică a suprafeţelor sferice 761

I. SPULBER C. SPULBER, Contribuţii la studiul prelucrării prin eroziune electrochimică cu depasivizare hidrodinamică 777

P.SIMA, GR. COSTIN, DAN D. CĂMĂRĂSCU, Instalaţie pentru studiul oscilaţiilor neliniare de răsucire ale arborilor drepţi sau cotiţi . . . 789

RECENZII 793

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 37, nr. 5 septembrie—octombrie 1985

SUMAR

STUDII

MIHAI TOPESCU, Asupra cîtorva puncte de fibrație ale sistemului 699

Pământ fund în timp uscat 699

MIRCEA ARDELEANU, Vibrații și micșorbirații acustice și optice în corpuri 699

cristaline cu structură complexă 699

IOAN JELEV, Calculul hidrodinamic al pelerinului rotoric al unei turbo- 699

pompe axiale bulb. I 699

MIHAI BUCUREȘTI, Rețele globale în elasticitatea necesalmentor 699

plane cu bare 699

GABRIEL D. TOPA, Metoda de calcul, utilizînd seriile duble trigono- 699

metrice, pentru placă dreptunghiulară cu mersuri logarite excentrice dispuse 699

pe două direcții 699

ECATERINA BOTOȘA, Caracterizarea răspunsului prin spațiul tipuri 699

de pământuri în solicitări seismice. II. Modele pentru 699

răspunsul pământurilor în solicitări cvasi-ciclice de forfecare 699

N. POZNA, C. MANEA, Analiza stării de efort și deformații ale cam- 699

pozitoarelor fenilonare de diferite, cu lentile de tip „Z” executate 699

monolitic 699

A. PAVEL, E. RENTEA, C. MAVRESCU, Studii și cercetări teoretico-expe- 699

rimentale privind acumularea lubrifiantului în zona de intrare a unui 699

cuplaj de înaltă presiune 699

MIRCEA IVAN, IOAN CRISTIAN, VICTOR ISPAS, Studiul teoretic 699

și experimental al vehiculului pneumatic electrificat în zona de lucru 699

în prelucrarea electrochimică a suprafețelor sferice 699

I. STOICHICI, C. SPĂTĂRELU, Contribuții la studiul pierderii prin cre- 699

vizare electrochimică cu depasivizare intermediară 699

P. SIMA, CH. COSTIN, IOAN D. CĂLĂRAȘU, Indicații pentru studiul 699

oscilațiilor melarre de răsucire ale arborilor drepți cu cotiți 699

RECENZII 699

STUDII

ASUPRA ATINGERII PUNCTELOR DE LIBRAȚIE ALE SISTEMULUI PĂMÎNT-LUNĂ ÎN TIMP MINIM

MIHAI POPESCU

Institutul național pentru creație științifică și tehnică

Prezenta lucrare își propune să analizeze mișcarea comandată a vehiculelor spațiale și anume stabilirea legilor de comandă care asigură transferul vehiculelor spațiale dintr-un punct dat din spațiu, în punctele Lagrangiene într-un timp minim, atunci cînd viteza de atingere a acestor puncte de echilibru este arbitrară.

Formularea matematică revine la studiul mișcării unui punct reprezentativ din spațiul stărilor de pe o varietate dată S_1 la o varietate S_0 care coincide cu punctele Lagrangiene.

ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Fie mișcarea comandată a unui vehicul spațial supus unei tracțiuni mici care-i dă o accelerație orientată arbitrar. Avînd o poziție inițială dată, cu o viteză inițială dată, ne propunem să determinăm legea de comandă care transferă vehiculul în punctele de librație, astfel încît timpul necesar acestui transfer să fie minim.

Ecuațiile de mișcare în jurul punctelor de librație ale unui vehicul spațial în sistemul de axe ales se scriu astfel :

$$\frac{d\xi}{dt} = V_\xi,$$

$$\frac{d\eta}{dt} = V_\eta,$$

$$\frac{dV_\xi}{dt} = 2\omega V_\eta + k_1\xi + k_3\eta + a_\xi, \tag{1}$$

$$\frac{dV_\eta}{dt} = -2\omega V_\xi + k_2\eta + k_3\xi + a_\eta.$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 5, 1980, P. 633–638

Dacă notăm coordonatele vehiculului în mișcare cu x_1, x_2, componentele vitezei cu x_3, x_4, iar componentele accelerației cu u_1, u_2 ecuațiile de mișcare (1) devin:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_4, \\ \frac{dx_3}{dt} &= u_1, \\ \frac{dx_4}{dt} &= u_2. \end{aligned} \tag{1'}$$

Presupunem că accelerațiile $u = (u_1, u_2)$ nu depășesc în modul unitatea, domeniul de comandă fiind definit de

$$U = \left\{ u_i \mid \sum_{i=1}^{2} u_i^2 \leqslant 1 \right\}. \tag{2}$$

Considerăm poziția inițială și viteza inițială cunoscute,

$$x_i(0) = x_i^0 \qquad (i = 1, \ldots, 4). \tag{3}$$

Condiția de atingere a punctelor de librație care coincide cu originea axelor de coordonate, viteza fiind arbitrară, se poate scrie

$$x_i = 0 \qquad (i = 1,2), \tag{4}$$

iar mărimile x_{i+2} $(i = 1,2)$ iau valori neprecizate.

PROBLEMA DE OPTIM

Se caută să se determine componentele accelerațiilor a_ξ, a_η ale forței de tracțiune astfel încît vehiculul comandat de ecuațiile (1') și (2) să fie transferat din punctul inițial de pe varietatea S_0, definită de (3), într-un punct oarecare de pe varietatea S_1, definită de (4) în timp minim.

Hamiltonianul se scrie în acest caz

$$H = \lambda_1 x_3 + \lambda_2 x_4 + \lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2, \tag{5}$$

care generează sistemul adjunct,

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = -\lambda_1, \tag{6}$$

$$\frac{dx_4}{dt} = -\lambda_2.$$

Fie T_1 planul tangent la varietatea S_1. Vectorul $\lambda(t) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ satisface condiția de transversalitate la extremitatea traiectoriei $x(t)$ (adică punctul $x(t_1)$) dacă vectorul $\lambda(t_1)$ este ortogonal pe planul T_1. Rezultă că este necesar și suficient să fie verificate condițiile

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Condiția de transversalitate devine

$$\lambda_3(t_1) = \lambda_4(t_1) = 0, \tag{7}$$

unde t_1 este timpul necesar atingerii varietății S_1, care, în cazul nostru, coincide cu punctul de librație.

Prin integrarea sistemului (6) se obține

$$\lambda_1 = a_1, \quad \lambda_2 = a_2, \quad \lambda_3 = a_1(t_1 - t), \quad \lambda_4 = a_2(t_1 - t), \tag{8}$$

unde a_i $(i = 1,2)$ sînt constante.

Fără a restrînge generalitatea vom putea presupune că

$$a_1^2 + a_2^2 = 1. \tag{9}$$

Înlocuind (8) în expresia hamiltonianului (5) se obține

$$H = a_1 x_3 + a_2 x_4 + (t_1 - t)\ (a_1 u_1 + a_2 u_2). \tag{10}$$

Deoarece $t_1 - t > 0$, pentru ca H să fie maxim trebuie ca în tot timpul mișcării expresia $\sum_{i=1}^{2} a_i u_i$ să fie maximă.

Din (2) rezultă că

$$u_i = a_i \qquad (i = 1,2), \tag{11}$$

de unde se deduce că expresiile funcţiilor de comandă optime sînt constante pe tot timpul mişcării şi egale cu unitatea în modul.

Se poate deci scrie

$$\sum_{i=1}^{2} u_i^2 = 1. \tag{12}$$

Integrînd sistemul (1') în condiţiile iniţiale (3) se găseşte

$$x_i = x_i^0 + x_{i+2}\, t + u_i \frac{t^2}{2} \qquad (i = 1, 2). \tag{13}$$

Pentru ca traiectoria să treacă prin origine trebuie să fie verificată condiţia

$$x_i^0 + x_{i+2}^0 t + u_i \frac{t^2}{2} = 0. \tag{14}$$

Relaţiile (12) şi (13) formează un sistem de trei ecuaţii cu necunoscutele u_1, u_2, t.

Este evident că t nu poate lua decît valori pozitive şi dintre soluţiile cu valoare pozitivă vom lua pe cea mai mică ce corespunde transferului în timp minim.

Cu valorile u_i date de relaţia (14) înlocuind în (12) se obţine

$$P(t) = 4 \sum_{i=1}^{2} (x_1^0 + x_{i+2}^0\, t)^2 - t^4 = 0. \tag{15}$$

Pentru $t = 0$ se obţine

$$4 \sum_{i=1}^{2} (x_i^0)^2 > 0. \tag{16}$$

Se observă că

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = -\infty, \tag{17}$$

de unde rezultă, ţinînd seama de (16), că ecuaţia $P(t) = 0$ are cel puţin o rădăcină pozitivă.

Dacă notăm cu t^* cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuaţiei (15) ea reprezintă timpul minim necesar transferului vehiculului spaţial în punctele de libraţie.

Cu aceasta, comanda optimă necesară acestui transfer devine

$$u_i^* = -\frac{2(x_i^0 + x_{i+2}^0\, t^*)}{(t^*)^2}. \tag{18}$$

Aşa cum rezultă din relaţia (13) traiectoria optimă va fi dată de parabola

$$x_i^* = x_i^0 + x_{i+2}^0\, t + u_i^* \frac{t^2}{2} \tag{19}$$

sau, explicitînd, se obține

$$x_1^* = x_1^0 + x_3^0 t + u_1^* \frac{t^2}{2},$$

$$x_2^* = x_2^0 + x_4^0 t + u_2^* \frac{t^2}{2},$$

$$x_3^* = x_3^0 + u_1^* t, \tag{20}$$

$$x_4^* = x_4^0 + u_2^* t,$$

Ecuația (15) scrisă explicit are forma

$$4[(x_1^0 + x_3^0 t)^2 + (x_2^0 + x_4^0 t)^2] - t^4 = 0. \tag{21}$$

Condițiile inițiale sînt date de:

$$x_1^0 = 0, \quad x_2^0 = x_2^0, \quad x_3^0 = x_3^0, \quad x_4^0 = 0. \tag{22}$$

Folosind (22), ecuația (21) devine

$$t^4 - 4(x_3^0)^2 t^2 - 4(x_2^0) = 0,$$

care este o ecuație bipătrată a cărei soluție convenabilă este

$$y = x_3^0 + \sqrt{(x_3^0)^2 + (x_2^0)^2}, \tag{23}$$

unde

$$y = t^2.$$

Rezultă valoarea timpului minim

$$t^* = \sqrt{x_3^0 + \sqrt{(x_3^0)^2 + (x_2^0)^2}}. \tag{24}$$

Înlocuind în sistemul ecuațiilor de mișcare se obține valorile optimale pentru accelerațiile forței de tracțiune în sistemul de axe considerat [1].

Pentru punctele de librație echidistante avem

$$a_\xi^e = \frac{k_1 x_3^0 t^* + k_3 x_2^0}{(t^*)^2} t^2 + \left(\frac{4\omega x_2^0}{(t^*)^2} - k_1 x_3^0\right) t - \frac{2x_3^0}{t^*} - k_3 x_2^0,$$

$$a_\eta = \frac{k_2 x_2^0 + k_3 x_3^0 t^*}{(t^*)^2} t^2 + \left(-\frac{4\omega x_3^0}{t^*} - k_3 x_3^0\right) t - \frac{2x_2^0}{(t^*)^2} + 2\omega x_3^0 - k_2 x_2^0. \tag{25}$$

Accelerațiile pentru punctele colineare se obțin din cazul anterior făcînd $k_3 = 0$.

De remarcat că constantele k_i $(i = 1,2,3)$ diferă ca valoare pentru punctele de libraţie echidistante şi coliniare [1].

De unde rezultă pentru punctele coliniare

$$a_\xi^c = \frac{k_1 x_3^0}{t^*} t^2 + \left(\frac{4\omega x_2^0}{(t^*)^2} - k_1 x_3^0 \right) t - \frac{2x_3^0}{t^*},$$

$$a_\eta^c = \frac{k_2 x_2^0}{(t^*)^2} t^2 - \frac{4\omega x_3^0}{t^*} t - \frac{2x_2^0}{t^*} + 2\omega x_3^0 - k_2 x_2^0. \tag{26}$$

Problema de timp minim abordată se referă la o lucrare anterioară [1] de atingere a punctelor Lagrangeene din sistemul Pămînt — Lună.

Primită la redacţie la 15 ianuarie 1980

BIBLIOGRAFIE

MIHAI POPESCU, *Studiul manevrelor optime ale vehiculelor spaţiale în apropierea punctelor de libraţie din sistemul Pămînt—Lună*, St. cerc. mec. apl., **38**, 5 (1979).

VIBRAŢII ŞI MICROVIBRAŢII ACUSTICE ŞI OPTICE ÎN CORPURI CRISTALINE CU STRUCTURĂ COMPLEXĂ

de MIRCEA ARICIUC
Institutul de construcţii Bucureşti

În prezenta lucrare, se studiază problema propagării vibraţiilor proprii, în cazul modelului liniar generalizat de tip Voigt-Duhem-Cosserat al cristalelor moleculare cu structură complexă, dîndu-se o clasificare de tip Mindlin a undelor acustice şi optice care pot apărea. De asemenea, se demonstrează teoretic că viteza de grup a undelor transversale acustice, obţinută cu un astfel de model, este mai mică decît cea obţinută cu modelul clasic liniar a lui Navier-Cauchy-Green, fapt care era cunoscut experimental.

1. CONSIDERAŢII GENERALE

Este deja cert că există o vastă clasă de structuri cristaline formate din molecule care se caracterizează printr-o izolare pronunţată de natură geometrică şi prin existenţa unor legături intramoleculare extrem de puternice. Structurile cristaline caracterizate de aceste proprietăţi sînt numite *cristale moleculare* [7, cap I, § 1]. Din această vastă clasă a cristalelor moleculare fac parte şi majoritatea compuşilor organici şi după cum se afirmă în [7, cap. I, § 1] se poate spune fără exagerare (făcînd abstracţie de eventualele excepţii nesemnificative) că între mecanica şi fizica cristalelor moleculare şi mecanica şi fizica cristalelor organice se poate pune semnul identităţii. Proprietăţile caracteristice ale structurii geometrice ale clasei menţionate arată că fiecare moleculă a unui cristal molecular este geometric izolată, de unde rezultă că forţele corespunzătoare legăturilor intramoleculare sînt mult mai intense decît cele care corespund interacţiunilor intermoleculare. Moleculele cristalelor moleculare, în marea majoritate a cazurilor, sînt neutre din punct de vedere electric, de unde rezultă că interacţiunea dintre formaţiunile caracteristice ale structurii considerate se realizează prin forţe de tip Van der Waals, forţe cu rază mică de acţiune în raport cu dimensiunile liniare ale cristalului [1, § 4]. Atît rezultatele experimentale, cît şi cele teoretice arată că energia de interacţiune a moleculelor care formează structura cristalină considerată, depinde considerabil atît de poziţiile reciproce ale centrelor de masă ale moleculelor, cît şi de orientarea reciprocă a particulelor amintite. Este deci evident că în cazul cristalelor moleculare formate în general din molecule cu structură complexă, asimilarea moleculelor cu centre punctiforme de atracţie sau respingere nu reprezintă o aproximaţie satisfăcătoare. În vederea elaborării unui model discret continuu sau cvasicontinuu al acestor tipuri de materiale trebuie să ţinem seama de proprietăţile men-

ţionate ale elementelor constituente şi să avem în vedere faptul că mişcările intramoleculare ale atomilor, care formează moleculele cristalelor moleculare, au amplitudini mult mai mici decît amplitudinile corespunzătoare mişcărilor centrelor de masă ale moleculelor şi mişcărilor care caracterizează rotaţiile acestor molecule în jurul centrelor lor de masă. Faptele geometrice, cinematice şi dinamice menţionate mai sus, arată că în marea majoritate a cazurilor, cristalele moleculare pot fi privite ca fiind sisteme cristaline formate din *molecule cu şase grade de libertate*, parametri cinematici ai unei molecule fiind componentele vectorului care caracterizează deplasările centrului de masă ale moleculei şi componentele unui vector axial care descrie orientarea moleculei în spaţiu.

Conform datelor experimentale, cu excepţia unui strat extrem de subţire, situat în vecinătatea frontierei corpului, cristalele moleculare au o structură periodică regulată, care poate fi descrisă cu ajutorul unei reţele complexe de tip Bravais [5]. Deci corpul la care ne referim este un cristal molecular finit cu structură periodică, format din N molecule de tip Bravais, în fiecare celulă găsindu-se $P + 1$ particule de natură diferită, aceste particule pot fi atomi sau molecule neutre din punct de vedere electric, în consecinţă forţele care acţionează între ele sînt forţe de tip Van der Waals, cu rază mică de acţiune în raport cu dimensiunile liniare ale cristalului, particulele fiind înzestrate cu şase grade de libertate, trei corespunzînd mişcării de translaţie, iar trei mişcării de rotaţie.

Folosind aceste fapte şi avînd în vedere numai acele elemente ale clasei considerate, care pot fi caracterizate geometric cu ajutorul unei reţele tridimensionale complexe, în lucrarea [1] am elaborat un model discret de tip Voigt-Duhem-Cosserat, iar în lucrările [2], [3] am elaborat un model continuu neliniar de tip Voigt-Duhem-Cosserat pe care l-am liniarizat. Făcînd legătura cu modelul continuizat al modelului discret construit, reiese că în domeniul undelor acustice şi optice foarte lungi, comportarea cristalelor moleculare, supuse la mici deformaţii, poate fi descrisă satisfăcător cu ajutorul unui model continuu liniar de tip Voigt-Duhem-Cosserat, elaborat pe baza unei densităţi de energie a deformaţiei care depinde pe lîngă mărimile cinematice care descriu cristalul molecular cu structură complexă şi de gradientul spaţial de primul ordin al vectorului care descrie deplasările de translaţie ale particulelor orientate.

În cele ce urmează, ne vom situa în domeniul undelor foarte lungi şi vom utiliza rezultatul menţionat mai sus, presupunînd că tensiunile sînt nule în configuraţia de referinţă.

Vom presupune că structura cristalină considerată este macroscopic omogenă şi izotropă, vom identifica configuraţia naturală a corpului cu configuraţia de referinţă şi vom utiliza un sistem de coordonate cartezian triortogonal O, $x = \{x^k\}$, $k = 1,2,3$; cu t vom desemna timpul newtonian, iar cu V volumul ocupat de corp la momentul $t = 0$. Vom nota cu u_k componentele vectorului care caracterizează macrodeplasarea translaţională a centrului de masă al celulei, cu $\overset{\alpha}{u}_k$ componentele vectorului care caracterizează microdeplasarea translaţională a particulei α din aceeaşi celulă, cu Φ_{kl} componentele tensorului antisimetric care caracterizează macrorotaţia liberă a celulei, cu $\overset{\alpha}{\Phi}_{kl}$ componentele tensorului antisimetric care caracterizează microrotaţia liberă a particulei α din celulă.

Cîmpurile $\mathbf{u}$, $\underset{\alpha}{\mathbf{u}}$, Φ, $\underset{\alpha}{\Phi}$ depind în general de coordonatele x^k ale particulelor varietății considerate și de timpul t. Presupunînd cîmpul forțelor exterioare nul, am obținut [4] următorul sistem de ecuații care guvernează comportarea fenomenologică a structurii considerate în interiorul volumului V:

$$\rho \ddot{u}_k = T_{kl,l},$$

$$\underset{\alpha\beta}{\rho}\, \ddot{u}_k = -\underset{\alpha}{T}\, k, \tag{1.1}$$

$$j\, \ddot{\Phi}_k = H_k,$$

$$\underset{\alpha\beta}{j}\, \ddot{\Phi}_k = \underset{\alpha}{H}_k,$$

$$U = \frac{1}{2}\tilde{\lambda}\, e_{kk}\, e_{ll} + \tilde{\mu} e_{kl}\, e_{kl} + \frac{1}{2} c\, \varphi_k\, \varphi_k + \underset{\alpha}{d}\, \varphi_k\, \underset{\alpha}{\Phi}_k +$$

$$+ \frac{1}{2}\, \underset{\alpha\beta}{a}\, \underset{\alpha}{W}_k\, \underset{\beta}{W}_k + \frac{1}{2}\, \underset{\alpha\beta}{c}\, \underset{\alpha}{\Phi}_k\, \underset{\beta}{\Phi}_k, \tag{1.2}$$

$$T_{kl} = \tilde{\lambda} e_{mm}\, \delta_{kl} + 2\tilde{\mu}\, e_{kl} + \delta_{lk\,K}\, \underset{\alpha}{X}_K\, \underset{\alpha}{T}_{l]} + e_{klm}\, H_m,$$

$$\underset{\alpha}{T}_k = \underset{\alpha\beta}{a}\, \underset{\beta}{w}_k, \tag{1.3}$$

$$H_k = c\, \varphi_k + \underset{\alpha}{d}\, \underset{\alpha}{\Phi}_k,$$

$$\underset{\alpha}{H}_k = \underset{\alpha}{d}\, \varphi_k + \underset{\alpha\beta}{c}\, \underset{\beta}{\Phi}_k,$$

$$e_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}), \quad \omega_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} - u_{l,k}),$$

$$\varphi_k = -e_{klm}\, \varphi_{lm}, \qquad \varphi_{kl} = \Phi_{kl} - \omega_{kl},$$

$$\Phi_k = -e_{klm}\, \Phi_{lm}, \tag{1.4}$$

$$\underset{\alpha}{\Phi}_k = -e_{klm}\, \underset{\alpha}{\Phi}_{lm},$$

$$\underset{\alpha}{W}_k = \underset{\alpha}{u}_k - \omega_{kl}\, \underset{\alpha}{X}_l.$$

Vectorii Φ și $\underset{\alpha}{\Phi}$ sînt niște vectori axiali care caracterizează macrorotația și microrotația, $\underset{\alpha}{X}_k$ reprezintă componentele vectorului de poziție al particulei α față de centrul de masă al celulei, iar e_{klm} este tensorul lui Ricci.

În relaţiile (1)—(4) am utilizat regula de însumare a lui Einstein, cu punct suprapus am notat derivata parţială în raport cu timpul t, iar $f_{,k}$ reprezintă derivata parţială a funcţiei f în raport cu variaţia spaţială x^k. Constantele pozitive ρ, $\underset{\alpha\beta}{\rho}$ reprezintă densitatea de macromasă, respectiv densitatea de micromasă, iar constantele de asemenea pozitive j, $\underset{\alpha\beta}{j}$ caracterizează inerţia celulei şi a particulei din celulă, U reprezintă densitatea de energie a deformaţiei, în timp ce $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, c, $\underset{\alpha}{d}$, $\underset{\alpha\beta}{a}$, $\underset{\alpha\beta}{c}$ sînt constante macroscopice de material care caracterizează răspunsul cristalului la perturbaţii exterioare. Mărimile introduse prin (4) caracterizează măsurile macro şi micro deformaţiilor corpului considerat. Nu am prezentat condiţiile la limită şi iniţiale ale sistemului (1)—(4) deoarece ele nu intră în consideraţiile ulterioare.

Deoarece în urma deformării orice porţiune a solidului cristalin înmagazinează energie, densitatea ei trebuie să fie o formă pătratică pozitiv definită. În consecinţă valorile constantelor de material $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu}$, c, $\underset{\alpha}{d}$, $\underset{\alpha\beta}{a}$, $\underset{\alpha\beta}{c}$ nu pot fi arbitrare, ele fiind supuse la anumite restricţii.

2. VIBRAŢII ŞI MICROVIBRAŢII ACUSTICO-OPTICE

Pentru studiul vibraţiilor şi microvibraţiilor proprii ale unui astfel de corp elastic cu microstructură vom presupune că acestea au amplitudini mici în comparaţie cu dimensiunile liniare ale celulei şi lungime de undă mare în comparaţie cu dublul distanţei minime între două particule de acelaşi tip. Vom mai presupune că cristalul considerat este nemărginit. În aceste condiţii studiul vibraţiilor proprii se reduce la studiul propagării undelor plane în corpul considerat.

Deoarece solidul considerat este omogen, izotrop şi nemărginit, putem să ne limităm fără a restrînge generalitatea rezultatelor care vor fi obţinute, la considerarea undelor plane care se pot propaga în direcţia axei Ox_1.

Vom presupune că $u_k(\vec{x}, t)$, $\underset{\alpha}{u_k}(\vec{x}, t)$, $\Phi_k(\vec{x}, t)$, $\underset{\alpha}{\Phi_k}(\vec{x}, t)$ sînt de forma :

$$\begin{aligned} u_k(\vec{x}, t) &= A_k\, e^{i(kx-\omega t)}, \\ \underset{\alpha}{u_k}(\vec{x}, t) &= \underset{\alpha}{A_k}\, e^{i(kx-\omega t)}, \\ \Phi_k(\vec{x}, t) &= B_k\, e^{i(kx-\omega t)}, \\ \underset{\alpha}{\Phi_k}(\vec{x}, t) &= \underset{\alpha}{B_k}\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad \text{unde } x = x_1 \text{ şi } i = \sqrt{-1}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

În relaţiile (1.1), A_k, B_k, $\underset{\alpha}{A_k}$, $\underset{\alpha}{B_k}$ sînt mărimi constante şi reprezintă amplitudinile micilor oscilaţii care se propagă în corpul cu microstructură. Mărimea k din exponenţială reprezintă numărul de undă, iar ω este frecvenţa vibraţiilor.

Presupunem că ω și k sînt independente de x și t, ω fiind în general o funcție care depinde de k. Lungimea de undă Λ și viteza de grup v sînt date de relațiile:

$$\Lambda = \frac{2\pi}{|k|}, \quad v = \frac{\mathrm{d}\omega(k)}{\mathrm{d}k}. \tag{2.2}$$

Deoarece urmărim studiul vibrațiilor proprii, trebuie să impunem condiția ca funcțiile (2.1) să satisfacă ecuațiile de mișcare (1.1) adică ecuațiile de mișcare omogene ale modelului liniar, legile constitutive (1.3) împreună cu relațiile geometrice (1.4).

Ținînd seama de faptul că în cazul particular considerat de noi funcțiile u_k, $\underset{\alpha}{u_k}$, Φ_k, $\underset{\alpha}{\Phi_k}$ depind numai de x_1 și t ajungem la concluzia că sistemul (1.1), (1.3), (1.4) se descompune în trei subsisteme independente între ele, iar funcțiile $u_k(x, t)$, $\underset{\alpha}{u_k}(x, t)$, $\Phi_k(x, t)$, $\underset{\alpha}{\Phi_k}(x, t)$ trebuie să satisfacă următoarele ecuații diferențiale:

$$\rho \ddot{u}_1 = (\tilde{\lambda} + \tilde{\mu}) \acute{u}_1; \tag{2.3.a}$$

$$j\ddot{\Phi}_1 = -c\Phi_1 + \underset{\alpha}{d}\,\underset{\alpha}{\Phi_1},$$

$$\underset{\alpha\beta}{j}\,\ddot{\underset{\beta}{\Phi}}_1 = -\underset{\alpha}{d}\,\Phi_1 + \underset{\alpha\beta}{c}\,\underset{\beta}{\Phi_1}; \tag{2.3.b}$$

$$\rho \ddot{u}_2 = \left(\tilde{\mu} + c + \frac{1}{4}\,\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\alpha}{X_1}\,\underset{\beta}{X_1} + \frac{1}{4}\,\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\alpha}{X_2}\,\underset{\beta}{X_2}\right)\acute{u}_2 + \frac{1}{4}\,\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\alpha}{X_2}\,\underset{\beta}{X_3}\,\acute{u}_3 +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\alpha}{X_2}\,\underset{\beta}{\acute{u}_1} - \frac{1}{2}\,\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\alpha}{X_1}\,\underset{\beta}{\acute{u}_2} + c\acute{\Phi}_3 - \underset{\alpha}{d}\,\underset{\alpha}{\acute{\Phi}_3},$$

$$\rho \ddot{u}_3 = \left(\tilde{\mu} + c + \frac{1}{4}\,\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\alpha}{X_3}\,\underset{\beta}{X_3} + \frac{1}{4}\,\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\alpha}{X_1}\,\underset{\beta}{X_1}\right)\acute{u}_3 + \frac{1}{4}\,\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\alpha}{X_3}\,\underset{\beta}{X_2}\,\acute{u}_2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\,\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\alpha}{X_3}\,\underset{\beta}{\acute{u}_1} - \frac{1}{2}\,\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\alpha}{X_1}\,\underset{\beta}{\acute{u}_3} - c\acute{\Phi}_2 + \underset{\alpha}{d}\,\underset{\alpha}{\acute{\Phi}_2}, \tag{2.3.c}$$

$$\underset{\alpha\beta}{\rho}\,\ddot{\underset{\beta}{u}}_1 = -\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\beta}{u_1} - \frac{1}{2}\,\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\beta}{X_1}\,\acute{u}_2 - \frac{1}{2}\,\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\alpha}{X_3}\,\acute{u}_3,$$

$$\underset{\alpha\beta}{\rho}\,\ddot{\underset{\beta}{u}}_2 = -\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\beta}{u_2} + \frac{1}{2}\,\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\beta}{X_1}\,\acute{u}_2,$$

$$\underset{\alpha\beta}{\rho}\,\ddot{\underset{\beta}{u}}_3 = -\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\beta}{u_3} + \frac{1}{2}\,\underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\beta}{X_1}\,\acute{u}_2,$$

$$j\ddot{\Phi}_2 = -c\,\Phi_2 - c\acute{u}_3 + \underset{\alpha}{d}\,\underset{\alpha}{\Phi}_2,$$

$$j\ddot{\Phi}_3 = -c\,\Phi_3 - c\,\acute{u}_2 + \underset{\alpha}{d}\,\underset{\alpha}{\Phi}_3,$$

$$\underset{\alpha\beta}{j}\,\underset{\beta}{\ddot{\Phi}}_2 = -\underset{\alpha}{d}\,\Phi_2 - \underset{\alpha}{d}\,\acute{u}_3 + \underset{\alpha\beta}{c}\,\underset{\beta}{\Phi}_2,$$

$$\underset{\alpha\beta}{j}\,\underset{\beta}{\ddot{\Phi}}_3 = -\underset{\alpha}{d}\,\Phi_3 - \underset{\alpha}{d}\,\acute{u}_2 + \underset{\alpha\beta}{c}\,\underset{\beta}{\Phi}_3.$$

În relaţiile precedente am notat cu accent suprapus, derivata parţială în raport cu coordonata spaţială x. Pentru a găsi relaţiile de dispersie corespunzătoare diferitelor tipuri de unde plane care se pot propaga în corpul cu microstructură, trebuie să impunem condiţia ca funcţiile (2.1) să verifice sistemele de ecuaţii (2.3.a), (2.3.b), (2.3.c).

Pentru desemnarea diferitelor tipuri de vibraţii proprii, vom utiliza clasificarea dată în lucrarea lui Mindlin [8], consacrată materialelor cu microstructură în teoria liniară a elasticităţii.

Semnalăm următorul fapt important : avînd în vedere că modelul continuu liniarizat descrie corect comportarea solidului cu microstructură numai în domeniul vibraţiilor cu lungime de undă mare, rezultă că relaţiile de dispersie pe care le vom obţine cu ajutorul acestui model vor fi corecte numai pentru valori suficient de mici ale numărului de undă k. Extrapolarea relaţiilor respective la domeniul undelor foarte scurte conduce la rezultate care nu descriu satisfăcător fenomenul studiat şi se abat mult de la rezultatele care se pot obţine pe cale experimentală.

În cele ce urmează, pentru a ne uşura scrierea relaţiilor, facem următoarele notaţii :

$$A = \tilde{\mu} + c + \frac{1}{4}\,\underset{\alpha\beta\,\alpha}{a}\,\underset{\beta}{X}_1\,\underset{\beta}{X}_1 + \frac{1}{4}\,\underset{\alpha\beta\,\alpha}{a}\,\underset{\beta}{X}_2\,\underset{\beta}{X}_2,$$

$$B = \tilde{\mu} + c + \frac{1}{4}\,\underset{\alpha\beta\,\alpha}{a}\,\underset{\beta}{X}_3\,\underset{\beta}{X}_3 + \frac{1}{4}\,\underset{\alpha\beta\,\alpha}{a}\,\underset{\beta}{X}_1\,\underset{\beta}{X}_1,$$

$$C = \frac{1}{4}\,\underset{\alpha\beta\,\alpha}{a}\,\underset{\beta}{X}_2\,\underset{\beta}{X}_3, \qquad (2.4)$$

$$\underset{\alpha}{D} = \frac{1}{2}\,\underset{\alpha\beta\,\beta}{a}\,\underset{\beta}{X}_1,$$

$$\underset{\alpha}{E} = \frac{1}{2}\,\underset{\alpha\beta\,\beta}{a}\,\underset{\beta}{X}_2,$$

$$\underset{\alpha}{F} = \frac{1}{2}\,\underset{\alpha\beta\,\beta}{a}\,\underset{\beta}{X}_3.$$

Impunînd condiția ca funcțiile (2.1) să verifice sistemele (2.3.a), (2.3.b), (2.3.c) obținem, folosind notațiile (2.4), următoarele sisteme pentru determinarea frecvențelor proprii ale vibrațiilor :

$$\rho\omega^2 A_1 = (\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu})k^2 A_1 ; \tag{2.5.a}$$

$$j\,\omega^2 B_1 = c\,B_1 - \underset{\alpha}{d}\,\underset{\alpha}{B_1}, \tag{2.5.b}$$

$$\underset{\alpha\beta}{j}\,\omega^2\,\underset{\alpha}{B_1} = \underset{\beta}{d}\,B_1 - \underset{\alpha\beta}{c}\,\underset{\alpha}{B_1};$$

$$\rho\omega^2 A_2 = Ak^2 A_2 + Ck^2 A_3 - ik\underset{\alpha}{E}\,\underset{\alpha}{A_1} + ik\underset{\alpha}{D}\,\underset{\alpha}{A_2} - cikB_3 + \underset{\alpha}{d}\,ik\,\underset{\alpha}{B_3},$$

$$\rho\omega^2 A_3 = Bk^2 A_3 + Ck^2 A_2 - ik\underset{\alpha}{E}\,\underset{\alpha}{A_1} + ik\underset{\alpha}{D}\,\underset{\alpha}{A_3} + cikB_2 - \underset{\alpha}{d}\,ik\,\underset{\alpha}{B_2},$$

$$\underset{\alpha\beta}{\rho}\,\omega^2\,\underset{\alpha}{A_1} = \underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\alpha}{A_1} + ik\,\underset{\beta}{E}\,A_2 + ik\,\underset{\beta}{F}\,A_3,$$

$$\underset{\alpha\beta}{\rho}\,\omega^2\,\underset{\alpha}{A_2} = \underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\alpha}{A_2} - ik\,\underset{\beta}{D}\,A_2, \tag{2.5.c}$$

$$\underset{\alpha\beta}{\rho}\,\omega^2\,\underset{\alpha}{A_3} = \underset{\alpha\beta}{a}\,\underset{\alpha}{A_3} - ik\,\underset{\beta}{D}\,A_3,$$

$$j\omega^2 B_2 = cB_2 + cikA_3 - \underset{\alpha}{d}\,\underset{\alpha}{B_2},$$

$$j\,\omega^2 B_3 = c\,B_3 + cik\,A_2 - \underset{\alpha}{d}\,\underset{\alpha}{B_3},$$

$$\underset{\alpha\beta}{j}\,\omega^2\,\underset{\alpha}{B_2} = \underset{\beta}{d}\,B_2 + \underset{\beta}{d}\,ikA_3 - \underset{\alpha\beta}{c}\,B_2,$$

$$\underset{\alpha\beta}{j}\,\omega^2\,\underset{\alpha}{B_3} = \underset{\beta}{d}\,B_3 + \underset{\beta}{d}\,ikA_2 - \underset{\alpha\beta}{c}\,B_3.$$

În scrierea sub această formă a sistemelor (2.5.b) și (2.5.c) am folosit relațiile :

$$\underset{\alpha\beta}{a} = \underset{\beta\alpha}{a},\ \underset{\alpha\beta}{j} = \underset{\beta\alpha}{j},\ \underset{\alpha\beta}{c} = \underset{\beta\alpha}{c}.$$

Deoarece α și β iau valori de la 1 la P, sistemul (2.5.a) este format dintr-o singură ecuație, sistemul (2.5.b) este format din $P + 1$ ecuații, iar sistemul (2.5.c) este format din $5P + 4$ ecuații.

Din primul sistem independent obținem pentru determinarea lui ω^2 expresia :

$$\omega^2_{TLA}(k) = \frac{\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu}}{\rho} k^2. \tag{2.6}$$

Am notat în acest caz frecvenţa ω cu $\omega_{TLA}(k)$ pentru următoarele motive : relaţia (2.6) arată că ω tinde la zero cînd k tinde la zero, deci undele de tipul (2.6) sînt unde acustice şi deoarece corespund lui u_1 le-am numit unde translaţionale longitudinale acustice, ω este o mărime reală deoarece $\tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} > 0$. Studiind al doilea sistem independent (2.5.b) obţinem pentru determinarea frecvenţelor vibraţiilor proprii, deci pentru relaţia de dispersie, o ecuaţie de gradul $(P+1)$ în ω^2, deci foarte complicată pentru un număr mare de particule într-o celulă. Pentru a obţine rezultate mai simple, ne situăm în cazul în care în fiecare celulă avem doar două particule, deci $P = 1$, aceasta înseamnă că α şi β iau doar valoarea 1.

În acest caz, pentru relaţia de dispersie obţinem o ecuaţie de gradul doi în ω^2, care are următoarea formă :

$$\underset{11}{j}\,\underset{11}{j}(\omega^2)^2 + (\underset{11}{j}\,\underset{11}{c} - \underset{11}{j}\,\underset{11}{c})\omega^2 + \underset{1}{d}^2 - \underset{11}{c}\,\underset{11}{c} = 0. \tag{2.7}$$

Rezolvînd ecuaţia (2.7), obţinem două soluţii pentru ω^2, deci două ramuri de dispersie, date de formulele :

$$\omega_1^2(k) = \frac{\underset{11}{j}\,c - \underset{11}{j}\,\underset{11}{c} + \sqrt{(\underset{11}{j}\,\underset{11}{c} + \underset{11}{j}\,c)^2 - 4\,\underset{11}{j}\,\underset{11}{j}\,\underset{1}{d}^2}}{2\,\underset{11}{j}\,\underset{11}{j}}, \tag{2.8}$$

$$\omega_2^2(k) = \frac{\underset{11}{j}\,c - \underset{11}{j}\,\underset{11}{c} - \sqrt{(\underset{11}{j}\,\underset{11}{c} + \underset{11}{j}\,c)^2 - 4\,\underset{11}{j}\,\underset{11}{j}\,\underset{1}{d}^2}}{2\,\underset{11}{j}\,\underset{11}{j}}. \tag{2.9}$$

În condiţiile

$$\underset{11}{c}\,\underset{11}{j} - \underset{11}{j}\,\underset{11}{c} > 0,$$

$$(\underset{11}{j}\,\underset{11}{c} + \underset{11}{j}\,c)^2 - 4\,\underset{11}{j}\,\underset{11}{j}\,\underset{1}{d}^2 > 0,$$

$$\underset{11}{c}\,\underset{11}{j} - \underset{11}{c}\,\underset{11}{j} > \sqrt{(\underset{11}{j}\,\underset{11}{c} + \underset{11}{j}\,c)^2 - 4\,\underset{11}{j}\,\underset{11}{j}\,\underset{1}{d}^2} \leftrightarrow \underset{11}{c}\,\underset{11}{c} - \underset{1}{d}^2 < 0, \tag{2.10}$$

condiţii care sînt satisfăcute datorită faptului că densitatea de energie este o formă pătratică pozitiv definită, rezultă că membrii drepţi ai relaţiilor (2.8), (2.9) sînt nenegativi, deci frecvenţele ω_1 şi ω_2 sînt reale. Vom alege totdeauna pentru frecvenţe, o valoare pozitivă, bineînţeles în cazul în care o astfel de valoare există.

Relaţiile (2.8) şi (2.9) arată că ω_1 şi ω_2 sînt diferite de zero cînd k tinde la zero, deci undele care au aceste frecvenţe sînt unde optice cu frecvenţă mare în domeniul undelor cu lungime de undă mare, şi ele corespund cîmpurilor cinematice Φ_1 şi $\underset{1}{\Phi}_1$. Să vedem acum care din frecvenţe

corespund lui Φ_1 și care lui $\underset{1}{\Phi}$. Pentru aceasta ne situăm în cazul particular $\underset{1}{d} = 0$ și vom folosi rezultatele din [6]. În acest caz $\omega_1^2 = \frac{c}{j}$ și $\omega_2^2 = -\frac{\underset{11}{c}}{\underset{11}{j}}$.

Venind cu $\omega_1^2 = \frac{c}{j}$ în sistemul (2.5.b), vom obține sistemul

$$\begin{aligned} cB_1 &= cB_1, \\ \underset{11}{j}\frac{c}{j}\underset{1}{B} &= -\underset{11}{c}\underset{1}{B}_1. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Din sistemul (2.11), ținînd seama de condițiile (2.10), rezultă că $B_1 = 0$, aceasta ne arată că ω_1 corespunde undelor a căror amplitudine este B_1, deci undelor corespunzătoare mărimii cinematice Φ_1.

Introducînd în sistemul (2.5.b), $\omega_2^2 = -\frac{\underset{11}{c}}{\underset{11}{j}}$, obținem

$$\begin{aligned} -j\frac{\underset{11}{c}}{\underset{11}{j}}B_1 - cB_1 &= 0, \\ -\underset{11}{c}\underset{1}{B}_1 &= -\underset{11}{c}\underset{1}{B}_1. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Din sistemul (2.12) ținînd seama de condițiile (2.10), rezultă că $B_1 = 0$ aceasta ne arată că frecvența ω_2 corespunde undelor a căror amplitudine este $\underset{1}{B}_1$, deci undelor corespunzătoare mărimii cinematice $\underset{1}{\Phi}_1$.

Datorită celor arătate mai sus, și ținînd seama de semnificațiile mecanice a mărimilor cinematice Φ_1 și $\underset{1}{\Phi}_1$ am numit undele a căror frecvență este dată de ω_1 din (2.8), unde rotaționale longitudinale optice și le-am notat cu ω_{RLO}, iar undele a căror frecvență este dată de ω_2 din (2.9), unde micro micro-rotaționale longitudinale optice de indice $\alpha = 1$ și le-am nitat cu ω_{M_1RLO}.

În cazul general cînd $P \neq 1$, vom obține P unde micro-rotaționale longitudinale optice.

Aceste vibrații apar datorită mișcărilor relative ale particulelor situate în interiorul unei macroparticule a corpului cu microstructură. Caracteristica comună a frecvențelor proprii de tipul (2.8), (2.9) este independența lor de vectorul de undă k. Această independență apare evident numai în domeniul vibrațiilor cu lungime de undă foarte mare, adică în domeniul în care modelul continuu generalizat reflectă suficient de bine fenomenul de propagare a micilor perturbații într-un corp cristalin cu microstructură.

De asemenea, este clar că proprietățile undelor optice nu pot fi descrise cu ajutorul modelului elastic clasic, liniar sau neliniar. Deci dacă dorim să studiem propagarea undelor optice într-un mediu cristalin,

trebuie să utilizăm un model continuu mai general decît modelul elaborat de Navier-Cauchy-Green.

Vom trece acum la studiul celui de-al treilea subsistem independent, adică a sistemului (2.5.c) și deoarece este un sistem de $(50P + 4)$ ecuații, vom obține, pentru determinarea vibrațiilor proprii, deci pentru relația de dispersie, o ecuație de gradul $(5P + 4)$ în ω^2, care este foarte complicată și aproape imposibil de studiat.

Ne situăm și în studiul acestui sistem în cazul particular cînd în fiecare celulă avem doar două particule, deci $P = 1$, ceea ce înseamnă că α și β iau doar valoarea 1. În acest caz pentru relația de dispersie obținem o ecuație de gradul nouă în ω^2 încă foarte complicată, dar care în cazul $k = 0$ are următoarea formă :

$$\rho(\omega^2)^2 (\underset{11}{a} - \underset{11}{\rho}\omega^2)^3 [(c - j\omega^2)(\underset{11}{c} + j\omega^2) - \underset{1}{d}^2]^2 = 0. \qquad (2.13)$$

Studiul acestei ecuații ne arată că avem două ramuri acustice și șapte ramuri optice. Pentru a putea individualiza ramurile de dispersie și a putea studia comportarea ramurilor acustice, precum și de-a face comparația cu rezultatele obținute din modelul elastic, clasic, liniar, vom face și în sistemul (2.5.c) unele aproximații și anume : ținînd seama de dimensiunea coeficienților de material $\underset{11}{a}$ și de faptul că $\underset{1}{X}_1$, $\underset{1}{X}_2$, $\underset{1}{X}_3$ sînt mărimi mici în raport cu dimensiunile celulei, vom neglija în sistemul (2.5.c) produsele dintre $\underset{11}{a}$ și $\underset{1}{X}_1$, $\underset{1}{X}_2$, $\underset{1}{X}_3$ față de coeficienții de material $\tilde{\mu}$, c, $\underset{1}{d}$ și în aceste condiții sistemul (2.5.c) se desface în trei subsisteme independente și anume :

$$\begin{aligned}
\rho\omega^2 A_2 &= (\tilde{\mu} + c) k^2 A_2 - ick B_3 + i\underset{1}{d}k \underset{1}{B}_3, \\
j\omega^2 B_3 &= cB_3 + ickA_2 - \underset{1}{d}\underset{1}{B}_3, \\
\underset{11}{j}\omega^2 \underset{1}{B}_3 &= \underset{1}{d} B_3 + i\underset{1}{d}k A_2 - \underset{11}{c}\underset{1}{B}_3 ;
\end{aligned} \qquad (2.14.c)$$

$$\begin{aligned}
\rho\omega^2 A_3 &= (\tilde{\mu} + c) k^2 A_3 + ick B_2 - i\underset{1}{d}k \underset{1}{B}_2, \\
j\omega^2 B_2 &= cB_2 + ick A_3 - \underset{1}{d}\underset{1}{B}_2, \\
\underset{11}{j}\omega^2 \underset{1}{B}_2 &= \underset{1}{d}B_2 - i\underset{1}{d}k A_3 - \underset{11}{c}\underset{1}{B}_2 ;
\end{aligned} \qquad (2.15.c)$$

$$\begin{aligned}
\underset{11}{\rho}\omega^2 \underset{1}{A}_1 &= \underset{11}{a}\underset{1}{A}_1, \\
\underset{11}{\rho}\omega^2 \underset{1}{A}_2 &= \underset{11}{a}\underset{1}{A}_2, \\
\underset{11}{\rho}\omega^2 \underset{1}{A}_3 &= \underset{11}{a}\underset{1}{A}_3.
\end{aligned} \qquad (2.16.c)$$

Ne vom ocupa de studiul subsistemului (2.14.c). În acest caz pentru relația de dispersie obținem următoarea ecuație :

$$\rho j_{11} j (\omega^2)^3 - [j_{11} j (\tilde{\mu} + c)k^2 + \rho(c j - j_{11} c)](\omega^2)^2 - \{\rho(c_{11} c - d_1^2) +$$

$$+ [j(c_{11} c - d_1^2) + \tilde{\mu}(j_{11} c - c j)]k^2\}\omega^2 + [\tilde{\mu}(c_{11} c - d_1^2)]k^2 = 0. \quad (2.17)$$

Ecuația (2.17) este încă destul de complicată, dar cu ajutorul ei pot fi obținute cîteva rezultate care vor fi valabile în domeniul vibrațiilor cu lungime de undă foarte mare, deci tocmai în acel domeniu în care modelul continuu utilizat reflectă satisfăcător comportarea cristalelor optice. Deci în cazul $k = 0$ ecuația (2.17) are trei rădăcini, care sînt date de expresiile :

$$\omega_1^2(0) = 0, \quad (2.18)$$

$$\omega_2^2(0) = \frac{c j - c_{11} j + \sqrt{(c_{11} j + c j)^2 - 4 j_{11} j d_1^2}}{2 j_{11} j}, \quad (2.19)$$

$$\omega_3^2(0) = \frac{c j - c_{11} j - \sqrt{(c_{11} j + c j)^2 - 4 j_{11} j d^2}}{2 j_{11} j}. \quad (2.20)$$

Relațiile (2.18), (2.19), (2.20) ne arată că relația de dispersie (2.17) are o ramură acustică și două ramuri optice. Frecvențele date de (2.19) și (2.20) sînt reale datorită condițiilor (2.10) și corespund cîmpurilor cinematice care apar în sistemul (2.14.c). Să vedem acum care din frecvențele (2.18), (2.19) și (2.20) corespund cîmpurilor cinematice u_2, Φ_3, Φ_{3_1}. Introducînd (2.18) în (2.14) obținem sistemul :

$$\begin{aligned} (\tilde{\mu} + c)k^2 A_2 - ick B_3 + i d_1 k B_{3_1} &= 0, \\ c B_3 + ick A_2 - d_{1\,1} B_3 &= 0, \\ d_1 B_3 + i d_1 k A_2 - c_{11\,1} B_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.21)$$

sistem, care în cazul $k = 0$ se reduce la

$$\begin{aligned} c B_3 - d_{1\,1} B_3 &= 0, \\ d_1 B_3 - c_{11\,1} B_3 &= 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

care admite numai soluţia banală $B_3 = 0$ şi $\underset{1}{B}_3 = 0$, deoarece determinantul coeficienţilor necunoscutelor B_3 şi $\underset{1}{B}_3$ este tocmai $c\underset{11}{c} - \underset{1}{d}^2$ care conform cu (2.10) este diferit de zero, sistemul (2.22) fiind omogen, rezultă că frecvenţa $\omega_1(0)$ dată de (2.18) corespunde undelor a căror amplitudine este A_2, deci undelor corespunzătoare mărimii cinematice u_2. Ţinînd seama de semnificaţia mecanică a mărimii cinematice u_2, am numit undele a căror frecvenţă este dată de ω_1 din (2.18), unde translaţionale transversale acustice şi le-am notat cu ω_{TTA}.

În continuare, pentru a studia căror cîmpuri cinematice corespund frecvenţele date de (2.19) şi (2.20), ne-am situat în cazul particular $\underset{1}{d} = 0$.

În acest caz $\omega_2^2(0) = \dfrac{c}{j}$ şi $\omega_3^2(0) = -\dfrac{\underset{11}{c}}{\underset{11}{j}}$.

Introducînd $\omega_2^2(0) = \dfrac{c}{j}$ în (2.14.c), pentru $k = 0$, obţinem sistemul :

$$\rho \frac{c}{j} A_2 = 0,$$

$$cB_3 = c\underset{1}{B}_3, \tag{2.23}$$

$$(\underset{11}{j}c + j\underset{11}{c})\underset{1}{B}_3 = 0.$$

Din sistemul (2.23), ţinînd seama de faptul că $c \neq 0$, $\rho \neq 0$ şi de condiţiile (2.10), rezultă, că $A_2 = 0$ şi $\underset{1}{B}_3 = 0$, aceasta ne arată că frecvenţa ω_2 corespunde undelor a căror amplitudine este B_3, deci undele corespunzătoare mărimii cinematice Φ_3.

Ţinînd seama de semnificaţia mecanică a mărimii Φ_3 am numit undele, a căror frecvenţă este dată de ω_2 din (2.19), unde rotaţionale transversale optice şi le-am notat cu ω_{RTO}.

În sfîrşit, introducînd $\omega_3^2(0) = -\dfrac{\underset{11}{c}}{\underset{11}{j}}$ în (2.14 c), în cazul $k = 0$, obţinem sistemul

$$-\rho \frac{\underset{11}{c}}{\underset{11}{j}} A_2 = 0,$$

$$(\underset{11}{j}\underset{11}{c} + \underset{11}{j}\, c)B_3 = 0, \tag{2.24}$$

$$\underset{11}{c}\underset{1}{B}_3 = \underset{11}{c}\underset{1}{B}_3.$$

Din sistemul (2.24), ţinînd seama de faptul că $\underset{11}{c} \neq 0$ şi de condiţiile (2.10), rezultă că $A_2 = 0$ şi $B_3 = 0$, aceasta ne arată că frecvenţa

ω_3 corespunde undelor a căror amplitudine este B_3, deci undelor corespunzătoare mărimii cinematice Φ_3. Avînd în vedere semnificația mecanică a mărimii Φ_3, am numit undele a căror frecvență este dată de ω_3 din (2.20), unde microrotaționale transversale optice de indice $\alpha = 1$ și le-am notat cu ω_{M_1RTO}.

Nu vom insista mai mult asupra studiului ramurilor optice a relației de dispersie (2.17) și ne vom ocupa mai amănunțit de studiul comportării ramurii acustice (2.18) în domeniul vibrațiilor cu lungime de undă foarte mare. Proprietățile funcției $\omega_{TTA}(k)$ în acest domeniu, vor fi caracterizate satisfăcător de numerele $\omega'_{TTA}(0)$, $\omega''_{TTA}(0)$ și $\omega'''_{TTA}(0)$, care reprezintă valorile derivatelor de ordinul unu, doi, respectiv trei, ale funcției $\omega_{TTA}(k)$ în raport cu k, considerate în punctul $k = 0$.

Un calcul foarte laborios, arată că numerele de mai sus au următoarele expresii :

$$\omega'(0) = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}}{\rho}}, \quad \omega''(0) = 0, \quad \omega'''(0) = -3j\sqrt{\frac{\tilde{\mu}}{\rho}}. \tag{2.25}$$

Deoarece $\tilde{\mu} > 0$, rezultă că $\omega'(0)$ este o mărime reală, iar $\omega'''(0)$ este o mărime reală strict negativă.

Notînd cu

$$v_{TT}(k) = \frac{d\omega_{TTA}(k)}{dk}, \tag{2.26}$$

viteza de grup a vibrațiilor translaționale transversale acustice, rezultă că pentru k suficient de mic, deci în domeniul undelor lungi, avem

$$v_{TT}(k) = \left(1 - \frac{3}{2}jk^2\right) v_{TT}, \text{ unde } v_{TT} = v_{TT}(0) = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}}{\rho}} \tag{2.27}$$

și cantitatea $\left(1 - \frac{3}{2}jk^2\right)$ fiind strict pozitivă, pentru k suficient de mic, avem că $v_{TT}(k)$ este o mărime reală.

Studiul experimental [7] al propagării vibrațiilor acustice în cristale moleculare a arătat că viteza de grup a oscilațiilor acustice transversale are valoare mai mică decît valoarea determinată teoretic, pe baza modelului elastic clasic, abaterea fiind cu atît mai mare cu cît lungimea de undă a vibrațiilor acustice studiate este mai mică, și acestea sînt aproximativ egale în cazul în care oscilațiile au lungime de undă foarte mare, deci în domeniul undelor elastice obișnuite. Aceste rezultate experimentale sînt în concordanță cu rezultatul (2.27), obținut de noi cu ajutorul modelului continuu generalizat de tip Voigt-Duhem-Cosserat, fiindcă într-adevăr, deoarece $j > 0$, avem

$$v_{TT}(k) \leqslant v_{TT}. \tag{2.28}$$

Rezultatele obținute arată că, în cazurile în care există motive ca să presupunem că perturbațiile exterioare produc în corp oscilații cu lungime de undă scurtă, trebuie să renunțăm la utilizarea modelului elastic clasic, care nu poate reflecta corect comportarea solidului cristalin elastic, și să utilizăm un model continuu generalizat care ține seama în mod explicit de influența unor distanțe interne caracteristice structurii cristaline considerate, fiind astfel capabil să reflecte fenomenul de dispersie spațială a undelor, fenomen ce a fost observat experimental.

Rezultatele obținute în studiul sistemului (2.14.c) sînt valabile, cu modificările corespunzătoare, și pentru sistemul (2.15.c), care este identic ca structură cu sistemul (2.14.c).

Aici este momentul să facem o observație importantă și anume: studiind sistemul (2.15.c), se obține pentru frecvențele corespunzătoare mărimilor cinematice u_3, Φ_2 și $\overset{1}{\Phi}_2$,, care intervin în sistem, valori identic egale cu cele corespunzătoare mărimilor cinematice u_2, Φ_3. $\overset{1}{\Phi}_3$, care intervin în sistemul (2.14.c). Acest rezultat nu este surprinzător deoarece corpul fiind considerat izotrop, ceea ce se întîmplă pe o direcție perpendiculară pe direcția de propagare, se întîmplă și pe orice altă direcție perpendiculară tot pe direcția de propagare.

Surprinzător este faptul că frecvențele corespunzătoare mărimilor cinematice Φ_2, Φ_3 și $\overset{1}{\Phi}_2$, $\overset{1}{\Phi}_3$ sînt, pentru $k = 0$, identic egale cu frecvențele corespunzătoare cîmpurilor cinematice Φ_1, respectiv $\overset{1}{\Phi}_1$, obținute din studiul sistemului (2.5.b).

Acest fapt poate apărea din motivul că pentru a obține informații asupra frecvențelor cu care oscilează mărimile Φ_2, Φ_3, respectiv $\overset{1}{\Phi}_2$, $\overset{1}{\Phi}_3$, în sistemul (2.5.c) am făcut unele aproximații.

În sfîrșit, analizînd sistemul (2.16.c), vom obține trei ramuri de dispersie, care se dovedesc a fi optice, deoarece ele sînt diferite de zero pentru k tinzînd la zero și a căror valoare sînt egale cu $\frac{a_{11}}{\rho_{11}}$, corespunzătoare mărimilor cinematice $\overset{1}{u}_1$, $\overset{1}{u}_2$ și $\overset{1}{u}_3$. Ținînd seama de semnificația cinematică a mărimilor $\overset{1}{u}_1$, $\overset{1}{u}_2$, $\overset{1}{u}_3$, vom numi undele corespunzătoare ramurilor de dispersie, unde micro-translaționale longitudinale optice de indice $\alpha = 1$ și le vom nota cu ω_{M_1TLO}, care corespund lui $\overset{1}{u}_1$, și două tipuri de unde micro-translaționale transversale optice de indice $\alpha = 1$, care corespund mărimilor u_2 și u_3 și pe care le vom nota cu ω_{M_1TTO}, observația precedentă este valabilă și în acest caz.

Rezumînd, putem spune că în cazul cristalului cu structură complexă, omogen și izotrop, cînd în fiecare celulă avem două particule, deci $P = 1$, modelat liniar, avem 12 ramuri de dispersie, dintre care trei acustice și nouă optice, corespunzătoare celor 12 componente cinematice ale cîmpurilor care intervin în sistem.

În cazul general, cînd $P \neq 1$, vom avea $6P + 6$ ramuri de dispersie, dintre care 3 ramuri acustice și $6P + 3$ ramuri optice, corespunzătoare celor $6P + 6$ componente cinematice ale cîmpurilor care intervin în sistemul ecuațiilor de mișcare.

Microstructura caracteristică cristalelor considerate se reflectă în modelul continuu atașat, prin apariția lui $\underset{\alpha\beta}{\rho}$, $\underset{\alpha\beta}{j}$, și a constantelor macroscopice de material de tip Voigt-Duhem-Cosserat, c, $\underset{\alpha\beta}{a}$, $\underset{\alpha}{d}$, $\underset{\alpha\beta}{c}$. Tocmai prezența în structura modelului a acestor caracteristici de material, permite descrierea vibrațiilor optice, care se pot propaga în corp, a cuplajului existent între undele acustice și optice transversale și a fenomenului de dispersie spațială a oscilațiilor, adică a acelor fapte caracteristice care au fost puse în evidență în studiul experimental al comportării dinamice a cristalelor moleculare.

Primită la redacție la 7 martie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. M. Ariciuc, E. Soós, *Un model discret de tip Voigt-Duhem-Cosserat al cristalelor moleculare cu structură complexă*, St. cerc. mat., **28**, *1*, 9—30 (1976).
2. M. Ariciuc, E. Soós, *Un model continuu neliniar de tip Voigt-Duhem-Cosserat cl cristalelor moleculare cu structură complexă*, St. cerc. mat.,**27**, *6*, 627—650 (1975).
3. M. Ariciuc, E. Soós, *Un model continuu liniar de tip Voigt-Duhem-Cosserat al cristalelor moleculare cu structură complexă. Legătură între modelul discret și modelul continuu*, St. cerc. mat., **27**, *5*, 507—513 (1975).
4. M. Ariciuc, *Formularea problemei la limită în tensiuni în cazul modelului liniar al cristalului molecular cu structură complexă. Teorema de unicitate* (va apare).
5. M. Born, K. Huang, *Dynamical theory of crystal lattices*, Clarendon Press, Oxford, 1954.
6. L. Brillouin, M. Parodi, *Propagation des ondes dans les milieaux périodiques*, Masson-Dunod, Paris, 1956.
7. А.Н. Китайгородский, *Молекулярные кристаллы*, Изд. Наука, Москва, 1971.
8. R. D. Mindlin, *Microstructure in linear elasticity*, Arch. Rot. Mech. Anal., **16**,51—78 (1964).

CALCULUL HIDRODINAMIC AL PALETAJULUI ROTORIC AL UNEI TURBOMAŞINI AXIALE BULB. I

de IOAN JELEV
Institutul de cercetări hidrotehnice

În prima parte a lucrării se prezintă ipotezele referitoare la structura cinematică a mişcării, ecuaţiile de echilibru hidrodinamic pentru rotor, condiţiile la limită, precum şi ecuaţiile de mişcare scrise în diferenţe finite. Delimitarea domeniului studiat se face ce ajutorul a două familii de suprafeţe de curent (suprafeţele de curent axial-simetricu $\Psi(R, Z) = \text{const.}$ şi suprafeţele de curent medii dintre pale $S(R, \Theta, Z) = \text{const.}$) introduse în ecuaţiile de mişcare prin intermediul vitezei relative $\bar{w}$ exprimată funcţie de $S(R, \Theta, Z)$ şi $\Psi(R, Z)$. Partea a II-a cuprinde aplicarea metodei preconizate la calculul a două rotoare bulb reversibile destinate echipării unor hidrocentrale de pe riurile Olt şi Mostiştea. Rotoarele executate în cadrul I.C.H. au fost încercate în laboratorul de maşini hidraulice din Reşiţa. Rezultatele experimentale sînt prezentate sub forma topogramelor cuprinzînd curbele de randament obţinute în regim de pompare, respectiv turbinare.

1. GENERALITĂŢI

Întrucît palele rotorului descriu odată cu acesta o mişcare de rotaţie, pentru studiul lor hidrodinamic se poate folosi un sistem de referinţă absolut, solidar, de exemplu, cu statorul turbomaşinii, sau un sistem de referinţă relativ, solidar cu rotorul şi descriind odată cu acesta o mişcare de rotaţie. Alegerea unuia sau altuia dintre cele două sisteme prezintă importanţă din punct de vedere fizic şi matematic. Din punct de vedere fizic mişcarea într-un sistem de referinţă absolut este nepermanentă (datorită numărului finit de pale ale rotorului şi aparatului director, cît şi grosimii acestora, ceea ce atrage după sine dificultăţi de calcul suplimentare prin introducerea timpului care poate fi privit ca o a patra dimensiune. În cazul folosirii unui sistem de referinţă relativ, mişcarea în rotor este permanentă (în realitate şi mişcarea relativă are un caracter nepermanent datorită perturbaţiilor periodice produse de palele aparatului director, perturbaţii ce pot fi neglijate în cazul proiectării hidrodinamice corecte a palelor directoare).

2. IPOTEZE ŞI NOTAŢII

Pentru studiu se utilizează un sistem de coordonate cilindrice (R, Θ, Z), avînd axa OZ dirijată în lungul axei de simetrie a rotorului şi descriind o mişcare de rotaţie cu viteza unghiulară $\Omega_0 = \text{const.}$, egală cu

viteza unghiulară a rotorului (fig. 1);

— fluidul se consideră perfect (incompresibil și fără vîscozitate);

— mișcarea neperturbată este potențială ($k = 0$), sau elicoidală ($k \neq 0$);

— în mișcarea absolută toate mărimile cinematice și dinamice (viteze, presiuni, forțe, variabile după direcția tangențială

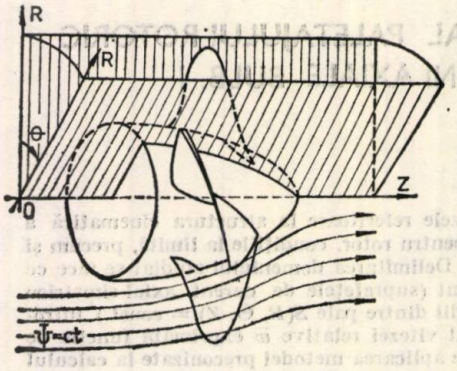


Fig.1

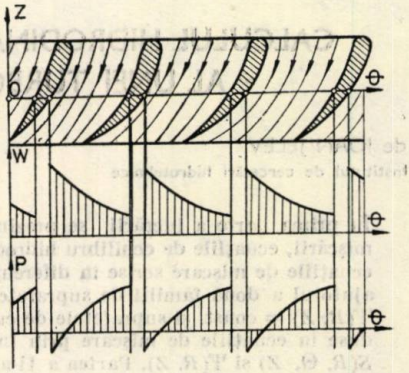


Fig.2

(fig. 2)) au valori mediate în timp, mișcarea studiindu-se pe suprafața de curent medie dintre pale; această ipoteză simplificatoare atrage după sine anularea derivatelor în raport cu timpul a tuturor acestor mărimi;

— rotorul are un număr foarte mare de pale N (dar nu infinit), astfel încît $(1/N) \leqslant \varepsilon$ (ε este suficient de mic pentru ca ε^2 să fie neglijabil în raport cu ceilalți termeni din ecuațiile de mișcare).

În continuare vom folosi notațiile:

R, Θ, Z — coordonate cilindrice curente;
R_1; R_2 — raza butucului, respectiv a carcasei exterioare în zona rotorului;
δ — unghiul format de carcasa exterioară sau de carena bulb cu axa OZ;
$\bar{e}_R$, $\bar{e}_\Theta$, $\bar{e}_Z$ — versorii axelor de coordonate cilindrice;
V, W, U — viteza absolută, relativă și tangențială;
Ω, Ω_0, n — viteza unghiulară, viteza unghiulară la regim nominal, și turația;
V_R, V_Θ, V_Z — componentele radială, tangențială și axială ale vitezei absolute;
V_1, V_2 — viteza absolută în secțiunile de intrare, respectiv ieșire ale domeniului studiat;
W_R, W_Θ, W_Z — componentele radială, tangențială și axială ale vitezei relative;
ρ, g — densitatea apei, respectiv acceleratia gravitației;
p, Q, H_0 — presiunea, debitul și căderea nominală;
N — numărul palelor rotorice;
$V_{\Theta 2}$ — componenta tangențială a vitezei absolute pe carcasa exterioară;
$\Gamma(R, Z) = R \cdot V_\Theta$ — produs proporțional cu cuplul hidraulic (uneori în text prin produsul $\Gamma = R \cdot V_\Theta$ ne vom referi direct la cuplul hidraulic);
i, j — indici ce caracterizează poziția unui punct curent din rețeaua pentru integrarea numerică;
$F(R, Z)$, $F_{i,j}$ — intensitatea cîmpului de forțe uniform distribuit pe suprafața palei, respectiv valoarea acestuia în punctele i, j;
$\Psi(R, Z) = \text{const.}$ — ecuația suprafețelor de curent axial-simetrice;
$S(R, \Theta, Z) = \theta - \Theta(R, Z) = \text{const.}$ — ecuația suprafeței de curent medii dintre pale;

$\bar{n}$ — versorul direcţiei normale la suprafaţa Ψ sau S;

$d\bar{s}$, $d\bar{A}$ — elementul de lungime respectiv de suprafaţă pe o curbă ce înconjoară rotorul, şi pe suprafaţa mărginită de aceasta;

$\varphi(R, Z)$, $\varphi_{i,j}$ — funcţia de perturbaţie şi valoarea acesteia în punctele i, j;

$$\begin{cases} E(\Psi) = \dfrac{p}{\varrho} + \dfrac{V^2}{2} + gZ, \\ H(\Psi) = E(\Psi) - UV_\theta \end{cases}$$ — energia specifică în mişcarea absolută şi relativă;

Ψ_{1-1}, Ψ_{2-2}, Ψ_{0p}, Ψ_{0e} — funcţia de curent axial-simetric în secţiunea de intrare-ieşire a domeniului studiat, respectiv în ipoteza mişcării potenţiale sau elicoidale;

χ, k, β, $\chi_{i,j}$ — coeficientul de contracţie a curentului relativ datorită grosimii palelor, coeficientul de proporţionalitate din mişcarea elicoidală, unghiul dintre viteza relativă şi tangenţială la pală şi coeficientul de contracţie în punctul de coordonate i, j;

$r = \dfrac{R}{R_1}$, $z = \dfrac{Z}{R_1}$, $r_{i,j}$, $z_{i,j}$ — coordonate cilindrice adimensionale şi valorile acestora în punctele i, j;

$v_r = \dfrac{V_R}{V_1}$, $v_\theta = \dfrac{V_\theta}{\Omega_0 R_1}$, $v_z = \dfrac{V_Z}{V_1}$ — mărimea adimensională a componentelor radială, tangenţială şi axială ale vitezei absolute;

$w_r = \dfrac{W_R}{V_1}$, $w_\theta = \dfrac{W_\theta}{\Omega_0 R_1}$,

$w_z = \dfrac{W_Z}{V_1}$ — mărimea adimensională a componentelor radială, tangenţială şi axială ale vitezei relative;

$u = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$, $w = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varphi}{\partial r}$, $u_{i,j}$, $w_{i,j}$ — componentele radială şi axială ale vitezei de perturbaţie şi valorile acestora în punctele de coordonate i, j;

$\omega = \Omega/\Omega_0$ — viteză unghiulară adimensională;

v_r', v_z', $v_{ri,j}'$, $v_{zi,j}'$ — componentele radială şi axială ale vitezei de perturbaţie datorate formei sferice a butucului rotorului în zona palelor şi valorile acestora în punctul de coordonate i, j;

$\Upsilon = rv_\theta = \dfrac{\Gamma}{\Omega_0 R_1^2}$, $\Upsilon_{i,j}$ — valoarea adimensională a produsului $r \cdot v_\theta$ (proporţional cu cuplul hidraulic adimensional) şi valoarea acestuia în punctul de coordonate i, j;

$\alpha = \dfrac{R_2\Omega_0}{V_1}$ — constantă adimensională;

$h(\Psi)$, $e(\Psi)$ — energia specifică în mişcarea relativă şi absolută în coordonate adimensionale;

Δr, Δz — paşii de calcul pe direcţia radială şi axială a reţelei cu diferenţe finite;

$\Theta_{i,j}$, $\Theta_{i,c}$ — coordonata suprafeţei palei într-un punct curent i, j, respectiv pe butucul rotorului şi carcasa exterioară;

$m = \dfrac{dh}{d\Psi}$, $m_{i,j}$ — derivata energiei specifice şi valoarea acesteia în punctul de coordonate i, j;

$P_{i,j}$, $B_{i,j}$ — valoarea funcţiilor $\mathcal{P}(r, z)$ şi $B(r, z)$ într-un punct curent de coordonate i, j;

$f' = \left| \dfrac{\bar{F}}{\text{grad } S} \right|$ — coeficient utilizat în exprimarea cîmpului de forţe;

$q_i = \dfrac{Q_i}{2\pi V_1}$ — debitul specific al surselor potenţiale şi elicoidale utilizate pentru studiul mişcării neperturbate;

r', z' — variabile curente de integrare;

$b = \dfrac{4r \cdot r'}{(z - z')^2 + (r + r')^2}$ — coeficient variabil din expresia integralelor eliptice;

$E_i = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - b^2 \sin^2\alpha} \cdot d\alpha$ — integrala eliptică completă de speţa a doua;

$J_1(k \cdot r)$ — funcţia Bessel de speţa întîi şi ordinul întîi;

$\mathcal{L}(*) = R\dfrac{\partial}{\partial R}\left(\dfrac{1}{R}\dfrac{\partial *}{\partial R}\right) + \dfrac{\partial^2 *}{\partial Z^2}$ — operator utilizat în cursul calculelor;

$$\frac{D(A, B)}{D(R, Z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial A}{\partial R} & \dfrac{\partial A}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial B}{\partial R} & \dfrac{\partial B}{\partial Z} \end{vmatrix}$$ — determinantul funcţional (iacobianul funcţiilor A, B).

3. ECUAŢIILE DE MIŞCARE

3.1. MIŞCAREA RELATIVĂ

Ţinînd seama de ipotezele făcute, starea de echilibru dinamic a unei particule fluide este descrisă de sistemul de ecuaţii Euler. Forma vectorială a ecuaţiilor după transformarea Lamb-Gromeka, împreună cu ecuaţia de continuitate capătă pentru mişcarea relativă următoarele expresii cunoscute:

$$\operatorname{rot} \bar{V} \times \bar{W} = \bar{F}(R, Z) - \operatorname{grad} H,$$

$$\nabla \cdot (\chi \bar{W}) = 0, \tag{3.1}$$

în care prin cîmpul de forţe $\bar{F}(R, Z)$ se ţine seama de acţiunea palelor rotorului asupra curentului de apă [1]. Pentru ca soluţia sistemului (3.1) să existe şi să fie unică, trebuie stabilite condiţiile la limită, ceea ce implică precizarea frontierelor mişcării. În interior şi exterior domeniul de mişcare luat în consideraţie este cel delimitat de butucul rotorului şi carcasa exterioară. Pe direcţia tangenţială limitarea este făcută de intradosul, respectiv extradosul a două pale consecutive, iar pe direcţia axială de plane paralele situate înainte şi după rotor. Mişcarea în acest domeniu are un caracter tridimensional, iar condiţiile la limită de natură fizică pe suprafaţa pereţilor solizi sînt:

$$\begin{aligned} \bar{W} \cdot \operatorname{grad} \psi_{1.2} &= 0, \\ \bar{W} \cdot \operatorname{grad} S_{i.e} &= 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

unde $\Psi_{1,2}(R, Z) = \text{const.}$ şi $S_{i.e}(R, \Theta, Z) = \text{const.}$ reprezintă ecuaţia suprafeţelor carcasei, butucului, respectiv intradosului şi extradosului palelor. În ipoteza rotorului cu un număr infinit de pale (sau foarte mare), $\Psi_{1.2}(R, Z)$ se confundă cu suprafeţele de curent axial-simetrice $\Psi(R, Z)$, iar $S_{i.e}(R, \Theta, Z)$ se înlocuieşte cu suprafeţele de curent medii dintre pale

$S(R, \Theta, Z)$. Condiţiile (3.2) devin :

$$\begin{aligned} \overline{W} \cdot \text{grad } \Psi(R, Z) &= 0, \\ \overline{W} \cdot \text{grad } S(R, \Theta, Z) &= 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

În orice punct P din domeniul studiat prin care trece o linie de curent relativ (C), determinată de intersecţia suprafeţelor de curent $S(R, \Theta, Z)$ şi $\Psi(R, Z)$, relaţiile (3.3) sînt valabile. Ecuaţia acestei linii de curent este

$$\frac{W_R}{\mathrm{d}R} = \frac{W_\theta}{R\,\mathrm{d}\Theta} = \frac{W_Z}{\mathrm{d}Z}. \tag{3.4}$$

Soluţia generală a ecuaţiei (3.4) este reprezentată de curbe rezultate prin intersecţia a două suprafeţe depinzînd fiecare de un singur parametru. Existenţa şi unicitatea soluţiei presupune ca prin orice punct P din spaţiul considerat să treacă numai o singură linie de curent [2]. Această condiţie este asigurată dacă vectorul $\overline{W}$ este o funcţie continuă cu derivate continui şi este diferit de zero în orice punct din spaţiu. În acest caz relaţiile (3.3) pot fi exprimate matematic printr-o singură relaţie :

$$\overline{W} = W_R\bar{e}_R + W_\theta\bar{e}_\theta + W_Z\bar{e}_Z = \frac{1}{\chi(R, Z)} \text{grad } \Psi(R, Z) \times \text{grad } S(R, \Theta, Z) =$$

$$= \frac{1}{\chi(R, Z)} \begin{vmatrix} \bar{e}_R & \bar{e}_\theta & \bar{e}_Z \\ \dfrac{\partial\Psi}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial\Psi}{\partial\Theta} & \dfrac{\partial\Psi}{\partial Z} \\ \dfrac{\partial S}{\partial R} & \dfrac{1}{R}\dfrac{\partial S}{\partial\Theta} & \dfrac{\partial S}{\partial Z} \end{vmatrix}, \tag{3.5}$$

relaţie ce din punct de vedere geometric exprimă faptul că viteza relativă $\overline{W}$ este perpendiculară atît pe vectorul grad Ψ, cît şi pe vectorul grad S, deci este tangentă la ambele suprafeţe de curent ca şi la linia de curent relativ (fig. 3). Relaţia (3.5) permite reducerea studiului unei probleme tridimensionale la studiul mişcării bidimensionale pe două suprafeţe de curent ($S(R, \Theta, Z)$ şi $\Psi(R, Z)$).

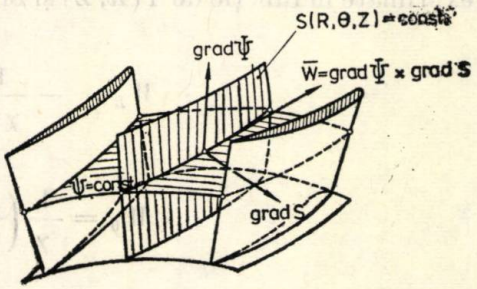


Fig. 3

Pentru domeniul de mişcare delimitat de suprafeţe de curent, în ipoteza mişcării permanente şi a unui fluid incompresibil, ecuaţia de continuitate se exprimă sub forma simplă :

$$W_{m1}\,\mathrm{d}A_1 = W_{m2}\,\mathrm{d}A_2 = \text{const.} \tag{3.6}$$

unde $\mathrm{d}A$ reprezintă elementul de suprafaţă, iar W_m este componenta meridiană a vitezei relative medii în secţiunea respectivă. În ipoteza unei structuri potenţiale sau elicoidale a curentului meridian, ecuaţia de continuitate pentru domeniul cuprins între două suprafeţe de curent axial-simetrice Ψ_i şi Ψ_{i+1} este

$$W_{m1}\,\mathrm{d}A_1 = W_{m2}\,\mathrm{d}A_2 = Q_i = 2\pi\,(\Psi_{i+1} - \Psi_i).$$

Sistemul (3.1) proiectat pe cele trei direcţii de coordonate, împreună cu ecuaţia de continuitate (3.6) devine :

$$\begin{gathered}
W_Z\left(\frac{\partial V_R}{\partial Z} - \frac{\partial V_Z}{\partial R}\right) - \frac{W_\theta}{R}\left[\frac{\partial (RV_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial V_R}{\partial \theta}\right] = f'\frac{\partial S}{\partial R} - \frac{\partial H}{\partial R},\\
\frac{W_R}{R}\left[\frac{\partial (RV_\theta)}{\partial R} - \frac{\partial V_R}{\partial \theta}\right] - W_Z\left(\frac{1}{R}\frac{\partial V_Z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial Z}\right) = f'\frac{1}{R}\frac{\partial S}{\partial \theta} - \frac{1}{R}\frac{\partial H}{\partial \theta},\\
W_\theta\left(\frac{1}{R}\frac{\partial V_Z}{\partial \theta} - \frac{\partial V_\theta}{\partial Z}\right) - W_R\left(\frac{\partial V_R}{\partial Z} - \frac{\partial V_Z}{\partial R}\right) = f'\frac{\partial S}{\partial Z} - \frac{\partial H}{\partial Z},\\
W_{m1}\,\mathrm{d}A_1 = W_{m2}\,\mathrm{d}A_2.
\end{gathered} \tag{3.7}$$

Condiţiile la limită ataşate sistemului (3.7) diferă în funcţie de problema pe care dorim să o rezolvăm, aşa cum se va vedea în capitolul următor. Cu ajutorul relaţiei (3.5) componentele vitezei relative $\bar{W}$ pot fi exprimate în funcţie de $\Psi(R, Z)$ şi $S(R, \Theta, Z)$:

$$\begin{gathered}
W_R = -\frac{1}{\chi R}\frac{\partial \Psi}{\partial Z},\\
W_\theta = \frac{1}{\chi}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\frac{\partial S}{\partial R} - \frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial S}{\partial Z}\right),\\
W_Z = \frac{1}{\chi R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}.
\end{gathered} \tag{3.8}$$

Ţinînd seama de (3.8), ecuaţiile (3.7) pot fi scrise :

$$\frac{1}{\chi R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\left(-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial \Psi}{\partial R}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{\chi R}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial \Theta}{\partial Z}-\frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial \Theta}{\partial Z}\right)\frac{\partial \Gamma}{\partial R}=-f'\frac{\partial \Theta}{\partial R}-\frac{\partial H}{\partial R},$$

$$-\frac{1}{\chi R^2}\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\frac{\partial \Gamma}{\partial R}-\frac{1}{\chi R}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\left(-\frac{1}{R}\frac{\partial \Gamma}{\partial Z}\right)=\frac{f'}{R}, \tag{3.9}$$

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\frac{\partial \Theta}{\partial R}-\frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial \Theta}{\partial Z}\right)\frac{1}{\chi R}\frac{\partial \Gamma}{\partial Z}+\frac{1}{\chi R}\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\left(-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R^2}\frac{\partial \Psi}{\partial R}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial R^2}\right)=-f'\frac{\partial \Theta}{\partial Z}-\frac{\partial H}{\partial Z}.$$

Tot din (3.8), componenta tangenţială a vitezei relative poate fi exprimată în funcţie de turaţie şi de cuplul hidraulic :

$$W_\theta=\frac{1}{\chi}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\frac{\partial S}{\partial R}-\frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial S}{\partial Z}\right)=-\Omega R+V_\theta=-\Omega R+\frac{\Gamma(R,Z)}{R} \tag{3.10}$$

sau

$$\Omega R^2-\Gamma=-\frac{R}{\chi}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial R}\frac{\partial \Theta}{\partial Z}-\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\frac{\partial \Theta}{\partial R}\right)=-\frac{R}{\chi}\frac{D(\Psi,\Theta)}{D(R,Z)}. \tag{3.11}$$

Folosind notaţiile din capitolul 2 ecuaţiile (3.9) se scriu sub o formă mai compactă :

$$-\frac{1}{\chi R^2}\frac{\partial \Psi}{\partial R}\mathscr{F}(\Psi)-\frac{1}{\chi R}\frac{D(\Psi,\Theta)\partial \Gamma}{D(R,Z)\partial R}=-f'\frac{\partial \Theta}{\partial R}-\frac{\partial H}{\partial R},$$

$$-\frac{1}{\chi R}\frac{D(\Gamma,\Psi)}{D(R,Z)}=f', \tag{3.12}$$

$$-\frac{D(\Psi,\Theta)}{D(R,Z)}\frac{1}{\chi R}\frac{\partial \Gamma}{\partial Z}-\frac{1}{\chi R^2}\frac{\partial \Psi}{\partial Z}\mathscr{F}(\Psi)=-f'\frac{\partial \Theta}{\partial Z}-\frac{\partial H}{\partial Z}.$$

Cea de-a doua ecuaţie (3.12) permite calculul cîmpului de forţe $\bar{F}(R, Z)$. Într-adevăr, ţinînd seama de faptul că $\bar{F}(R, Z)$ este dirijat după

direcţia normală $\bar{n}$ la suprafaţa palei S, vectorul $\bar{F}(R, Z)$ poate fi exprimat funcţie de $\bar{n}$, astfel :

$$\bar{F}(R, Z) = |\bar{F}| \cdot \bar{n} = |\bar{F}| \frac{\text{grad } S}{|\text{grad } S|} = f' \text{ grad } S.$$

Din a doua ecuaţie (3.12) obţinem valoarea lui $\bar{F}(R, Z)$:

$$\bar{F}(R, Z) = \text{f' grad } S = \frac{1}{\chi R} \frac{D(\Gamma, \Psi)}{D(R, Z)} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial R} \bar{e}_R - \frac{1}{R} \bar{e}_\theta + \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \bar{e}_Z \right). \tag{3.13}$$

În ceea ce priveşte celelalte două ecuaţii (3.12), înmulţind prima şi a treia ecuaţie cu $\partial\Theta/\partial Z$, respectiv $\partial\Theta/\partial R$, obţinem

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{\chi R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \mathscr{F}(\Psi) - \frac{1}{\chi R} \frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)} \frac{\partial \Gamma}{\partial R} \frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \\ &= - f' \frac{\partial \Theta}{\partial R} \frac{\partial \Theta}{\partial Z} - \frac{\partial H}{\partial R} \frac{\partial \Theta}{\partial Z}, \\ &- \frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)} \frac{1}{\chi R} \frac{\partial \Gamma}{\partial Z} \frac{\partial \Theta}{\partial R} - \frac{1}{\chi R^2} \frac{\partial \Psi}{\partial Z} \frac{\partial \Theta}{\partial R} \mathscr{F}(\Psi) = \\ &= - f' \frac{\partial \Theta}{\partial Z} \frac{\partial \Theta}{\partial R} - \frac{\partial H}{\partial Z} \frac{\partial \Theta}{\partial R}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Scăzînd din prima relaţie pe cea de-a doua, rezultă următoarea ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale :

$$\frac{1}{\chi R^2} \mathscr{F}(\Psi) \frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)} + \frac{1}{\chi R} \frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)} \frac{D(\Gamma, \Theta)}{D(R, Z)} = \frac{D(H, \Theta)}{D(R, Z)}. \tag{3.15}$$

Deoarece în (3.15) $\dfrac{D[H(\Psi), \Theta]}{D[R, Z]} = \dfrac{dH}{d\Psi} \dfrac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)}$, ecuaţiile de mişcare scrise în sistemul de coordonate cilindrice (R, Θ, Z) capătă forma finală :

$$\begin{aligned} &\mathscr{F}(\Psi) + R \frac{D(\Gamma, \Theta)}{D(R, Z)} = \chi R^2 \frac{dH}{d\Psi}, \\ &\Omega R^2 - \Gamma = - \frac{R}{\chi} \frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)} = - R W_\theta, \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$f' = -\frac{1}{\chi R}\frac{D(\Gamma, \Psi)}{D(R, Z)},$$

$$H(\Psi) = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gZ - UV_\theta.$$

Sistemul (3.16) prezintă avantajul stabilirii unei legături directe între principalele mărimi hidraulice ce intervin în calculul hidrodinamic al rotorului (suprafaţa palei, cuplul hidraulic, suprafaţa de curent axial-simetrică, energia specifică etc.).

3.2. MIŞCAREA ABSOLUTĂ

Ecuaţiile mişcării absolute scrise sub forma vectorială Lamb-Gromeka, împreună cu ecuaţia de continuitate, sînt:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{rot } \bar{V} \times \bar{V} = \bar{F}(R, Z) - \text{grad } E,$$

$$\nabla \cdot (\chi \bar{V}) = 0, \tag{3.17}$$

unde

$$E = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gZ = E(\Psi),$$

$$\bar{F}(R, Z) = |\bar{F}| \cdot \bar{n}. \tag{3.18}$$

Ţinînd seama de ipotezele făcute referitor la mişcarea absolută, derivatele parţiale în raport cu timpul sînt nule (toate mărimile ce intervin în ecuaţii sînt considerate valori medii în raport cu timpul). Procedînd la fel ca în cazul mişcării relative, obţinem următorul sistem de ecuaţii cu derivate parţiale:

$$\frac{1}{R^2}\frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)}\left[\mathscr{F}(\Psi) + R\frac{D(\Gamma, \Theta)}{D(R, Z)}\right] = \chi\left[\frac{D(E, \Theta)}{D(R, Z)} - \Omega\frac{D(\Gamma, \Theta)}{D(R, Z)}\right],$$

$$\Omega R^2 - \Gamma = -\frac{R}{\chi}\frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)},$$

$$f' = -\frac{1}{\chi R}\frac{D(\Gamma, \Psi)}{D(R, Z)}, \tag{3.19}$$

$$E = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gZ = E(\Psi).$$

După împărţirea prin $\frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)}$ atît a părţii stîngi, cît şi a celei drepte, prima ecuaţie (3.19) mai poate fi scrisă :

$$\mathcal{F}(\Psi) + R\frac{D(\Gamma, \Theta)}{D(R, Z)}\left[1 + \frac{\chi\Omega R}{\frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)}}\right] = \chi R^2 \frac{\frac{D(E, \Theta)}{D(R, Z)}}{\frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)}}. \quad (3.20)$$

Întrucît $\frac{D(E, \Theta)}{D(R, Z)} \Big/ \frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)} = \frac{dE}{d\Psi}$, iar cu A s-a notat expresia

$$A = 1 + \frac{\chi\Omega R}{\frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)}}, \quad (3.21)$$

sistemul (3.19) capătă în final o formă asemănătoare cu (3.16) :

$$\begin{gathered} \mathcal{F}(\Psi) + AR\frac{D(\Gamma, \Theta)}{D(R, Z)} = \chi R^2 \frac{dE}{d\Psi}, \\ \Omega R^2 - \Gamma = -\frac{R}{\chi}\frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)}, \\ f' = -\frac{1}{\chi R}\frac{D(\Gamma, \Psi)}{D(R, Z)}, \\ E = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} + gZ = E(\Psi). \end{gathered} \quad (3.22)$$

În prima ecuaţie (3.22) coeficientul A se poate exprima în funcţie de componentele vitezei astfel :

$$\begin{gathered} A = 1 + \frac{\chi\Omega R}{\frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)}} = 1 + \frac{\chi\Omega R}{\frac{\chi}{R}(\Gamma - \Omega R^2)} = 1 + \frac{\Omega R^2}{\Gamma - \Omega R^2} = \\ = \frac{\Gamma}{\Gamma - \Omega R^2} = \frac{RV_\theta}{RV_\theta - \Omega R^2} = \frac{V_\theta}{W_\theta}. \end{gathered} \quad (3.23)$$

Din relaţia (3.23) se observă că în cazul în care $\Omega = 0$, coeficientul A are valoarea 1, iar $\frac{dE}{d\Psi} = \frac{dH}{d\Psi} + \frac{d(UV_\theta)}{d\Psi} = \frac{dH}{d\Psi}$, astfel încît

sistemele (3.16) şi (3.22) coincid. Cele două sisteme mai coincid formal cînd $V_\theta = W_\theta$ şi curgerea prin rotor are loc cu un cuplu hidraulic constant ($\Gamma = UV_\theta = \text{const}$). În sistemele (3.16) şi (3.22) primele două ecuaţii pot fi reduse la o singură ecuaţie echivalentă. Într-adevăr, din a doua ecuaţie (3.16) se poate explicita cuplul hidraulic:

$$\Gamma = \Omega R^2 + \frac{R}{\chi}\frac{\mathrm{D}(\Psi,\ \Theta)}{\mathrm{D}(R,\ Z)}, \tag{3.24}$$

care introdus în prima dintre ecuaţiile (3.16) conduce la următoarea relaţie:

$$\mathscr{F}(\Psi) + R\frac{\mathrm{D}\left[\Omega R^2 + \dfrac{R}{\chi}\dfrac{\mathrm{D}(\Psi,\ \Theta)}{\mathrm{D}(R,\ Z)},\ \Theta\right]}{\mathrm{D}[R,\ Z]} = \chi R^2\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\Psi}. \tag{3.25}$$

Dezvoltînd al doilea termen din partea stîngă a relaţiei (3.25) ($\chi = \text{const.}$) obţinem:

$$R\left\{\frac{\partial\left[\Omega R^2 + \dfrac{R}{\chi}\dfrac{\mathrm{D}(\Psi,\ \Theta)}{\mathrm{D}(R,\ Z)}\right]}{\partial R}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial Z} - \frac{\partial\left[\Omega R^2 + \dfrac{R}{\chi}\dfrac{\mathrm{D}(\Psi,\ \Theta)}{\mathrm{D}(R,\ Z)}\right]}{\partial Z}\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial R}\right\} =$$

$$= 2\Omega R^2\frac{\partial\Theta}{\partial Z} + \frac{R}{\chi}\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\frac{\mathrm{D}(\Psi,\ \Theta)}{\mathrm{D}(R,\ Z)} + \frac{R^2}{\chi}\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2}\frac{\partial\Theta}{\partial Z} + \right. \tag{3.26}$$

$$\left. + \frac{\partial\Psi}{\partial R}\frac{\partial^2\Theta}{\partial R\partial Z} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial R\,\partial Z}\frac{\partial\Theta}{\partial R} - \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\frac{\partial^2\Theta}{\partial R^2}\right) - \frac{R^2}{\chi}\frac{\partial\Theta}{\partial R}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial R\partial Z}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial\Theta}{\partial Z} + \frac{\partial\Psi}{\partial R}\frac{\partial^2\Theta}{\partial Z^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2}\frac{\partial\Theta}{\partial R} - \frac{\partial\Psi}{\partial Z}\frac{\partial^2\Theta}{\partial R\,\partial Z}\right).$$

Ţinînd seama de (3.26), ecuaţia (3.25) devine:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2} + 2\Omega R^2\frac{\partial\Theta}{\partial Z} + \frac{R}{\chi}\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\frac{\mathrm{D}(\Psi,\ \Theta)}{\mathrm{D}(R,\ Z)} +$$

$$+ \frac{R^2}{\chi}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\right)^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2} + \frac{R^2}{\chi}\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\frac{\partial^2\Theta}{\partial R\partial Z} - \frac{2R^2}{\chi}\frac{\partial\Theta}{\partial R}\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\frac{\partial^2\Psi}{\partial R\,\partial Z} - \tag{3.27}$$

$$- \frac{R^2}{\chi}\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\frac{\partial^2\Theta}{\partial R^2} - \frac{R^2}{\chi}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\frac{\partial\Theta}{\partial R}\frac{\partial^2\Theta}{\partial Z^2} + \frac{R^2}{\chi}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial R}\right)^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2} +$$

$$+ \frac{R^2}{\chi}\frac{\partial\Theta}{\partial R}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\frac{\partial^2\Theta}{\partial R\,\partial Z} = \chi R^2\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\Psi}.$$

Ecuaţia (3.27) este o ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale de ordinul doi, asemănătoare cu cea utilizată în lucrările [3, 6 ... 9]. Procedînd la fel şi în cazul sistemului (3.22) (pentru mişcarea absolută) obţinem o ecuaţie asemănătoare cu (3.27).

4. PROBLEMA DIRECTĂ ŞI INVERSĂ. CONDIŢII LA LIMITĂ

Numărul necunoscutelor în sistemele (3.16) şi (3.22) depăşeşte numărul ecuaţiilor, astfel, încît, pentru rezolvarea acestora este necesară precizarea valorii unora dintre necunoscute. Din considerente practice, în domeniul hidrodinamicii rotoarelor se pot formula următoarele două probleme :

a) *Problema directă* în care se cunoaşte forma palei, poziţia sa în rotor, carcasa exterioară şi interioară, precum şi legea de variaţie a energiei specifice, urmînd a se obţine suprafeţele de curent Ψ, distribuţia vitezelor şi presiunilor pe suprafaţa palei şi în canalul dintre pale, precum şi legea de variaţie a cuplului hidraulic în rotor.

b) *Problema inversă* în care se urmăreşte determinarea suprafeţei palei, a legii de variaţie a cuplului hidraulic, a distribuţiei vitezelor şi presiunilor pe pală, fiind cunoscute legea de variaţie a energiei specifice şi a coeficientului de contracţie, precum şi spectrul hidrodinamic în plan meridian.

În cazul mişcării relative, pentru problema directă ecuaţia (3.27) este de tip eliptic, avînd discriminantul negativ :

$$\Delta_\Psi = \left(-\frac{2R^2}{\chi}\frac{\partial\Theta}{\partial R}\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\right)^2 - 4\left[\frac{R^4}{\chi^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\right)^2\left(\frac{\partial\Theta}{\partial R}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{R^2}{\chi}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial R}\right)^2 + \frac{R^2}{\chi}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\right)^2 + 1\right] = -4\left[\frac{R^2}{\chi}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial R}\right)^2 + \right. \tag{4.1}$$

$$\left. + \frac{R^2}{\chi}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\right)^2 + 1\right] < 0.$$

Pentru problema inversă, discriminantul ecuaţiei (3.27) este pozitiv :

$$\Delta_\Theta = \frac{R^4}{\chi^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\right)^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial R}\right)^2 + \frac{R^4}{\chi^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial R}\right)^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\right)^2 +$$

$$+ \frac{2R^4}{\chi^2}\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\frac{\partial\Theta}{\partial R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\frac{\partial\Psi}{\partial Z} - \frac{4R^4}{\chi^2}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\frac{\partial\Theta}{\partial R}\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\frac{\partial\Psi}{\partial Z} = \tag{4.2}$$

$$= \left(\frac{R^2}{\chi}\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\frac{\partial\Psi}{\partial R} - \frac{R^2}{\chi}\frac{\partial\Theta}{\partial R}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\right)^2 > 0,$$

ecuaţia fiind de tip hiperbolic. Din acest motiv integrarea ecuaţiilor de mişcare se poate face prin metoda caracteristicilor [9].

În cazul mişcării absolute se obţine o ecuaţie asemănătoare cu ecuaţia (3.27), al cărei discriminant are pentru problema directă următoarea expresie :

$$\Delta_\Psi = \frac{4R^4A^2}{\chi^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial R}\right)^2\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\right)^2 - 4\left[1 + A\frac{R^2}{\chi}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\right)^2\right]\cdot$$

$$\cdot\left[1 + A\frac{R^2}{\chi}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial R}\right)^2\right] = -4\left[A\frac{R^2}{\chi}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial R}\right)^2 + A\frac{R^2}{\chi}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\right)^2 + 1\right]\cdot \tag{4.3}$$

După cum coeficientul A este mai mare, egal sau mai mic decît expresia

$$E = -\frac{1}{\frac{R^2}{\chi}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial R}\right)^2 + \frac{R^2}{\chi}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\right)^2},$$

această ecuaţie este de tip eliptic, parabolic sau hiperbolic.

Pentru problema inversă, ecuaţia este de tip hiperbolic, indiferent de valoarea coeficientului A,

$$\Delta_\Theta = \frac{A^2R^4}{\chi^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\right)^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial R}\right)^2 + \frac{A^2R^4}{\chi^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial R}\right)^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\right)^2 +$$

$$+ 2A^2\frac{R^4}{\chi^2}\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\frac{\partial\Theta}{\partial R}\frac{\partial\Psi}{\partial Z} - 4A^2\frac{R^4}{\chi^2}\frac{\partial\Theta}{\partial R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\frac{\partial\Theta}{\partial Z} = \tag{4.4}$$

$$= \left(\frac{AR^2}{\chi}\frac{\partial\Theta}{\partial Z}\frac{\partial\Psi}{\partial R} - \frac{AR^2}{\chi}\frac{\partial\Theta}{\partial R}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\right)^2 > 0.$$

Odată stabilite tipurile ecuaţiilor de mişcare vom analiza condiţiile la limită care permit ca soluţia ecuaţiilor să existe şi să fie unic determinată şi vom stabili formele particulare obţinute pentru aceste ecuaţii în afara rotorului. În cele ce urmează ne vom referi numai la ecuaţiile (3.16), valabile pentru mişcarea relativă a apei. Domeniul studiat poate fi împărţit în trei subdomenii distincte în care ecuaţiile de mişcare capătă forme particulare şi anume : rotorul, zona aflată înaintea rotorului şi zona aflată după ieşirea din rotor (în sensul de turbinare).

4.1. PROBLEMA DIRECTĂ ŞI INVERSĂ PENTRU ROTOR

În rotor ecuaţiile de mişcare au forma completă (3.16). Funcţiile necunoscute sînt : $\Psi(R, Z)$, $\Theta(R, Z)$, $\Gamma(R, Z)$, $H(\Psi)$, $f'(R, Z)$ şi $\chi(R, Z)$. Întrucît dispunem numai de trei ecuaţii, trebuie cunoscute trei din cele şase funcţii necunoscute. De la început vom sublinia faptul că apar două situaţii în funcţie de care se pot preciza unele dintre necunoscute.

A. Cazul în care nu se ia în considerație perturbația produsă de rotor (rotor cu număr infinit de pale).

B. Cazul în care se ține seama de perturbația produsă de rotor.

Atît în cazul A cît și în cazul B stabilirea datelor cunoscute depinde de tipul problemei studiate (directă sau inversă). Problema directă presupune cunoscute toate caracteristicile geometrice ale rotorului, în timp ce în problema inversă sînt cunoscute unele dintre aceste caracteristici (de exemplu diametrul maxim al rotorului) dar suprafața palei urmează a fi determinată prin calcule.

Cazul A

Problema directă. Fiind precizate toate caracteristicile geometrice ale turbomașinii, datele de bază cunoscute vor fi: suprafața de curent medie dintre pale $\Theta(R, Z)$, variația grosimii canalului dintre două pale consecutive, $\chi(R, Z)$ și suprafețele de curent axial-simetrice $\Psi(R, Z)$. Se vor determina prin calcul: cuplul hidraulic $\Gamma(R, Z)$, energia specifică $H(\Psi)$ și repartiția vitezelor și presiunilor în rotor, prin intermediul funcției $f'(R, Z)$.

Problema inversă. Funcțiile cunoscute sînt: suprafețele de curent axial-simetrice $\Psi(R, Z)$, coeficientul variabil $\chi(R, Z)$ și legea de variație a energiei specifice în rotor $H(\Psi)$. Prin integrarea ecuațiilor de mișcare (3.16) se vor obține: forma palelor $\Theta(R, Z)$, cuplul hidraulic $\Gamma(R, Z)$, și funcția $f'(R, Z)$ ce permite calculul repartiției vitezelor și presiunilor în rotor.

Cazul B

Problema directă. Întrucît apare o necunoscută în plus (perturbația φ (R, Z) produsă de rotor), la datele de bază cunoscute în cazul A se va adăuga o ipoteză referitoare la legea de variație a energiei specifice în rotor $H(\Psi)$. Funcțiile necunoscute sînt: perturbația produsă de rotor $\varphi(R, Z)$, cuplul hidraulic $\Gamma(R, Z)$ și repartiția vitezelor și presiunilor pe suprafața palei (calculate prin intermediul funcției $f'(R, Z)$).

Problema inversă. Și în cazul problemei inverse la datele de bază cunoscute în cazul A se va adăuga o ipoteză referitoare la legea de variație a cuplului hidraulic în rotor $\Gamma(R, Z)$. Această ipoteză permite determinarea necunoscutei suplimentare $\varphi(R, Z)$ reprezentînd perturbația produsă de rotor, a suprafeței palei $\Theta(R, Z)$ și a funcției $f'(R, Z)$ (deci a repartiției presiunilor și vitezelor în rotor).

4.2. CONDIȚIILE LA LIMITĂ PENTRU PROBLEMA INVERSĂ ÎN ROTOR

Scopul prezentei lucrări constă în determinarea formei suprafeței palei rotorice. Ca urmare vom preciza condițiile la limită pentru problema inversă, condiții ce asigură existența și unicitatea soluțiilor sistemului de ecuații (3.16).

Cazul A. În acest caz suprafaţa palei $\Theta(R, Z)$ şi cuplul hidraulic $\Gamma(R, Z)$ rezultă prin rezolvarea primelor două ecuaţii ale sistemului (3.16). Aceste două ecuaţii, după cum am arătat, pot fi reduse la o ecuaţie diferenţială cu derivate parţiale de ordinul doi de tip hiperbolic. Din punct de vedere matematic problema pe care o avem de rezolvat este de tip mixt. Pentru $Z = 0$; $\theta = 0$, condiţiile la limită sînt de tip Cauchy (problema Cauchy se referă la un domeniu nelimitat pe direcţia radială, dar limitat după direcţia axială de dreapta $Z = 0$, $\theta = 0$):

$$\Theta(R, 0) = \Theta_0(R), \qquad (4.5) \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial Z}(R, 0) = \Theta_1(R). \qquad (4.6)$$

Pe carcasa exterioară şi pe carena bulb condiţiile la limită sînt de tipul condiţiilor pe contur pentru problema lui Dirichlet [10]:

$$\Theta(R_1, Z) = \Theta_2(Z), \qquad (4.7) \qquad \Theta(R_2, Z) = \Theta_3(Z). \qquad (4.8)$$

Muchia de ieşire a palei se obţine dintr-o condiţie fizică de maximizare a cuplului hidraulic prelucrat de rotor (cuplul hidraulic la ieşirea din rotor ($Z = L$) trebuie să fie nul ($\Gamma(R, L) = 0$)). Întrucît prima derivată $\partial\Theta/\partial Z$ este legată de cuplul hidraulic prin relaţia

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Z} = \frac{1}{R \operatorname{tg} \beta} = \frac{1}{W_m}\left(\Omega - \frac{\Gamma}{R^2}\right), \qquad (4.9)$$

condiţia (4.6) se înlocuieşte cu o condiţie la limită asupra cuplului hidraulic $\Gamma(R, Z)$ pe muchia de intrare a palei. Condiţiile (4.7) şi (4.8) pot fi înlocuite şi ele cu condiţii referitoare la valoarea cuplului hidraulic pe carcasa exterioară şi butucul rotorului (vom arăta în capitolul 6 că pentru Θ cunoscut pe muchia de intrare a palei şi Γ precizat pe contur, se poate calcula explicit Θ pe carcasa exterioară şi pe butuc). În consecinţă, condiţiile (4.5 ... 8) sînt echivalente cu:

$$\begin{aligned} &\Theta(R, 0) = \Theta_0(R), && \Gamma(R_1, Z) = \Gamma_1(Z), \\ &\Gamma(R, 0) = \Gamma_0(R), && \Gamma(R_2, Z) = \Gamma_2(Z), \qquad (4.10) \\ &&& \Gamma(R, L) = 0. \end{aligned}$$

Cazul B. În această situaţie funcţia $\Psi(R, Z)$ include suprafeţele de curent axial-simetrice neperturbate, $\Psi_0(R, Z)$ şi perturbaţia $\varphi(R, Z)$ produsă de rotor asupra acestora:

$$\Psi(R, Z) = \Psi_0(R, Z) + \varphi(R, Z). \qquad (4.11)$$

La o distanţă $L1$ suficient de mare înainte şi după rotor, $\varphi(R, Z) \to 0$, astfel încît $\Psi(R, Z) \to \Psi_0(R, Z)$. Ecuaţia (3.27) este de tip hiberbolic

în raport cu Θ şi de tip eliptic în raport cu Ψ. Ca urmare, pentru rezolvarea problemei mixte în raport cu Θ, condiţiile la limită sînt (4.10), iar pentru calculul suprafeţelor de curent $\Psi(R, Z)$ (o problemă de tip Dirichlet) valorile pe contur ale funcţiei Ψ, în ipoteza mişcării potenţiale sînt [5]:

$$\Psi(-L1, R) = V_1 \frac{R^2}{2}, \quad \Psi(Z, R_1) = 0,$$
$$\Psi(L1, R) = V_2 \frac{R^2}{2}, \quad \Psi(Z, R_2) = \frac{Q}{2\pi}, \qquad \left(V_{1,2} = \frac{Q}{\pi R_2^2}\right), \tag{4.12}$$

ar în ipoteza mişcării elicoidale [4, 5]:

$$\Psi(-L1, R) = \frac{V_1}{k} R J_1(kR), \quad \Psi(Z, R_1) = 0,$$
$$\Psi(L1, R) = \frac{V_2}{k} R J_1(kR), \Psi(Z, R_2) = \frac{Q}{2\pi}, \qquad \left(V_{1,2} = \frac{kQ}{2\pi} \frac{1}{R_2 J_1(kR_2)}\right). \tag{4.13}$$

Pe contur perturbaţia $\varphi(R, Z)$ este nulă atît în cazul (4.12), cît şi (4.13):

$$\varphi(R_1, Z) = \varphi(R_2, Z) = \varphi(R, -L1) = \varphi(R, L1) = 0, \tag{4.14}$$

iar legea de variaţie a produsului $R \cdot V_\theta = \Gamma$ în rotor este cunoscută.

4.3. ECUAŢIILE DE MIŞCARE ÎN AMONTE DE ROTOR

În ipoteza mişcării potenţiale, sistemul (3.16) se reduce la o formă foarte simplă (viteza unghiulară nulă):

$$\mathscr{F}(\Psi) = 0,$$
$$\Gamma(R, Z) = R \frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)}. \tag{4.15}$$

Sistemul (4.15) permite calculul suprafeţelor de curent axial-simetrice $\Psi(R, Z)$ precum şi prelungirea suprafeţelor de curent medii dintre pale $\Theta(R, Z)$, în amonte de rotor. Se cunosc valorile funcţiei $\Psi(R, Z)$ pe conturul format de carcasa exterioară, secţiunea 1—1, carcasa interioară şi muchia de intrare a palei. De asemenea, este dată valoarea funcţiei $\Theta(R, Z)$ pe muchia de intrare a palei. În cazul problemei inverse, cuplul hidraulic are o valoare constantă cunoscută înainte de rotor, astfel încît sistemul (4.15) este determinat, permiţînd obţinerea prin calcul a funcţiilor $\Psi(R,$

Z) şi $\Theta(R, Z)$. Din punct de vedere matematic, aceasta este o problemă de tip Dirichlet. În ipoteza mişcării elicoidale (rot $\bar{V} = k\bar{V}$), cuplul hidraulic este proporţional cu funcţia $\Psi(R, Z)$. Într-adevăr,

$$\Gamma(R, Z) = \frac{1}{2\pi}\int_C \bar{V}\,d\bar{s} = \frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \text{rot}\,\bar{V}d\bar{A} = \frac{1}{2\pi}\int_\Sigma k\bar{V}d\bar{A} = \frac{kQ}{2\pi} = k\Psi. \tag{4.16}$$

În acest fel prima ecuaţie (4.15) devine :

$$\mathscr{F}(\Psi) + k^2\Psi = 0. \tag{4.17}$$

Ecuaţia (4.17) este cunoscută sub numele de ecuaţia lui Helmholtz.

4.4. ECUAŢIILE DE MIŞCARE ÎN AVAL DE ROTOR. EXPRESIA COEFICIENTULUI k PENTRU MIŞCAREA ELICOIDALĂ OMOGENĂ

Presupunînd cuplul hidraulic şi viteza unghiulară nule, sistemul (3.16) capătă de asemenea o formă simplificată :

$$\mathscr{F}(\Psi) = 0, \qquad \frac{D(\Psi, \Theta)}{D(R, Z)} = 0. \tag{4.18}$$

În ipoteza în care cuplul hidraulic la ieşire este nul, mişcarea nu mai poate fi elicoidală, deoarece $k = 2\pi\Gamma/Q = 0$, ceea ce implică rot $\bar{V} = 0$.

În ipoteza mişcării elicoidale prima ecuaţie (4.18) se înlocuieşte cu ecuaţia lui Helmholtz. Pentru mişcarea elicoidală omogenă, coeficientul k poate fi exprimat funcţie de parametrii hidraulici şi mecanici ai mişcării (debit, cădere şi turaţie) [4]. Într-adevăr, din relaţia (4.16) şi ţinînd seama de expresia cuplului hidraulic funcţie de cădere obţinem :

$$k = \frac{2\pi\Gamma}{Q} = \frac{2\pi R_2 V_{\theta 2}}{\pi R_2^2 V_1} = \frac{2gH_0}{R_2^2\omega V_1} = \frac{60\,gH_0}{n\pi R_2^2 V_1} = \frac{60\,gH_0}{nQ}. \tag{4.19}$$

Relaţia (4.19) este importantă deoarece permite exprimarea coeficientului k funcţie de cădere, debit şi turaţie, astfel încît pentru un anumit rotor valoarea coeficientului k, în ipoteza mişcării elicoidale omogene, este bine determinată.

În capitolele ce urmează vom rezolva problema inversă pentru rotor ţinînd seama de perturbaţia produsă de acesta (cazul B).

5. PERTURBAȚIA PRODUSĂ DE PALE

Cu ajutorul mărimilor adimensionale descrise în capitolul 2, sistemul de ecuații (3.16), împreună cu ecuația de continuitate, pot fi transcrise sub forma :

$$\mathscr{F}(\Psi) + \alpha r \frac{D(\gamma, \Theta)}{D(r, z)} = \chi r^2 \frac{dh}{d\Psi},$$

$$\alpha(\omega r^2 - \gamma) = -\frac{r}{\chi} \frac{D(\Psi, \Theta)}{D(r, z)},$$

$$f = -\frac{\alpha}{\chi r} \frac{D(\gamma, \Psi)}{D(r, z)}, \tag{5.1}$$

$$h(\Psi) = e(\Psi) - \alpha^2 \omega\gamma,$$

$$\frac{\partial(\chi v_z)}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\chi r v_r)}{\partial r} = 0.$$

Rezolvarea problemei inverse prin integrarea sistemului (5.1) impune cunoașterea suprafețelor de curent axial-simetrice din mișcarea neperturbată $\Psi_0(r, z) = \text{const}$. În condițiile în care forma carcasei exterioare și a butucului rotoric sînt precizate, spectrul hidrodinamic în plan meridian poate fi calculat prin adoptarea unei ipoteze asupra structurii cinematice a mișcării. Odată formulată această ipoteză, se pot calcula suprafețele de curent axial-simetrice pentru mișcarea neperturbată (rotor cu număr infinit de pale) în tot domeniul studiat [5, 11, 12]. În rotor suprafețele de curent axial-simetrice din mișcarea neperturbată, sînt supuse acțiunii palelor rotorice, astfel că în final suprafețele de curent se abat de la forma axial-simetrică. Analizînd elementele perturbatoare putem evidenția dintre ele pe următoarele :

— viteza unghiulară de rotație ω, modifică suprafețele de curent axial-simetrice Ψ_0, transformîndu-le tot în suprafețe axial-simetrice Ψ' ;

— valoarea cuplului hidraulic, variabil în rotor (scăzător la turbinare și crescător la pompare) conduce la o suprafață de curent axial-simetrică $\Psi''(r, z)$ diferită de Ψ' ;

— modul de variație a cuplului hidraulic influențează suprafața $\Psi''(r, z)$ și o transformă într-o suprafață de curent axial-simetrică $\Psi'''(r, z)$;

— numărul finit de pale și grosimea acestora conduc la o suprafață de curent $\Psi^{IV}(r, z)$ care nu mai este axial-simetrică.

Toate elementele enumerate modifică spectrul hidrodinamic din mișcarea neperturbată și suprafața palei $\Theta(r, z)$. În continuare ne vom referi la perturbația $\varphi(r, z)$ datorită primelor trei elemente perturbatoare. Suprafața de curent rezultantă $\Psi(r, z) \equiv \Psi''''(r, z)$ va fi o suprafață axial-simetrică obținută prin suprapunerea suprafeței de curent neperturbate

$\Psi_0(r, z)$ şi a perturbaţiei $\varphi(r, z)$:

$$\Psi(r, z) = \Psi_0(r, z) + \varphi(r, z). \tag{5.2}$$

Funcţie de ipoteza adoptată cu privire la structura cinematică a mişcării neperturbate, funcţia $\Psi_0(r, z)$ are valoarea :

$$\Psi_{0p} = -\frac{r^2}{2} + \frac{1}{\pi V_1}\int_{z_i}^{z_f}\left\{\frac{q_i R}{\cos\delta}\int_0^r \frac{Er}{1-b^2}\,\frac{z-Z}{[(z-Z)^2+(r+R)^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}Z \tag{5.3}$$

în ipoteza mişcării potenţiale, şi

$$\Psi_{0e} = -\frac{r^2}{2} + \left[\sum_{i=1}^{N} q_i^1 \frac{rk}{4J_1(kr)}\int_0^\infty \chi(m, x-l)\,J_1(mr)\,\mathrm{d}m + \frac{Ck}{4J_1(kr)}\right]^2 \tag{5.4}$$

pentru mişcarea elicoidală [5, 13], unde C = const., iar

$$\chi(m, x-l) = \begin{cases} \dfrac{k^2+m^2}{k^2-m^2}\cos\sqrt{k^2-m^2}(x-l) - \dfrac{2m^2}{k^2-m^2}, & m < k, \\ -\dfrac{m^2+k^2}{m^2-k^2}\,e^{\sqrt{m^2-k^2}(x-l)} + \dfrac{2m^2}{m^2-k^2}, & m > k. \end{cases} \tag{5.5}$$

Introducînd notaţiile :

$$F_{\Psi p} = \frac{1}{\pi V_1}\int_{z_i}^{z_f}\left\{\frac{q_i R}{\cos\delta}\int_0^r \frac{Er}{1-b^2}\,\frac{z-Z}{[(z-Z)^2+(r+R)^2]^{3/2}}\,\mathrm{d}r\right\}\mathrm{d}Z,$$

$$F_{\Psi e} = \left[\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{kr}{4J_1(kr)}\int_0^\infty \chi(m, x-l)\,J_1(mr)\,\mathrm{d}m + \frac{Ck}{4\cdot J_1(kr)}\right]^2, \tag{5.6}$$

relaţia (5.2) devine :

$$\Psi(r, z) = \varphi(r, z) - \frac{r^2}{2} + F_{\Psi(p,e)}(r, z). \tag{5.7}$$

În formula (5.7) indicii p sau e precizează ipoteza de mişcare adoptată (potenţială sau elicoidală).

Vitezele de perturbaţie axială w şi radială u, au expresiile :

$$w = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad u = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial Z}. \tag{5.8}$$

Ţinînd seama de (5.7) şi (5.8), sistemul de ecuaţii (5.1) se modifică după cum se arată în continuare. În prima ecuaţie termenul $\mathscr{F}(\Psi)$ devine :

$$\mathscr{F}(\Psi) \equiv \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial(\varphi + F_\Psi - r^{2/2})}{\partial z}\right] + \tag{5.9}$$

$$+ r\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(\varphi + F_\Psi - r^2/2)}{\partial r}\right] = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - \mathscr{P}(r, z),$$

unde

$$\mathscr{P}(r, z) = -\left[\frac{\partial^2 F_\Psi}{\partial z^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_\Psi}{\partial r}\right)\right]. \tag{5.10}$$

În acest fel prima ecuaţie (5.1) se exprimă funcţie de perturbaţia φ astfel :

$$\mathscr{F}(\varphi) + \alpha r\frac{D(\gamma, \Theta)}{D(r, z)} = \chi r^2\frac{dh}{d\Psi} + \mathscr{P}(r, z).$$

Introducînd relaţiile (5.7,8) şi în ecuaţia a doua şi a treia a sistemului (5.1), obţinem în final sistemul :

$$\mathscr{F}(\varphi) + \alpha r\frac{D(\gamma, \Theta)}{D(r, z)} = \chi r^2\frac{dh}{d\Psi} + \mathscr{P}(r, z),$$

$$(w + v_z' + 1)\frac{\partial\Theta}{\partial z} + (u + v_r')\frac{\partial\Theta}{\partial r} = -\alpha\chi\left(\frac{\gamma}{r^2} - \omega\right), \tag{5.11}$$

$$f = -\frac{\alpha}{\chi r}\left[\frac{\partial\gamma}{\partial r}(u + v_r') + \frac{\partial\gamma}{\partial z}(w + v_z' + 1)\right],$$

$$h(\Psi) = e(\Psi) - \alpha^2\omega\gamma.$$

Sistemul (5.11), care pune în evidenţă perturbaţia $\varphi(r, z)$ şi componentele vitezei de perturbaţie , capătă o formă mai simplă prin neglijarea formei sferice a butucului rotorului şi carcasei exterioare în zona palelor ($\mathscr{P}(r,z) = 0$, $v_r' = v_z' = 0$) şi prin considerarea energiei specifice $h(\Psi)$ în rotor, constantă :

$$\mathscr{F}(\varphi) \equiv \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = -\alpha r\frac{D(\gamma, \Theta)}{D(r, z)},$$

$$(w + 1)\frac{\partial\Theta}{\partial z} + u\frac{\partial\Theta}{\partial r} = -\alpha\chi\left(\frac{\gamma}{r^2} - \omega\right), \tag{5.12}$$

$$f = -\frac{\alpha}{\chi r}\left[u\frac{\partial\gamma}{\partial r} + (w + 1)\frac{\partial\gamma}{\partial z}\right].$$

6. SCHEMA CU DIFERENȚE FINITE

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații (5.11) cu ajutorul diferențelor finite, se împarte domeniul studiat într-o rețea dreptunghiulară cu pasul constant $\Delta z = \Delta r = h$. Coordonatele fiecărui nod în rețea sînt caracterizate prin doi indici i și j. Vom exprima diferențele de ordinul unu sau de ordinul doi după cum urmează:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{h}, \qquad F(r, z) = F_{i,j},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{\varphi_{i+1,j} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i-1,j}}{h^2}, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\Theta_{i,j} - \Theta_{i-1,j}}{h},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j-1}}{2h}, \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial r} = \frac{\Theta_{i,j+1} - \Theta_{i,j-1}}{2h},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = \frac{\varphi_{i,j+1} - 2\varphi_{i,j} + \varphi_{i,j-1}}{h^2}, \qquad u = \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i,j}), \tag{6.1}$$

$$\frac{D(\gamma, \Theta)}{D(r, z)} = \frac{\gamma_{i,j+1} - \gamma_{i,j}}{h} \cdot \frac{\Theta_{i+1,j} - \Theta_{i,j}}{h} - \qquad w = \frac{1}{2}(w_{i,j} + w_{i-1,j}),$$

$$- \frac{\gamma_{i+1,j} - \gamma_{i,j}}{h} \cdot \frac{\Theta_{i,j+1} - \Theta_{i,j}}{h} = \qquad v_z = \frac{1}{2}(v_{zi,j} + v_{zi-1,j}),$$

$$= \left[\frac{D(\gamma, \Theta)}{D(r, z)}\right]_{i,j}, \qquad B = \alpha\left(\frac{\gamma}{r^2} - \omega\right) = \frac{B_{i-1,j} + B_{i,j}}{2}.$$

Cu ajutorul relațiilor (6.1), cea de-a doua ecuație (5.11) devine:

$$2\frac{\Delta r}{\Delta z}\,\frac{2 + w_{i-1,j} + w_{i,j} + v_{zi-1,j} + v_{zi,j}}{2} \cdot \frac{\Theta_{i,j} - \Theta_{i-1,j}}{2\Delta r} + \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\Theta_{i,j+1}}{2\Delta r} - \frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2} \cdot \frac{\Theta_{i,j-1}}{2\Delta r} = \frac{B_{i-1,j} + B_{i,j}}{2}. \tag{6.2}$$

Pentru facilitarea scrierii ecuației (6.2) introducem următoarele notații:

$$a_{i,j} = -\frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i,j}),$$

$$b_{i,j} = 2\frac{\Delta r}{\Delta z}(2 + w_{i-1,i} + w_{i,j} + v_{zij-1,j} + v_{zi,j}), \tag{6.3}$$

$$c_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i-1,j} + u_{i,j}) = -a_{i,j}.$$

În acest fel obţinem pentru ecuaţia (6.2) o formă de scriere simplificată :

$$a_{i,j}\Theta_{i,j-1} + b_{i,j}\Theta_{i,j} + c_{i,j}\Theta_{i,j+1} = d_{i,j}, \tag{6.4}$$

unde s-a notat cu $d_{i,j}$ expresia :

$$d_{i,j} = 2\Delta r(B_{i-1,j} + B_{i,j}) + a_{i,j}(\Theta_{i,j+1} - \Theta_{i,j-1}) + b_{i,j}\Theta_{i-1,j}.$$

Ţinînd seama de relaţiile (6.1), prima ecuaţie (5.11) poate fi scrisă sub forma :

$$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \alpha'\varphi_{i,j+1} + \beta'\varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = h^2\left\{P_{i,j} - \right.$$
$$\left. - \alpha r_{i,j}\left[\frac{D(\gamma,\ \Theta)}{D(r,\ z)}\right]_{i,j}\right\} + r_{i,j}^2\chi_{i,j}m_{i,j}, \tag{6.5}$$

unde

$$\alpha' = 1 - \frac{h}{2r_{i,j}}, \qquad \beta' = 1 + \frac{h}{2r_{i,j}}. \tag{6.6}$$

În final obţinem următorul sistem de două ecuaţii cu două funcţii necunoscute scris în diferenţe finite :

$$a_{i,j}\Theta_{i,j-1} + b_{i,j}\Theta_{i,j} + c_{i,j}\Theta_{i,j+1} = d_{i,j}, \tag{6.7}$$

$$\varphi_{i+1,j} + \varphi_{i-1,j} + \alpha'\varphi_{i,j+1} + \beta'\varphi_{i,j-1} - 4\varphi_{i,j} = h^2\left\{P_{i,j} - \right.$$
$$\left. - \alpha r_{i,j}\left[\frac{D(\gamma,\ \Theta)}{D(r,\ z)}\right]_{i,j}\right\} + r_{i,j}^2\chi_{i,j}m_{i,j}.$$

Condiţiile la limită au fost precizate în capitolul 4. Deoarece pe carenă şi pe carcasa exterioară $u = 0$, în prima ecuaţie (6.7) se poate explicita valoarea necunoscută $\Theta_{i,j}$:

$$\Theta_{i,c} = \Theta_{i-1,c} + h\frac{B_{i-1,j} + B_{i,j}}{2 + w_{i-1,j} + w_{i,j} + v_{zi-1,j} + v_{zi,j}} =$$
$$= \Theta_{i-1,c} + 2h\frac{B_{i-1,j} + B_{i,j}}{b_{i,j}}. \tag{6.8}$$

În acest fel dacă se cunosc valorile funcţiei $\Theta(r, z)$ pe muchia de intrare şi legea de variaţie a cuplului hidraulic, valorile lui $\Theta(r, z)$ pe butuc şi pe carcasa exterioară rezultă în mod direct.

Metoda de rezolvare a sistemului de ecuaţii (6.7) are la bază următorul algoritm :

1. La prima aproximaţie suprafaţa de curent axial-simetrică $\Psi(r, z) = \text{const.}$ din mişcarea neperturbată este cunoscută. Mişcarea fiind neperturbată, funcţia de perturbaţie $\varphi(r, z)$ cît şi componentele u şi w ale vitezei de perturbaţie sînt nule ($\varphi = 0$; $u = w = 0$).

2. Din prima ecuaţie (6. 7) se calculează suprafaţa de curent medie dintre pale $\theta = \Theta(r, z)$. Această suprafaţă corespunde unei mişcări în care perturbaţia produsă de palele rotorice este nulă ($\varphi = u = w = 0$).

3. Introducînd pe $\Theta(r, z)$ în a doua ecuaţie a sistemului (6.7) se calculează valoarea perturbaţiei φ', din care prin derivare se obţin componentele vitezelor de perturbaţie u', w'. Suprafaţa de curent axial-simetrică modificată va fi : $\Psi'(r, z) = \Psi(r, z) + \varphi'$.

4. Se compară valorile calculate (φ', Ψ', u', w'), cu cele propuse iniţial (φ, Ψ, u, w). În cazul în care diferenţa este mai mică decît eroarea admisă, procesul iterativ este încheiat. În caz contrar calculul se reia într-o a doua aproximaţie prin înlocuirea valorilor necunoscutelor φ, Ψ, u, w, cu noile valori obţinute φ', Ψ', u', w',

Rezultatele calculelor se prezintă în partea a doua a lucrării.

Primită la redacţie la 26 februarie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. R. Mises, *Theorie der Wasserräder*, Z.M.P., **57**, *1*, (1909).
2. B. Krajewski, *Variational problems of the theory of thre-edimensional flow through thermal turbomachinery*, Archivum Mechaniki Sostowany, **6**, *15* (1963).
3. I. Anton, *Turbine hidraulice*, Edit. Facla, 1979.
4. I. Jelev, *Metode numerice şi analitice pentru studiul hidrodinamic al turbomaşinilor axiale*, Teză de doctorat, I. P. Bucureşti, 1977.
5. I. Jelev, *Calculul mişcării neperturbate într-o turbină bulb în prezenţa carcasei exterioare*, St. cerc. mec. apl., **37**, *3*, 343—352 (1978).
6. A. I. Sirotkin, *Formulation of the invers axisymmetric problem of the steady rotational flow of an ideal incompressible fluid in turbomachinery*, Fluid Dynamics, *1*, The Faraday Press, New York, 1967.
7. J. P. Veuillot. *Calcul de l'ecoulement moyen dans une turbomachine axiale*, La Recherche Aerospatiale, *2*, p. 89—97 (1971).
8. R. Legendre, *Calcul de l'ecoulement tridimensionnele dans une turbomachine axiale*, Rech. Aerosp., *1* (1971).
9. N. Vasiliu, *Contribuţii la hidrodinamica rotoarelor radial axiale ale turbomaşinilor*, Teză de doctorat, I. P. Bucureşti, 1976.
10. J. Hadamard, *Zadacia Cauchy dlia lineinîh uravnenii s ciastnîmi proizvodnîmi ghiperbolicescogo tipa*, Izd. Nauka, Moscva, 1978.
11. I. Jelev, Şt, Zarea, *L'utilisation de la methode des singularités pour l'etude du mouvement potentiel autour des carènes bulbe*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **18**, *2*(1973).
12. I. Jelev, Şt. Zarea, *Méthode analytique de calcul du spectre hydrodynamique et de la repartition des vitesses et des pressions autour des carènes bulbe étagées*, Rev. Roum.Sci. Techn. — Méc. Appl., **19**, *4* (1974).
13. A. G. Iarmiţkii, *Osesimetricinîi vihrevoi istocinic (stok)*, Izd. A.N.S.S.S.R., 1968.

RELAȚII GLOBALE ÎN ELASTOCINEMATICA MECANISMELOR PLANE CU BARE

de MIHAI BUCULEI
Universitatea din Craiova

Folosind teoria distribuțiilor, în lucrare se deduc relații globale pentru calculul cîmpurilor de viteze și accelerații la lanțuri cinematice plane monocontur. Determinarea deplasărilor liniar elastice longitudinale și transversale se face pe baza unor ecuații de mișcare deduse cu ajutorul principiului Hamilton, folosindu-se o cinetică adecvat construită pentru solide liniar elastice de mișcare de rototranslație. În lucrare se analizează atît lanțurile cinematice cu elemente rigide, cît și cele cu elemente deformabile, în limitele elasticității liniare.

1. INTRODUCERE

În [1,4] s-au dedus relații intrare-ieșire pentru multipolii elastocinematici ai mecanismelor plane, folosind formalismul matriceal. Pentru deducerea cîmpurilor de viteze și accelerații era necesar să se țină cont de conexiunile multipolilor, priviți ca sisteme liniare diferențiatoare, variante în timp.

Lucrarea de față prezintă relații globale, mai simple, pentru calculul vitezelor și accelerațiilor la mecanisme plane considerîndu-se atît cazul lanțurilor cinematice cu elemente rigide, cît și cazul lanțurilor cu elemente liniar elastice. Ecuațiile deduse constituie, în fond, o generalizare a relațiilor Euler și Rivals din cinematica solidelor rigide. Se pleacă de la interpretarea vectorului de poziție în sensul distribuțiilor, lucrarea limitîndu-se la lanțuri cinematice cu bare drepte, monocontur.

Se presupune că s-a făcut o prealabilă analiză poziționlă și dinamică a mecanismului. Pentru lanțurile cu elemente liniar elastice se dau ecuații de mișcare, deduse pe baza cinematicii solidelor deformabile în mișcare de rototranslație, [2], ca și soluții obținute cu ajutorul transformărilor integrale Laplace și Fourier finită.

2. LANȚURI CINEMATICE PLANE CU ELEMENTE RIGIDE

Se consideră un lanț cinematic plan deschis, cu elemente rectilinii, neramificat, avînd elemente rigide și conținînd numai cuple de rotație (fig. 1).

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 5, 1980, P. 679—686

Fie

s — abscisa curbilinie pe linia poligonală $OA_1 \ldots A_n$;

L_1 — lungimea elementului OA_1;

L_i — lungimea elementului $A_{i-1}A_i$ $\quad i \geqslant 2$;

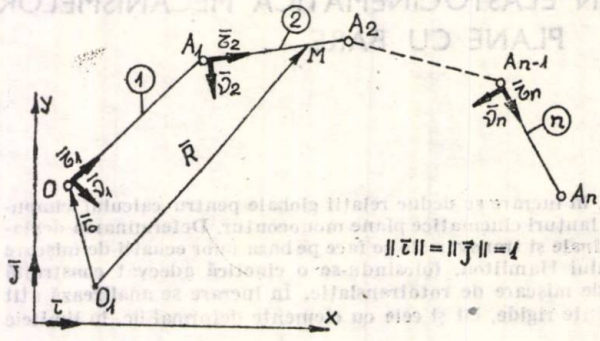


Fig. 1. — Lanț cinematic plan, deschis, cu cuple de rotație

$[\bar{\tau}_i\,;\ \bar{\nu}_i\,;\ \bar{\beta}_i]$ — triedrul Frenet atașat elementului i;

$\bar{R}(s, t)$ — vectorul de poziție al unui punct M al lanțului cinematic, raportat la un punct O_1, fix.

Se poate scrie

$$\bar{R}(s, t) = s\bar{\tau}_1(t)\,H(s) + \sum_{j=1}^{n-1}\left(s - \sum_{k=1}^{j} L_k\right)[\bar{\tau}_{j+1}(t) -$$

$$- \bar{\tau}_j(t)]\,H\left(s - \sum_{k=1}^{j} L_k\right) + \bar{r}_0(t), \qquad (1)$$

unde $H(s-a) = \begin{cases} 0\,; & s < a \\ 1\,; & s \geqslant a \end{cases}$ este distribuția Heaviside.

Se obține imediat o relație globală care dă distribuția vitezelor în punctele lanțului cinematic

$$\bar{v}_M(s, t) = \bar{v}_0(t) + s\omega_1(t)\,\bar{\nu}_1(t)\,H(s) + \sum_{j=1}^{n-1}\left(s - \sum_{k=1}^{j} L_k\right)[\omega_{j+1}(t)\,\bar{\nu}_{j+1}(t) -$$

$$- \omega_j(t)\,\bar{\nu}_j(t)]H\left(s - \sum_{k=1}^{j} L_k\right), \qquad (2)$$

unde $\omega_j(t)$ este viteza unghiulară absolută a elementului j, $j = \overline{1, n}$.

Din (2) se obţine imediat o relaţie globală care dă distribuţia acceleraţiilor

$$\bar{a}_M(s,t) = \bar{a}_0(t) + s\varepsilon_1(t)\bar{\nu}_1(t)\,H(s) - s\omega_1^2(t)\,\bar{\tau}_1(t)\,H(s) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\left(s - \sum_{k=1}^{j} L_k\right)[\varepsilon_{j+1}(t)\,\bar{\nu}_{j+1}(t) - \omega_{j+1}^2(t)\,\bar{\tau}_{j+1}(t) -$$

$$-\varepsilon_j(t)\,\bar{\nu}_j(t) + \omega_j^2(t)\,\bar{\tau}_j(t)]H\left(s - \sum_{k=1}^{j} L_k\right). \tag{3}$$

Observaţia 1. Dacă între două elemente j şi $j+1$ există o cuplă de translaţie, rămîn valabile relaţiile (2) şi (3), pînă la cupla de translaţie. Pentru restul lanţului cinematic se deduc elementar formule adecvate derivînd succesiv în raport cu timpul relaţia (1). Se va ţine cont că apar şi derivatele lungimilor, variabile în timp, ale culiselor, iar, în plus, $\omega_j = \omega_{j+1}$ şi $\varepsilon_j = \varepsilon_{j+1}$ dacă cupla de translaţie este plasată între elementele j şi $j+1$.
Observaţia 2. O analiză poziţională, combinată cu cunoaşterea variaţiei în timp a coordonatelor lagrangeiene ataşate mecanismului dă cu uşurinţă dependenţele

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(t)\,;\ \omega_i = \omega_i(t)\,;\ \bar{\tau}_i = \bar{\tau}_i(t)\,;\ \bar{\nu}_i = \bar{\nu}_i(t),\ i = \overline{1,\,n}.$$

3. LANŢURI CINEMATICE PLANE CU ELEMENTE LINIAR ELASTICE

Deplasarea liniar elastică a unui punct M al lanţului cinematic din figura 1 este

$$\bar{u}^{(j)}(s,t) = u_1^{(j)}(s,\ t)\,\bar{\tau}_j(t) + u_2^{(j)}(s,t)\,\bar{\nu}_j(t), \tag{4}$$

unde $u_1^{(j)}$ este deplasarea longitudinală a unui punct al elementului j; $u_2^{(j)}$ este deplasarea transversală a unui punct al elementului j. Se poate scrie

$$\bar{R}(s,t) = [s\bar{\tau}_1(t) + u_1^{(1)}(s,t)\,\bar{\tau}_1(t) + u_2^{(1)}(s,t)\,\bar{\nu}_1(t)]\,H(s) +$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\left\{\left(s - \sum_{k=1} L_k\right)[\bar{\tau}_{j+1}(t) - \bar{\tau}_j(t)] + u_1^{(j+1)}(s,t)\,\bar{\tau}_{j+1}(t) + \right. \tag{5}$$

$$\left. + u_2^{(j+1)}(s,t)\,\bar{\nu}_{j+1}(t) - u_1^{(j)}\,\bar{\tau}_j(t) - u_2^{(j)}\,\bar{\nu}_j(t)\right\} H\left(s - \sum_{k=1}^{j} L_k\right) + \bar{r}_0(t),$$

din care se obţine cîmpul vitezelor

$$\bar{v}_M(s,t) = \left[\left(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial t} - u_2^{(1)}\ \omega_1\right)\bar{\tau}_1 + (s\,\omega_1 + u_1^{(1)}\omega_1 +\right.$$

$$+\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial t}\Big)\,\bar{\nu}_1\Big]H(s)+\sum_{j=1}^{n-1}\Big\{\Big[\frac{\partial u_1^{(j+1)}}{\partial t}-u_2^{(j+1)}\omega_{j+1}\Big]\bar{\tau}_{j+1}+$$

$$+\Big[u_2^{(j)}\,\omega_j-\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial t}\Big]\bar{\tau}_j+\Big[\Big(s-\sum_{k=1}^{j}L_k\Big)\omega_{j+1}+u_1^{(j+1)}\,\omega_{j+1}+$$

$$+\frac{\partial u_2^{(j+1)}}{\partial t}\Big]\bar{\nu}_{j+1}-\Big[\Big(s-\sum_{k=1}^{j}L_k\Big)\omega_j+u_1^{(j)}\,\omega_j+$$

$$+\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial t}\Big]\bar{\nu}_j\Big\}H\Big(s-\sum_{k=1}^{j}L_k\Big)+\bar{v}_0(t), \tag{6}$$

şi apoi cîmpul acceleraţiilor

$$\bar{a}_M(s,t)=\Big[\Big(\frac{\partial^2 u_1^{(1)}}{\partial t^2}-\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial t}\,\omega_1-u_2^{(1)}\varepsilon_1-s\omega_1^2-u_1^{(1)}\,\omega_1^2-$$

$$-\frac{\partial u_2^{(1)}}{\partial t}\,\omega_1\Big)\bar{\tau}_1+\Big(\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial t}\,\omega_1-u_2^{(1)}\,\omega_1^2+s\varepsilon_1+$$

$$+\frac{\partial u_1^{(1)}}{\partial t}\,\omega_1+u_1^{(1)}\,\varepsilon_1+\frac{\partial^2 u_2^{(1)}}{\partial t^2}\Big)\bar{\nu}_1\Big]H(s)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n-1}\Big\{\Big[\frac{\partial^2 u_1^{(j+1)}}{\partial t^2}-\frac{\partial u_2^{(j+1)}}{\partial t}\,\omega_{j+1}-u_2^{(j+1)}\,\varepsilon_{j+1}-\Big(s-\sum_{k=1}^{j}L_k\Big)\omega_{j+1}^2-$$

$$-u_1^{(j+1)}\omega_{j+1}^2-\frac{\partial u_2^{(j+1)}}{\partial t}\,\omega_{j+1}\Big]\bar{\tau}_{j+1}+\Big[\frac{\partial u_1^{(j+1)}}{\partial t}\,\omega_{j+1}-u_2^{(j+1)}\,\omega_{j+1}^2+$$

$$+\Big(s-\sum_{k=1}^{j}L_k\Big)\varepsilon_{j+1}+\frac{\partial u_1^{(j+1)}}{\partial t}\,\omega_{j+1}+u_1^{(j+1)}\,\varepsilon_{j+1}+\frac{\partial^2 u_2^{(j+1)}}{\partial t^2}\Big]\bar{\nu}_{j+1}+$$

$$+\Big[\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial t}\,\omega_j+u_2^{(j)}\,\varepsilon_j-\frac{\partial^2 u_1^{(j)}}{\partial t}+\Big(s-\sum_{k=1}^{j}L_k\Big)\omega_j^2+$$

$$+u_1^{(j)}\,\omega_j^2+\frac{\partial u_2^{(j)}}{\partial t}\,\omega_j\Big]\bar{\tau}_j+\Big[u_2^{(j)}\,\omega_j^2-\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial t}\,\omega_j-$$

$$-\left(s-\sum_{k=1}^{j}L_k\right)\varepsilon_j-\frac{\partial u_1^{(j)}}{\partial t}\omega_j-u_1^{(j)}\varepsilon_j-\frac{\partial^2 u_2^{(j)}}{\partial t^2}\Bigg]\bar{\nu}_j\Bigg\}\times$$

$$\times H\left(s-\sum_{k=1}^{j}L_k\right)+\bar{a}_0(t). \tag{7}$$

Deplasările liniar elastice $u_1(s, t)$ şi $u_2(s, t)$, în cazul unui element cinematic rectiliniu omogen cu secţiunea constantă sînt soluţiile sistemului :

$$-EA\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2}+\rho A\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}-A\rho\omega^2 u_1-2\rho A\omega\frac{\partial u_2}{\partial t}-$$

$$-\rho A\varepsilon u_2+\rho A a_{01}-\rho A\omega v_{02}-\rho A\omega^2 s-f_1=0; \tag{8}$$

$$EI\frac{\partial^4 u_2}{\partial s^4}+\rho A\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}-\rho I\frac{\partial^4 u^2}{\partial s^2\,\partial t^2}-\rho A\omega^2 u_2+$$

$$+2\rho A\omega\frac{\partial u_1}{\partial t}+\rho A\varepsilon u_1+\rho A a_{02}+\rho A\omega v_{01}+$$

$$+\rho A\omega s-f_2=0, \tag{9}$$

unde E reprezintă modulul lui Young;

ρ — masa specifică;

A — aria secţiunii transversale;

$\bar{v}_0=v_{01}\bar{\tau}+v_{02}\bar{\nu}$ — viteza extremităţii $s=0$ a elementului cinematic;

$\bar{a}_0=a_{01}\bar{\tau}+a_{02}\bar{\nu}$ — acceleraţia extremităţii $s=0$ a elementului cinematic;

$\bar{f}=f_1\bar{\tau}+f_2\bar{\nu}$ — forţa pe unitatea de lungime;

I — momentul de inerţie al secţiunii transversale, în raport cu axa neutră.

Sistemul (8)—(9) este dedus cu ajutorul principiului Hamilton şi a cineticii solidelor liniar elastice aflate în mişcare de rototranslaţie [2].

Se pot deduce şi ecuaţii decuplate, care, deşi aproximative, sînt suficient de exacte în cazurile tehnice curente.

$$c^2\frac{\partial^2 u_1}{\partial s^2}-\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}+\omega^2 u_1+\left(v_{02}\omega-a_{01}+\omega^2 s+\frac{f_1}{\rho}\right)=0, \tag{10}$$

$$EI\frac{\partial^4 u_2}{\partial s^4}+\rho A\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}+\omega^2 A\rho u_2+(\rho A a_{02}+\rho A\omega v_{01}+\rho A\varepsilon s-$$

$$-f_2)=0, \tag{11}$$

unde $c^2=E/\rho$.

Soluționarea sistemelor (8)—(9) sau (10)—(11) se poate face prin metode numerice, cu condiții la limită și inițial precizate. Mai jos se dă o soluție obținută cu ajutorul transformărilor integrale Laplace și Fourier finită.

Se consideră un element cinematic cu lungimea L : $s \in [0\,;L]$. Fie $[0\,;t]$ intervalul temporal de observare a mișcării. Se consideră diviziunea $[0\,;t] = [0\,;t_1] \cup [t_1\,;t_2] \cup \ldots \cup [t_{r-1}\,;t]$, în așa fel ca pentru orice t aparținînd unui subinterval $[t_k\,;t_{k+1}]$ elementele rototranslației, adică $\bar{v}_0$, $\bar{a}_0$, $\bar{\omega}$, $\bar{\varepsilon}$, să poată fi considerate constante, avînd valorile $\bar{v}_{0k} = v_{01k}\bar{\tau} + v_{02k}\bar{\nu}$; $\bar{a}_{0k} = a_{01k}\bar{\tau} + a_{02k}\bar{\nu}$; ω_k ; ε_k.
Fie

$$\begin{aligned} &u_1(s,\,t_k) = f_{1k}(s)\,; && \frac{\partial u_1}{\partial t}(s,\,t_k) = g_{1k}(s), \\ &u_2(s,\,t_k) = f_{2k}(s)\,; && \frac{\partial u_2}{\partial t}(s,\,t_k) = g_{2k}(s)\,; \\ &u_2(0,\,t) = \tau_1(t)\,; && u_2(L,\,t) = \tau_2(t), \\ &u_1(0,\,t) = \lambda_1(t)\,; && u_1(L,\,t) = \lambda_2(t). \end{aligned} \tag{12}$$

Se consideră că elementul cinematic este articulat la capete. Pentru $t \in [t_k\,;t_{k+1}]$, aplicînd ecuațiilor (10) și (11) succesiv transformatele integrale Laplace, în raport cu t, și Fourier finită în sinus, în raport cu s, după inversarea succesivă a acestora se obține soluția sistemului pe subintervalul considerat

$$u_{1k}(s,\,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\Big(f_{1k}^{*}(n)\,\cos\sqrt{c^2\,\alpha_n^2 - \omega_k^2}\;t) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{c^2\alpha_n^2 - \omega_n^2}}\int_0^t\Big(c^2\,\alpha_n((-1)^{n+1}\lambda_2(\tau) + \lambda_1(\tau)) +$$

$$+\frac{f_1^{*}(n,\,\tau)}{\rho}\sin\left(\sqrt{c^2\,\alpha_n^2 - \omega_k^2}\,(t-\tau)\right)\mathrm{d}\,\tau + \frac{g_{1k}^{*}(n)}{\sqrt{c^2\alpha_n^2 - \omega_k^2}}\times$$

$$\times\sin\left(\sqrt{c^2\alpha_n^2 - \omega_k^2}\;t\right) + \frac{2}{c^2\alpha_n^2 - \omega_k^2}\Big(\frac{L}{n\pi}\,(1 + (-1)^{n+1})\,(v_{02k}\,\omega_k -$$

$$- a_{01k}) + \omega_k^2\,(-1)^{n+1}\frac{L^2}{n\pi}\Big)\sin^2\left(\frac{\sqrt{c^2\,\alpha_n^2 - \omega_k^2}}{2}\;t\right)\Big)\sin\,\alpha_n s,$$

$$u_{2,k}(s,\,t) = \frac{2}{\rho LA}\sum_{n-1}^{\infty}\Big(\rho\,A\,f_{2k}^{*}(n)\,\cos\sqrt{\frac{EI\,\alpha_n^4 + \omega_k^2\,A\rho}{\rho A}}\;t +$$

$$+\sqrt{\frac{\rho A}{EI\,\alpha_n^4+\omega_k^2\,A\rho}}\int_0^t\Big(EI\,\alpha_n^3\,(\tau_1(\tau)-(-1)^{n+1}\,\tau_2(\tau))+$$

$$+f_2^*(n,\ \tau))\ \sin\sqrt{\frac{EI\alpha_n^4+\omega_k^2\,A\rho}{\rho A}}\,(t-\tau))\,\mathrm{d}\tau+$$

$$+\frac{\rho A\,g_{2k}^*(n)}{\sqrt{\dfrac{EI\,\alpha_n^4+\omega_k^2\,A\rho}{\rho A}}}\ \sin\sqrt{\frac{EI\,\alpha_n^4+\omega_k^2\,A\rho}{\rho A}}\,t-$$

$$-2\rho A\cdot\frac{\rho\,Aa_{02k}\dfrac{L}{n\pi}(1+(-1)^{n+1})+\rho Av_{01k}\,\omega_k\dfrac{L}{n\pi}(1+(-1)^{n+1})+\rho\,A\varepsilon_k(-1)^{n+1}\dfrac{L^2}{n\pi}}{EI\,\alpha_n^4+\omega_k^2\,A\rho}\times$$

$$\times\sin^2\left(\sqrt{\frac{EI\,\alpha_n^4+\omega_k^2\,A\rho}{\rho A}}\,t\right)\Big(\sin\ \alpha_n s, \tag{14}$$

unde $\alpha_n=\dfrac{n\,\pi}{L}$, $n=1,2,\ldots$

$$h^*(n)=\int_0^L h(s)\ \sin\ \alpha_n s\ ds.$$

Soluţia finală este

$$u_1\ (s,\ t)=u_{10}(s,\ t)H(t)+\sum_{k=0}^{n-1}[u_{1,k+1}\,(s,t)-u_{1,k}\,(s,t)]\,H(t-t_{k+1}), \tag{15}$$

$$u_2\ (s,\ t)=u_{20}\ (s,\ t)\ H(t)+\sum_{k=0}^{n-1}\ [u_{2,k+1}\ (s,\ t)-u_{2,k}\ (s,\ t)]\ H(t-t_{k+1}). \tag{16}$$

În mod analog se poate proceda şi pentru alte condiţii de limită. De remarcat că funcţiile $\lambda_1(t)$ şi $\lambda_2(t)$ sînt determinabile dacă se cunoaşte variaţia în timp a forţelor de legătură, în proiecţie pe axa barei.

Observaţia 3. Vitezele şi acceleraţiile unghiulare care se introduc în (6) şi (7) sînt determinate la o analiză cinematică a lanţului, considerînd elementele sale ca fiind rigide. Deformabilitatea elementelor face ca vectorul vîrtej să nu mai fie identic cu vectorul viteză unghiulară, primul depinzînd de timp şi de punct, pe cînd viteza unghiulară depinde numai de timp, pentru un anumit element cinematic rigid.

Folosind (6) şi (7) se obţine vectorul vîrtej ataşat unui element rectiliniu deformabil, sub forma

$$\omega(s,\ t)=-\frac{1}{2}\left[\omega_r(t)+\omega_r(t)\ \frac{\partial u_1\ (s,t)}{\partial s}+\frac{\partial^2 u_2(s,\ t)}{\partial t\,\partial s}\right], \tag{17}$$

unde $\omega_r(t)$ este viteza unghiulară determinată în aproximaţia rigidităţii.

4. CONCLUZII

Relaţiile deduse oferă o variantă de calcul mai unitară pentru cîmpurile de viteze şi acceleraţii ale lanţurilor cinematice plane cu elemente liniar elastice, nefiind nici o dificultate de a calcula viteza şi acceleraţia în orice punct al unui element cinematic. Limbajul teoriei distribuţiilor conferă compactitate relaţiilor deduse.

Primită la redacţie la 28 decembrie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. M. Buculei, S. Miţiş, *Sur l'analyse des vibrations des méchanismes plans*, Proc. of the Fourth World Congress for TMM, Newcastle upon Tyne, 1975, p. 229—234.
2. M. Buculei, *Sur la cinématique et la cinétique des mécanismes à éléments élastiques*, Rev. roum. sci. tech., — Méc. Appl, **2** (1979).
3. Cyr. Pelecudi, *Precizia mecanismelor*, Edit. Academiei, Bucureşti, 1975.
4. S. Miţiş, *Contribuţii la studiul vibraţiilor grupelor structurale*, Teză de doctorat, I.F.T.M., Măgurele, 1979.

METODA DE CALCUL, UTILIZÎND SERIILE DUBLE TRIGONOMETRICE, PENTRU PLACĂ RIGIDIZATĂ CU NERVURI ÎNGUSTE EXCENTRICE DISPUSE PE DOUĂ DIRECȚII

de GABRIEL D. POPA
Universitatea din Galați

Se propune metoda de calcul, utilizînd seriile duble trigonometrice, pentru structurile alcătuite din tablă rigidizată cu nervuri înguste dispuse pe două direcții ortogonale. Considerînd articulații, pe liniile teoretice de contact situate la marginile tălpilor superioare ale nervurilor, conlucrarea elastică dintre placă și nervuri se exprimă ținînd seama de săgețile plăcii, provenite din încovoiere, precum și de săgețile nervurilor înguste, provenite din încovoiere și torsiune.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Fie structura, simplu rezemată pe contur, alcătuită din placa de grosime constantă h și din două familii de nervuri excentrice, neidentice, neechidistante, cu secțiuni simetrice față de axa verticală, avînd lățimi ale tălpilor superioare neglijabile, în raport cu deschiderile plăcii, dispuse

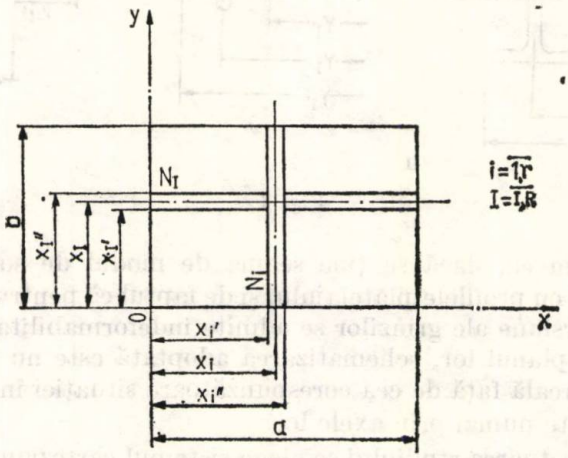


Fig. 1

după cele două direcții Ox și Oy ale axelor de coordonate; nervurile paralele cu axa Oy sînt notate $N_1, N_2, \ldots, N_i, \ldots, N_r$, iar cele paralele cu axa Ox sînt notate $N_I, N_{II}, \ldots, N_I, \ldots, N_R$ (fig. 1).

Îmbinarea dintre placă (tablă) și nervuri (profiluri la care, în particular, centrul de greutate și centrul de rotire al secțiunii transversale se confundă) este presupusă perfectă și realizată obișnuit prin cordoane de sudură continue pe toate muchiile profilurilor în contact cu tabla.

Pentru structura considerată se pune problema determinării stării de eforturi atît din placă , cît și din fiecare nervură în parte, ținînd seama de conlucrarea elastică dintre elementele componente. Rezolvarea problemei revine deci la deducerea expresiilor corespunzătoare ale săgeților plăcii și nervurilor, provenite din încovoiere, precum și a rotirilor nervurilor, provenite din torsiune.

Prin principala ipoteză de lucru adoptată, constînd în schematizarea legăturilor dintre placă și nervuri precum și ale legăturilor dintre nervuri vom admite că fiecare nervură este legată dublu articulat de placă (fig. 2.a), iar două nervuri concurente sînt legate prin patru articulații (fig. 2. *b*); în felul acesta condițiile de conlucrare elastică vor trebui să exprime egalitatea săgeților și nervurilor) pe liniile în contact (considerate la marginile tălpilor superioare ale nervurilor. precum și egalitatea săgeților nervurilor în noduri (considerate la intersecțiile marginilor tălpilor superioare ale nervurilor) sub acțiunea încărcărilor exterioare.

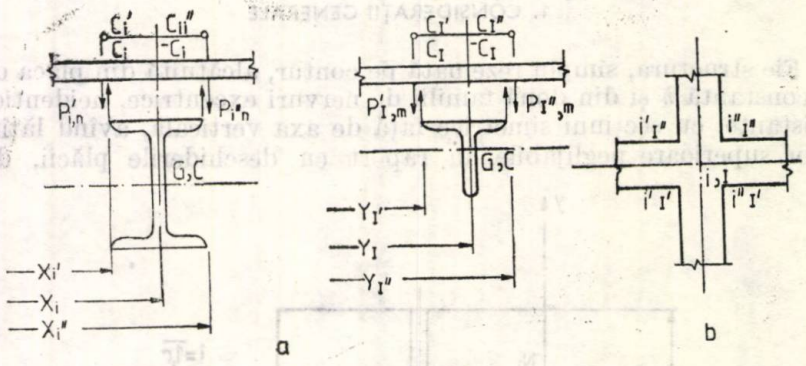


Fig. 2

Considerăm că, dacă se ține seama de modul de solidarizare prin sudură a tablei cu profilele platelajului și de faptul că pentru solicitările de încovoiere și torsiune ale grinzilor se admite indeformabilitatea secțiunilor transversale în planul lor, schematizarea adoptată este nu numai admisibilă dar și mai reală față de cea corespunzătoare situației în care nervurile ar fi reprezentate numai prin axele lor.

Pentru efectuarea studiului se alege sistemul cartezian de coordonate *Oxyz* astfel că planul *xOy* coincide cu planul median al plăcii, iar axa *Oz* este orientată în jos.

Caracteristicile geometrice și mecanice ale structurii studiate se definesc după cum urmează :

a, *b* — deschiderile de calcul ale platelajului,

$\alpha = \frac{a}{b}, \beta = \frac{b}{a}$ — rapoarte ale laturilor platelajului,

r, R — numărul nervurilor platelajului paralele cu axa Oy, și, respectiv, cu axa Ox,

$E, \mu, G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ — constantele elastice ale materialului,

$K = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — rigiditatea la încovoiere a plăcii,

I_i, I_I — momentul de inerție al nervurii curente paralelă cu axa Oy și, respectiv, al nervurii curente paralelă cu axa Ox,

J_i, J_I — caracteristica de torsiune a nervurii curente paralelă cu axa Oy și, respectiv, a nervurii curente paralelă cu axa Ox,

$p_{0,mn} = \frac{p}{mn}$ — coeficientul de serie al încărcării exterioare de suprafață ce acționează asupra plăcii.

Mai trebuie precizat că, pentru a nu extinde volumul acestei lucrări, în cele ce urmează se vor face referiri curente și se vor folosi parțial pe parcurs rezultatele din lucrările [9] și [7].

2. STABILIREA METODEI DE CALCUL

După suprimarea legăturilor pendulare dintre elementele componente și înlocuirea acestora prin reacțiuni, structura dată se separă într-o placă izotropă simplu rezemată pe întreg conturul și două familii de nervuri astfel că stabilirea metodei de calcul se va face folosind seriile duble trigonometrice.

În cazul nervurilor late, ce au făcut obiectul lucrării [9], rezolvarea problemei puse revine la rezolvarea simultană a următoarelor trei sisteme de ecuații canonice

$$[\delta_{it,n}]\{p_{t,n}\} = \{\Delta_{i,n}\} \tag{1}$$

$$(i = 1', 1'', \ldots, r', r''; \quad n = 1,2,3, \ldots; \quad m = \overline{1, M})$$

$$[\delta_{IT,m}]\{p_{T,m}\} = \{\Delta_{I,m}\} \tag{2}$$

$$(I = \bar{1}', \bar{1}'', \ldots, R', R''; \; m = 1,2,3, \ldots; \; n = \overline{1, N})$$

$$[\delta_{(iI)(tT)}]\{P_{tT}\} = \{\Delta_{iI}\} \tag{3}$$

$$(i = 1',1'', \ldots, r', r''; I = \bar{1}', \bar{1}'', \ldots, R', R''; \; m = \overline{1, M}; \; n = \overline{1, N})$$

după care devin cunoscute expresiile w_{mn}, $w_{i,n}$, $w_{I,m}$ ale coeficienţilor de serie ai săgeţilor plăcii precum şi expresiile $\theta_{i,n}$, $\theta_{I,m}$ ale coeficienţilor de serie ai rotirilor nervurilor.

În cazul nervurilor înguste, ce fac obiectul acestei lucrări, este justificată adoptarea, pentru fiecare nervură în parte, a următoarelor condiţii de bază

$$c_{i'} = -c_{i''} = c_i, \quad \frac{c_i}{a} \to 0, \tag{4.a}$$

$$c_{I'} = -c_{I''} = c_I, \quad \frac{c_I}{b} \to 0, \tag{4.b}$$

care exprimă faptul că centrele de greutate şi de rotire ale secţiunilor transversale coincid, secţiunile transversale admit o axă verticală de simetrie, iar lăţimile nervurilor sînt mici în raport cu deschiderile platelajului.

Ţinînd seama de primele condiţii (4.a) şi (4.b) devine posibilă gruparea necunoscutelor problemei sub formele

$$p_{i',n} + p_{i'',n} = 2s_{i',n},$$

$$p_{i',n} - p_{i'',n} = 2\frac{s_{i'',n}}{c_i},$$

$$p_{I',m} + p_{I'',m} = 2s_{I',m}, \tag{5.a}$$

$$p_{I',m} - p_{I'',m} = 2\frac{s_{I'',m}}{c_I},$$

$$(P_{i'I'} + P_{i'I''}) + (P_{i''I'} + P_{i''I''}) = 4S_{i'I'},$$

$$(P_{i'I'} + P_{i'I''}) - (P_{i''I'} + P_{i''I''}) = -4\frac{S_{i''I'}}{c_i},$$

$$(P_{i'I'} + P_{i''I'}) + (P_{i'I''} + P_{i''I''}) = 4S_{i'I'},$$

$$(P_{i'I'} + P_{i''I'}) - (P_{i'I''} + P_{i''I''}) = 4\frac{S_{i'I''}}{c_i}, \tag{6.a}$$

$$(P_{i'I'} - P_{i''I'}) - (P_{j'I''} - P_{i''I''}) = 4\frac{S_{i''I''}}{c_i c_I},$$

$$(P_{i'I'} - P_{i''I'}) + (P_{i'I''} - P_{i''I''}) = -4\frac{S_{i''I'}}{c_i},$$

$$(P_{i'I'} - P_{i'I''}) - (P_{i''I'} - P_{i''I''}) = 4\,\frac{S_{i''I''}}{c_i c_I},$$

$$(P_{i'I'} - P_{i'I''}) + (P_{i''I'} - P_{i''I''}) = 4\,\frac{S_{i'I''}}{c_I},$$

din care rezultă

$$p_{i,n} = s_{i',n} + \frac{s_{i'',n}}{c_i},$$

$$p_{i'',n} = s_{i',n} - \frac{s_{i'',n}}{c_i}, \tag{5.b}$$

$$p_{I',m} = s_{I',m} + \frac{s_{I''m}}{c_I},$$

$$p_{I'',m} = s_{I''m} - \frac{s_{I'',m}}{c_I},$$

$$P_{i'I'} + P_{i'I''} = 2\left(S_{i'I'} - \frac{S_{i''I'}}{c_i}\right),$$

$$P_{i''I'} + P_{i''I''} = 2\left(S_{i'I'} + \frac{S_{i''I'}}{c_i}\right),$$

$$P_{i'I'} + P_{i''I'} = 2\left(S_{i'I'} + \frac{S_{i'I''}}{c_I}\right),$$

$$P_{i'I''} + P_{i''I''} = 2\left(S_{i'I'} - \frac{S_{i'I''}}{c_I}\right),$$

$$P_{i'I'} - P_{i''I'} = 2\left(\frac{S_{i''I''}}{c_i c_I} - \frac{S_{i''I'}}{c_i}\right), \tag{6.b}$$

$$P_{i'I''} - P_{i''I''} = 2\left(-\frac{S_{i''I''}}{c_i c_I} - \frac{S_{i''I'}}{c_i}\right),$$

$$P_{i'I'} - P_{i'I''} = 2\left(\frac{S_{i''I''}}{c_i c_I} + \frac{S_{i'I''}}{c_I}\right),$$

$$P_{i''I'} - P_{i''I''} = 2\left(-\frac{S_{i''I''}}{c_i c_I} + \frac{S_{i'I''}}{c_I}\right),$$

$$P_{i'I'} = S_{i'I'} - \frac{S_{i''I'}}{c_i} + \frac{S_{i'I''}}{c_I} + \frac{S_{i''I''}}{c_i c_I},$$

$$P_{i''I'} = S_{i'I'} + \frac{S_{i''I'}}{c_i} + \frac{S_{i'I''}}{c_I} - \frac{S_{i''I''}}{c_i c_I}, \tag{6.c}$$

$$P_{i'I''} = S_{i'I'} - \frac{S_{i''I'}}{c_i} - \frac{S_{i'I''}}{c_I} - \frac{S_{i''I''}}{c_i c_I},$$

$$P_{i''I''} = S_{i'I'} + \frac{S_{i''I'}}{c_i} - \frac{S_{i'I''}}{c_I} + \frac{S_{i''I''}}{c_i c_I},$$

unde noile necunoscute sînt :

$s_{i',n}$, $s_{I',m}$ — jumătatea coeficientului de serie al încărcării liniare pe placă la contactul cu nervura N_i şi, respectiv, cu nervura N_I,

$s_{i'',n}$, $s_{I'',m}$ — jumătatea coeficientului de serie al momentului de torsiune distribuit ce acţionează asupra nervurii N_i şi, respectiv, asupra nervurii N_I la contactul cu placa,

$S_{i'I'}$ — sfertul încărcării concentrate ce acţionează asupra nervurii N_i, la contactul cu nervura N_I,

$S_{i''I'}$, $S_{i'I''}$ — sfertul momentului de torsiune concentrat ce acţionează asupra nervurii N_i şi, respectiv, asupra nervurii N_I în punctul lor de contact,

$S_{i''I''}$ — necunoscută suplimentară de tranziţie de la grupul necunoscutelor aferente intersecţiei muchiilor la grupul necunoscutelor aferente intersecţiei axelor nervurilor N_i şi N_I.

Este de menţionat că indicii prim şi secund, ce intervin mai sus la notarea celor două necunoscute aferente aceleaşi nervuri sau a celor patru necunoscute aferente aceluiaşi nod, au numai rolul de a diferenţia necunoscutele între ele şi nu mai au nici o legătură cu una sau alta din cele două muchii ale unei nervuri sau cu unul sau altul din cele patru puncte de intersecţie în nod ale muchiilor a două nervuri.

Gruparea necunoscutelor a fost necesară pentru aplicarea condiţiilor secunde din relaţiile (4.a), (4.b) astfel ca prin trecerea la limită a rezultatelor din [9], ce va fi făcută în continuare, să se obţină noile expresii ale coeficienţilor de serie pentru săgeţile plăcii, săgeţile şi rotirile nervurilor, precum şi pentru expresiile coeficienţilor sistemelor de ecuaţii canonice.

În conformitate cu notaţiile (5.b) se calculează

$$p_{i',n} \sin \alpha_m x_{i'} + p_{i'',n} \sin \alpha_m x_{i''} =$$

$$= 2\left(s_{i',n} \sin \alpha_m x_i \cos \alpha_m c_i - \frac{s_{i'',n}}{c_i} \sin \alpha_m c_i \cos \alpha_m x_i\right),$$

$$p_{I',m} \sin \beta_n y_I + p_{I'',m} \sin \beta_n y_{I''} =$$

$$= 2\left(s_{I',m} \sin \beta_n y_I \cos \beta_n c_I - \frac{s_{I'',m}}{c_I} \sin \beta_n c_I \cos \beta_n y_I\right),$$

iar în conformitate cu condițiile secunde (4.a),(4.b) rezultă

$$\lim_{\frac{c_i}{a}\to 0} (p_{i',n} \sin \alpha_m x_{i'} + p_{i'',n} \sin \alpha_m x_{i''}) =$$

$$= 2(s_{i',n} \sin \alpha_m x_i - s_{i'',n}\alpha_m \cos \alpha_m x_i), \qquad (a)$$

$$\lim_{\frac{c_I}{b}\to 0} (p_{i',m} \sin \beta_n y_{I'} + p_{I'',m} \sin \beta_n y_{I''}) =$$

$$= 2 (s_{I',m} \sin \beta_n y_I - s_{I'',m}\beta_n \cos \beta_n y_I),$$

astfel că expresia din [9] a coeficienților de serie ai săgeților plăcii devine :

$$w_{mn} = \frac{a^4}{\pi^4 K(m^2 + \alpha^2 n^2)^2}\left[p_{0.mn} + \frac{4}{a}\sum_{i=1}^{r}(s_{i',n} \sin\alpha_m x_i - s_{i'',n}\alpha_m \cos\alpha_m x_i) + \right.$$

$$\left. + \frac{4}{b}\sum_{I=1}^{R}(s_{I',m} \sin\beta_n y_I - s_{I'',m}\beta_n \sin \beta_n y_I)\right]$$

$$\left(\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b}\right). \qquad (7)$$

În conformitate cu notațiile (6.b) se calculează

$$(P_{i'I'} + P_{i''I'}) \sin \beta_n y_{I'} + (P_{i'I''} + P_{i''I''}) \sin \beta_n y_{I''} =$$

$$= 4\left(S_{i'I'} \sin \beta_n y_I \cos \beta_n c_I - \frac{S_{i'I''}}{c_I} \sin \beta_n c_I \cos \beta_n y_I\right),$$

$$(P_{i,I'} + P_{i'I''})\sin \alpha_m x_{i'} + (P_{i''I'} + P_{i''I''}) \sin \alpha_m x_{i''} =$$

$$= 4\left(S_{i'I'} \sin \alpha_m x_i \cos \alpha_m c_i + \frac{S_{i''I'}}{c_i} \sin \alpha_m c_i \cos \alpha_m x_i\right),$$

iar în conformitate cu condițiile secunde (4.a), (4.b) rezultă

$$\lim_{\frac{c_I}{b}\to 0} [(P_{i'I'} + P_{i''I'}) \sin \beta_n y_{I'} + (P_{i'I''} + P_{i''I''}) \sin \beta_n y_{I''}] =$$

$$= 4 (S_{i'I'} \sin \beta_n y_I - S_{i'I''}\beta_n \cos \beta_n y_I),$$

$$\lim_{\frac{c_i}{a}\to 0} [(P_{i'I'} + P_{i'I''}) \sin \alpha_m x_{i'} + (P_{i''I'} + P_{i''I''}) \sin \alpha_m x_{i''}] = \quad \text{(b)}$$

$$= 4 (S_{i'I'} \sin \alpha_m x_i + S_{i''I'} \alpha_m \cos \alpha_m x_i),$$

astfel că expresiile din [9] ale coeficienţilor de serie ai săgeţilor nervurilor devin

$$w_{i,n} = \frac{b^4}{\pi^4 EI_i n^4} \left[-2s_{i',n} + \frac{8}{b} \sum_{I=\overline{1,R}} (S_{i'I'} \sin \beta_n y_I - S_{I'I''} \beta_n \sin \beta_n y_I) \right], \quad \text{(8.a)}$$

$$w_{I,m} = \frac{a^4}{\pi^4 EI_I m^4} \left[-2 s_{I',n} - \frac{8}{a} \sum_{i=1}^{r} (S_{i'I'} \sin \alpha_m x_i + S_{i''I'} \alpha_m \cos \alpha_m x_i) \right]. \quad \text{(8.b)}$$

În conformitate cu notaţiile (6.b) se calculează

$$c_i(P_{i'I'} - P_{i''I'}) \sin \beta_n y_{I'} + c_i(P_{i'I''} - P_{i''I''}) \sin \beta_n y_{I''} =$$

$$= -4 \frac{S_{i''I''}}{c_I} \sin \beta_n c_I \cos \beta_n y_I - 4 S_{i''I'} \sin \beta_n y_I \cos \beta_n c_I,$$

$$c_I(P_{i'I'} - P_{i'I''}) \sin \alpha_m x_{i'} + c_I(P_{i''I'} - P_{i''I''}) \sin \alpha_m x_{i''} =$$

$$= -4 \frac{S_{i''I''}}{c_i} \sin \alpha_m c_i \cos \alpha_m x_i + 4 s_{i'I''} \sin \alpha_m x_i \cos \alpha_m c_i,$$

iar în conformitate cu condiţiile secunde (4.a), (4.b) rezultă

$$\lim_{\frac{c_I}{b}\to 0} [c_i(P_{i'I'} - P_{i''I'}) \sin \beta_n y_{I'} + c_i(P_{i'I''} - P_{i''I''}) \sin \beta_n y_{I''}] =$$

$$= -4(S_{i''I''} \beta_n \cos \beta_n y_I + S_{i''I'} \sin \beta_n y_I), \quad \text{(c)}$$

$$\lim_{\frac{c_i}{a}\to 0} [c_I(P_{i'I'} - P_{i'I''}) \sin \alpha_m x_{i'} + c_I(P_{i''I'} - P_{i''I''}) \sin \alpha_m x_{i''}] =$$

$$= 4(- S_{i''I''} \alpha_m \cos \alpha_m x_i + S_{i'I''} \sin \alpha_m x_i),$$

astfel că expresiile din [9] ale coeficienţilor de serie ai rotirilor nervurilor devin

$$\theta_{i,n} = \frac{b^2}{\pi^2 GJ_i n^2} \left[2s_{i'',n} + \frac{8}{b} \sum_{I=\overline{1,R}} (S_{i''I'} \sin \beta_n y_I + S_{i''I''} \beta_n \cos \beta_n y_I) \right] \quad \text{(9.a)}$$

$$\theta_{I,m} = \frac{a^2}{\pi^2 GJ_I m^2} \left[2 s_{I'',m} + \frac{8}{a} \sum_{i=1}^{r} (S_{i'I''} \sin \alpha_m x_i - S_{i''I''} \alpha_m \cos \alpha_m x_i) \right]. \quad \text{(9.b)}$$

Scriind, în conformitate cu notațiile (5.b), cele două ecuații ale sistemului (1), corespunzătoare nervurii curente N_i, pe care mai întîi le adunăm și apoi le scădem între ele, calculăm

$$\lim_{\frac{c_I}{b},\,\frac{c_i}{a}\to 0}\left[(p_{I',m}\sin\beta_n y_{I'}+p_{I'',m}\sin\beta_n y_{I''})(\sin\alpha_m x_{i'}+\sin\alpha_m x_{i''})\right]=$$

$$=4\,(s_{I',m}\sin\beta_n y_I - s_{I'',m}\beta_n\cos\beta_n y_I)\sin\alpha_m x_i,$$

$$\lim_{\frac{c_I}{b}\to 0} 2\,[(P_{i'I'}+P_{i''I'})\sin\beta_n y_{I'}+(P_{i'I''}+P_{i''I''})\sin\beta_n y_{I''}]=$$

$$=8\,(S_{i'I'}\sin\beta_n y_I - S_{i'I''}\beta_n\cos\beta_n y_I),$$

$$\lim_{\frac{c_I}{b},\,\frac{c_i}{a}\to 0}\left[(p_{I',m}\sin\beta_n y_{I'}+p_{I'',m}\sin\beta_n y_{I''})\frac{\sin\alpha_m x_{i'}-\sin\alpha_m x_{i''}}{c_i}\right]=$$

$$=-4\alpha_m(s_{I',m}\sin\beta_n y_I - s_{I'',m}\beta_n\cos\beta_n y_I)\cos\alpha_m x_i,$$

$$\lim_{\frac{c_I}{b},\,\frac{c_i}{a}\to 0} 2\,[c_i(P_{i'I'}-P_{i''I'})\sin\beta_n y_{I'}+c_i(P_{i'I''}-p_{i''I''})\sin\beta_n y_{I''}=$$

$$=-8\,(S_{i''I'}\sin\beta_n y_I + S_{i''I''}\beta_n\cos\beta_n y_I),$$

după care ținînd cont de rezultatele din [9] și [7] obținem sistemul de ecuații canonice

$$\bar\delta_{i'1',n}+s_{1',n}+\bar\delta_{i'1'',n}s_{1'',n}+\ldots+\bar\delta_{i'r',n}s_{r',n}+\bar\delta_{i'r'',n}s_{r'',n}=\bar\Delta_{i',n},$$

$$\bar\delta_{i''1',n}s_{1',n}+\bar\delta_{i''1'',n}s_{1'',n}+\ldots+\bar\delta_{i''r',n}s_{r',n}+\bar\delta_{i''r'',n}s_{r'',n}=\bar\Delta_{i'',n} \tag{10.a}$$

$$(i=\overline{1,\ r};\ n=1,2,3,\ldots),$$

unde am notat

$$\bar\delta_{i'i',n}=4\sum_m\frac{\sin^2\alpha_m x_i}{(m^2+\alpha^2n^2)^2}+\frac{2aK}{EI_i\alpha^4n^4},$$

$$\bar\delta_{i'i'',n}=-\frac{4\pi}{a}\sum_m\frac{m\sin\alpha_m x_i\cos\alpha_m x_i}{(m^2+\alpha^2n^2)^2},$$

$$\bar\delta_{i'j',n}=4\sum_m\frac{\sin\alpha_m x_i\sin\alpha_m x_j}{(m^2+\alpha^2n^2)^2},$$

$$\bar\delta_{i'j'',n}=-\frac{4\pi}{a}\sum_m\frac{m\sin\alpha_m x_i\cos\alpha_m x_j}{(m^2+\alpha^2n^2)^2},$$

$$\bar{\Delta}_{i',n} = -a\sum_m \frac{p_{0,mn}\sin\alpha_m x_i}{(m^2+\alpha^2 n^2)^2} -$$

$$-4\alpha\sum_m \sum_{I=\overline{1}}^{R} \frac{(s_{I',m}\sin\beta_n y_I - s_{i'',m}\beta_n\cos\beta_n y_I)\sin\alpha_m x_i}{(m^2+\alpha^2 n^2)^2} +$$

$$+\frac{8K}{EI_i\,\alpha^3 n^4}\sum_{I=\overline{1}}^{R}(S_{i'I'}\sin\beta_n y_I - S_{i'I''}\beta_n\cos\beta_n y_I),$$

$$\bar{\delta}_{i''i'',m} = \frac{4\pi^2}{a^2}\sum_m \frac{m^2\cos^2\alpha_m x_i}{(m^2+\alpha^2 n^2)^2} + \frac{2\pi^2 K}{GJ_i\,a\,\alpha^2 n^2},$$

$$\bar{\delta}_{i''j',m} = -\frac{4\pi}{a}\sum_m \frac{m\cos\alpha_m x_i\sin\alpha_m x_j}{(m^2+\alpha^2 n^2)^2}, \qquad (10.b)$$

$$\bar{\delta}_{i''j'',m} = \frac{4\pi^2}{a^2}\sum_m \frac{m^2\cos\alpha_m x_i\cos\alpha_m x_j}{(m^2+\alpha^2 n^2)^2},$$

$$\bar{\Delta}_{i'',n} = \pi\sum_m \frac{m\,p_{0,mn}\cos\alpha_m x_i}{(m^2+\alpha^2 n^2)^2} +$$

$$+\frac{4\pi}{b}\sum_m \sum_{I=\overline{1}}^{R} \frac{m(s_{I',m}\sin\beta_n y_I - s_{I'',m}\beta_n\cos\beta_n y_I)\cos\alpha_m x_i}{(m^2+\alpha^2 n^2)^2} -$$

$$-\frac{8\pi^2 K}{GJ_i\,\alpha\,a^2 n^2}\sum_{I=\overline{1}}^{R}(S_{i''I'}\sin\beta_n y_I + S_{i''I''}\beta_n\cos\beta_n y_I)$$

$$(m = \overline{1, M}).$$

Scriind, în conformitate cu notaţiile (5.b), cele două ecuaţii ale sistemului (2), corespunzătoare nervurii curente N_I, pe care mai întîi le adunăm şi apoi le scădem între ele, calculăm

$$\lim_{\frac{e_i}{a},\frac{e_I}{b}\to 0}[(p_{i',n}\sin\alpha_m x_{i'} + p_{i'',n}\sin\alpha_m x_{i''})(\sin\beta_n y_{I'} + \sin\beta_n y_{I''})] =$$

$$= 4(s_{i',n}\sin\alpha_m x_i - s_{i'',n}\alpha_m\cos\alpha_m x_i)\sin\beta_n y_I,$$

$$\lim_{\frac{e_i}{a}\to 0} 2\,[(P_{i'I'} + P_{i'I''})\sin\alpha_m x_{i'} + (P_{i''I'} + P_{i''I''})\sin\alpha_m x_{i''}] =$$

$$= 8(S_{i'I'}\sin\alpha_m x_i + S_{i''I'}\alpha_m\cos\alpha_m x_i),$$

$$\lim_{\frac{c_i}{a},\,\frac{c_I}{b}\to 0}\left[(p_{i',n}\sin\alpha_m x_{i'}+p_{i'',n}\sin\alpha_m x_{i''})\frac{\sin\beta_n y_{I'}-\sin\beta_n y_{I''}}{c_I}\right]=$$

$$=-4\beta_n(s_{i',n}\sin\alpha_m x_i - s_{i'',n}\alpha_m\cos\alpha_m x_i)\cos\beta_n y_I),$$

$$\lim_{\frac{c_i}{a},\,\frac{c_I}{b}\to 0} 2\,[c_I(P_{i'I'}-P_{i'I''})\sin\alpha_m x_{i'}+c_I(P_{i''I'}-P_{i''I''})\sin\alpha_m x_{i''}]=$$

$$=8\,(S_{i'I''}\sin\alpha_m x_i - S_{i''I''}\alpha_m\cos\alpha_m x_i)$$

după care ținînd cont de rezultatele din [9] și [7] obținem sistemul de ecuații canonice

$$\bar\delta_{I'\mp',m}s_{\mp',m}+\bar\delta_{I'\mp'',m}s_{\mp'',m}+\ldots+\bar\delta_{I'R',m}s_{R',m}+\bar\delta_{I'R'',m}s_{R'',m}=\bar\Delta_{I',m},$$

$$\bar\delta_{I''\mp',m}s_{\mp',m}+\bar\delta_{I''\mp'',m}s_{\mp'',m}+\ldots+\delta_{I''R',m}s_{R',m}+\bar\delta_{I''R'',m}s_{R'',m}=\bar\Delta_{I'',m} \tag{11.a}$$

$$(I=\overline{\mp,R};\ m=1,2,3,\ldots),$$

unde am notat

$$\bar\delta_{I'I',m}=4\sum_n\frac{\sin^2\beta_n y_I}{(\beta^2m^2+n^2)^2}+\frac{2bK}{EI_I\beta^4m^4},$$

$$\bar\delta_{I'I'',m}=-\frac{4\pi}{b}\sum_n\frac{n\sin\beta_n y_I\cos\beta_n y_I}{(\beta^2m^2+n^2)^2},$$

$$\bar\delta_{I'J',m}=4\sum_n\frac{\sin\beta_n y_I\sin\beta_n y_J}{(\beta^2m^2+n^2)^2},$$

$$\bar\delta_{I'J'',m}=-\frac{4\pi}{b}\sum_n\frac{n\sin\beta_n y_I\cos\beta_n y_J}{(\beta^2m^2+n^2)^2},$$

$$\bar\Delta_{I',m}=-b\sum_n\frac{p_{0,mn}\sin\beta_n y_I}{(\beta^2m^2+n^2)^2}-$$

$$-4\beta\sum_n\sum_{i=1}^{r}\frac{(s_{i',n}\sin\alpha_m x_i - s_{i'',n}\alpha_m\cos\alpha_m x_i)\sin\beta_n y_I}{(\beta^2m^2+n^2)^2}- \tag{11.b}$$

$$-\frac{8K}{EI_I\beta^3m^4}\sum_{i=1}^{r}(S_{i'I'}\sin\alpha_m x_i+S_{i''I'}\alpha_m\cos\alpha_m x_i),$$

$$\bar{\delta}_{I''I'',m} = \frac{4\pi^2}{b^2} \sum_n \frac{n^2 \cos^2 \beta_n y_I}{(\beta^2 m^2 + n^2)^2} + \frac{2\pi^2 K}{GJ_I b \beta^2 m^2},$$

$$\bar{\delta}_{I''J',m} = -\frac{4\pi}{b} \sum_n \frac{n \cos \beta_n y_I \sin \beta_n y_J}{(\beta^2 m^2 + n^2)^2},$$

$$\bar{\delta}_{I''J'',m} = \frac{4\pi^2}{b^2} \sum_n \frac{n^2 \cos \beta_n y_I \cos \beta_n y_J}{(\beta^2 m^2 + n^2)^2},$$

$$\bar{\Delta}_{I'',m} = \pi \sum_n \frac{n p_{0,mn} \cos \beta_n y_I}{(\beta^2 m^2 + n^2)^2} +$$

$$+ \frac{4\pi}{a} \sum_n \sum_{i=1}^{r} \frac{n(s_{i',n} \sin \alpha_m x_i - s_{i'',n} \alpha_m \cos \alpha_m x_i) \cos \beta_n y_I}{(\beta^2 m^2 + n^2)^2} -$$

$$- \frac{8\pi^2 K}{GJ_I \beta b^2 m^2} \sum_{i=1}^{r} (S_{i'I''} \sin \alpha_m x_i - S_{i''I''} \alpha_m \cos \alpha_m x_i$$

$$(n = \overline{1, N}).$$

Scriind, în conformitate cu notaţiile (6.c), cele patru ecuaţii curente ale sistemului (3) pe care le însumăm algebric de patru ori, după semnele din fiecare relaţie distinctă (6.a) de grupare a necunoscutelor, se trece la limită conform condiţiilor secunde (4.a), (4.b).

Ţinînd cont şi de rezultatele din [9] se obţine sistemul de ecuaţii canonice

$$\bar{\delta}_{(i'I')(1'I')} S_{1'I'} + \bar{\delta}_{(i'I')(1''I')} S_{1''I'} + \bar{\delta}_{(i'I')(1'I'')} S_{1'I''} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i'I')(1''I'')} S_{1''I''} + \ldots + \bar{\delta}_{(i'I')(r'I')} S_{r'I'} + \bar{\delta}_{(i'I')(r''I')} S_{r''I'} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i'I')(r'I'')} S_{r'I''} + \bar{\delta}_{(i'I')(r''I'')} S_{r''I''} + \ldots + \bar{\delta}_{(i'I')(i'\dot{-}')} S_{i'\dot{-}'} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i'I')(i''\dot{-}')} S_{i''\dot{-}'} + \bar{\delta}_{(i'I')(i'\dot{-}'')} S_{i'\dot{-}''} + \bar{\delta}_{(i'I')(i''\dot{-}'')} S_{i''\dot{-}''} + \ldots +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i'I')(i'R')} S_{i'R'} + \bar{\delta}_{(i'I')(i''R')} S_{i''R'} + \bar{\delta}_{(i'I')(i'R'')} S_{i'R''} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i'I')(i''R'')} S_{i''R''} = \bar{\Delta}_{i'I'},$$

$$\bar{\delta}_{(i''I')(1'I')} S_{1'I'} + \bar{\delta}_{(i''I')(1''I')} S_{1''I'} + \bar{\delta}_{(i''I')(1'I'')} S_{1'I''} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i''I')(1''I'')} S_{1''I''} + \ldots + \bar{\delta}_{(i''I')(r'I')} S_{r'I'} + \bar{\delta}_{(i''I')(r''I')} S_{r''I'} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i''I')(r'I'')} S_{r'I''} + \bar{\delta}_{(i''I')(r''I'')} S_{r''I''} + \ldots + \bar{\delta}_{(i''I')(i'\bar{\cdot})} S_{i'\bar{\cdot}'} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i''I')(i''\bar{\cdot})} S_{i''\bar{\cdot}'} + \bar{\delta}_{(i''I')(i'\bar{\cdot})''} S_{i'\bar{\cdot}''} + \bar{\delta}_{(i''I')(i''\bar{\cdot})''} S_{i''\bar{\cdot}''} + \ldots +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i''I')(i'R')} S_{i'R'} + \bar{\delta}_{(i''I')(i''R')} S_{i''R'} + \bar{\delta}_{(i''I')(i'R'')} S_{i'R''} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i''I')(i''R'')} S_{i''R''} = \bar{\Delta}_{i''I'}, \qquad \textbf{(12.)a}$$

$$\bar{\delta}_{(i'I'')(1'I')} S_{1'I'} + \bar{\delta}_{(i'I'')(1''I')} S_{1''I'} + \bar{\delta}_{(i'I'')(1'I'')} S_{1'I''} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i'I'')(1''I'')} S_{1''I''} + \ldots + \bar{\delta}_{(i'I'')(r'I')} S_{r'I'} + \bar{\delta}_{(i'I'')(r''I')} S_{r''I'} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i'I'')(r'I'')} S_{r'I''} + \bar{\delta}_{(i'I'')(r''I'')} S_{r''I''} + \ldots + \bar{\delta}_{(i'I'')(i'\bar{\cdot})} S_{i'\bar{\cdot}'} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i'I'')(i''\bar{\cdot})} S_{i''\bar{\cdot}'} + \bar{\delta}_{(i'I'')(i'\bar{\cdot})''} S_{i'\bar{\cdot}''} + \bar{\delta}_{(i'I'')(i''\bar{\cdot})''} S_{i''\bar{\cdot}''} + \ldots +$$

$$\bar{\delta}_{(i'I'')(i'R')} S_{i'R'} + \bar{\delta}_{(i'I'')(i''R')} S_{i''R'} + \bar{\delta}_{(i'I'')(i'R'')} S_{i'R''} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i'I'')(i''R'')} S_{i''R''} = \bar{\Delta}_{i''I''},$$

$$\bar{\delta}_{(i''I'')(1'I')} S_{1'I'} + \bar{\delta}_{(i''I'')(1''I')} S_{1''I'} + \bar{\delta}_{(i''I'')(1'I'')} S_{1'I''} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i''I'')(1''I'')} S_{1''I''} + \ldots + \bar{\delta}_{(i''I'')(r'I')} S_{r'I'} + \bar{\delta}_{(i''I'')(r''I')} S_{r''I'} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i''I'')(r'I'')} S_{r'I''} + \bar{\delta}_{(i''I'')(r''I'')} S_{r''I''} + \ldots + \bar{\delta}_{(i''I'')(i'\bar{\cdot})} S_{i'\bar{\cdot}'} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i''I'')(i''\bar{\cdot})} S_{i''\bar{\cdot}'} + \bar{\delta}_{(i''I'')(i'\bar{\cdot})''} S_{i'\bar{\cdot}''} + \bar{\delta}_{(i''I'')(i''\bar{\cdot})''} S_{i''\bar{\cdot}''} + \ldots +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i''I'')(i'R')} S_{i'R'} + \bar{\delta}_{(i''I'')(i''R')} S_{i''R'} + \bar{\delta}_{(i''I'')(i'R'')} S_{i'R''} +$$

$$+ \bar{\delta}_{(i''I'')(i''R'')} S_{i''R''} = \bar{\Delta}_{i''i''}$$

$$(i = \overline{1,\ r};\ I = \overline{\bar{\cdot},\ R}),$$

unde am notat

$$\bar{\delta}_{(i'I')(i'I')} = \frac{a^3}{EI_I} \sum_m \frac{\sin^2 \alpha_m x_i}{m^4} + \frac{b^3}{EI_i} \sum_n \frac{\sin^2 \beta_n y_I}{n^4},$$

$$\bar{\delta}_{(i'I')(i''I')} = \frac{\pi a^2}{EI_I} \sum_m \frac{\sin \alpha_m x_i \cos \alpha_m x_i}{m^3},$$

$$\bar{\delta}_{(i'I')(i'I'')} = -\frac{\pi b^2}{EI_i} \sum_n \frac{\sin \beta_n y_I \cos \beta_n y_I}{n^3},$$

$$\bar{\delta}_{(i'I')(i''I'')} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{(i'I')(j'I')} = \frac{a^3}{EI_I} \sum_m \frac{\sin \alpha_m x_i \sin \alpha_m x_j}{m^4},$$

$$\bar{\delta}_{(i'I')(j''I')} = \frac{\pi a^2}{EI_I} \sum_m \frac{\sin \alpha_m x_i \cos \alpha_m x_j}{m^3},$$

$$\bar{\delta}_{(i'I')(j'I'')} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{(i'I')(j''I'')} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{(i'I')(i'J')} = \frac{b^3}{EI_i} \sum_n \frac{\sin \beta_n y_I \sin \beta_n y_J}{n^4},$$

$$\bar{\delta}_{(i'I')(i''J')} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{(i'I')(i'J'')} = -\frac{\pi b^2}{EI_i} \sum_n \frac{\sin \beta_n y_I \cos \beta_n y_J}{n^3},$$

$$\bar{\delta}_{(i'I')(i''J'')} = 0,$$

$$\bar{\Delta}_{i'I'} = -\frac{a^4}{4\,EI_I} \sum_m \frac{s_{I',m} \sin \alpha_m x_i}{m^4} + \frac{b^4}{4EI_i} \sum_n \frac{s_{i',n} \sin \beta_n y_I}{n^4},$$

$$\bar{\delta}_{(i''I')(i''I'} = \frac{\pi^2 a}{EI_I} \sum_m \frac{\cos^2 \alpha_m x_i}{m^2} + \frac{\pi^2 b}{GJ_i} \sum_n \frac{\sin^2 \beta_n y_I}{n^2},$$

$$\delta_{(i''I')(i'I'')} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{(i''I')(i''I'')} = \frac{\pi^3}{GJ_i} \sum \frac{\sin \beta_n y_I \cos \beta_n y_I}{n},$$

$$\bar{\delta}_{(i''I')(j'I')} = \frac{\pi a^2}{EI_I} \sum_m \frac{\cos \alpha_m x_i \sin \alpha_m x_j}{m^3},$$

$$\bar{\delta}_{(i''I')(j''I')} = \frac{\pi^2 a}{EI_I} \sum_m \frac{\cos \alpha_m x_i \cos \alpha_m x_j}{m^2},$$

$$\delta_{(i''I')(j'I'')} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{(i''I')(j''I'')} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{(i''I')(i'J')} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{(i''I')(i''J')} = \frac{\pi^2 b}{GJ_i} \sum_n \frac{\sin \beta_n y_I \sin \beta_n y_J}{n^2},$$

$$\bar{\delta}_{(i''I')(i'J'')} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{(i''I')(i''J'')} = \frac{\pi^3}{GJ_i} \sum_n \frac{\sin \beta_n y_I \cos \beta_n y_J}{n},$$

$$\bar{\Delta}_{i''I'} = -\frac{\pi a^3}{4EI_I} \sum_m \frac{s_{I',m} \cos \alpha_m x_i}{m^3} -$$

$$-\frac{\pi^2 b^2}{4GJ_i} \sum_n \frac{s_{i'',n} \sin \beta_n y_I}{n^2},$$

$$\bar{\delta}_{(i'I'')(i''I'')} = \frac{\pi^2 a}{GJ_I} \sum_m \frac{\sin^2 \alpha_m x_i}{m^2} + \frac{\pi^2 b}{EI_i} \sum_n \frac{\cos^2 \beta_n y_I}{n^2},$$

$$\bar{\delta}_{(i'I'')(i''I'')} = -\frac{\pi^3}{GJ_I} \sum_m \frac{\sin \alpha_m x_i \cos \alpha_m x_i}{m},$$

$$\bar{\delta}_{(i'I'')(j'I')} = 0, \qquad \text{(12.b)}$$

$$\bar{\delta}_{(i'I'')(j''I')} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{(i'I'')(j''I'')} = \frac{\pi^2 a}{GJ_I} \sum_m \frac{\sin \alpha_m x_i \sin \alpha_m x_j}{m^2},$$

$$\bar{\delta}_{(i'I'')(j''I'')} = -\frac{\pi^3}{GJ_I} \sum_m \frac{\sin \alpha_m x_i \cos \alpha_m x_j}{m},$$

$$\bar{\delta}_{(i'I'')(i'J')} = -\frac{\pi b^2}{EI_i} \sum_n \frac{\cos \beta_n y_I \sin \beta_n y_J}{n^3},$$

$$\bar{\delta}_{(i'I'')(i''J')} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{(i'I'')(i''J'')} = \frac{\pi^2 b}{EI_i} \sum_n \frac{\cos \beta_n y_I \cos \beta_n y_J}{n^2},$$

$$\bar{\delta}_{(i'I'')(i''J'')} = 0,$$

$$\bar{\Delta}_{i'I''} = -\frac{\pi^2 a^2}{4GJ_I}\sum_m \frac{s_{I'',m}\sin\alpha_m x_i}{m^2} - \frac{\pi b^3}{EI_i}\sum_n \frac{s_{i',n}\cos\beta_n y_I}{n^3}$$

$$\bar{\delta}_{(i''I'')(i''I'')} = \frac{\pi^4}{aGJ_I}\sum_m \cos^2\alpha_m x_i + \frac{\pi^4}{bGJ_i}\sum_n \cos^2\beta_n y_I,$$

$$\bar{\delta}_{(i''I'')(j'I')} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{(i''I'')(j''I')} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{(i''I'')(j'I'')} = -\frac{\pi^3}{GJ_I}\sum_m \frac{\cos\alpha_m x_i \sin\alpha_m x_j}{m},$$

$$\bar{\delta}_{(i''I'')(j''I'')} = \frac{\pi^4}{aGJ_I}\sum_m \cos\alpha_m x_i \cos\alpha_m x_j,$$

$$\bar{\delta}_{(i''I'')(i'J')} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{(i''I'')(i''J')} = \frac{\pi^3}{GJ_i}\sum_n \frac{\cos\beta_n y_I \sin\beta_n y_J}{n},$$

$$\bar{\delta}_{(i''I'')(i'J'')} = 0,$$

$$\bar{\delta}_{(i''I'')(i''J'')} = \frac{\pi^4}{bGJ_i}\sum_n \cos\beta_n y_I \cos\beta_n y_J,$$

$$\bar{\Delta}_{i''I''} = \frac{\pi^3 a}{4GJ_I}\sum_m \frac{s_{i'',m}\cos\alpha_m x_i}{m} - \frac{\pi^3 b}{4GJ_i}\sum_n \frac{s_{i'',n}\cos\beta_n y_I}{n}$$

$$(m = \overline{1,\ M};\quad n = \overline{1,\ N}).$$

Cele trei sisteme de ecuaţii canonice (10.a), (11.a), (12.a) sînt simultane şi se rezolvă după metodologia din lucrarea [9].

Primită la redacţie la 1 aprilie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. R. Bareš, Ch. Massonet, *Le calcul des grillages de poutre orthotropes selon la méthode Guyon-Massonet-Bareš*, Dunod, Paris, 1966.
2. I. Beleş, *Contribuţii la calculul construcţiilor metalice hidrotehnice, cu elemente de rezistenţă din tablă şi grinzi, ţinînd seama de efectul de conlucrare spaţială* (teză de doctorat). Institutul de construcţii Bucureşti, 1971.
3. I. Beleş, *Placa ortotropă cu diafragme*, St. cerc. mec. apl. **33**, *3* (1976).

4. I. G. Bucă, *Contribuții la definirea stării limită de deformație a platelajelor ortotrope ale podurilor metalice* (teză de doctorat), Institutul de construcții București, 1970.
5. D. G. Popa, *Contribuții la calculul plăcilor ortotrope, ținînd seama de legătura elastică dintre placă și nervuri* (teză de doctorat), Institutul de construcții București, 1978.
6. D. G. Popa, *Aplicarea metodei seriilor simple trigonometrice la calculul plăcilor rigidizate cu nervuri dispuse pe o singură parte*, Buletinul științific al Institutului de construcții București, **20**, *3—4* (1977).
7. D. G. Popa, *Extinderea soluției prin serii duble trigonometrice pentru placa rigidizată cu nervuri dispuse pe o singură parte* (sub tipar).
8. D. G. Popa, *Metoda de calcul, utilizînd seriile duble trigonometrice, pentru placa rigidizată cu diafragme excentrice dispuse pe două direcții* (sub tipar).
9. D. G. Popa, *Metoda de calcul, utilizînd seriile duble trigonometrice pentru placa rigidizată cu nervuri excentrice dispuse pe două direcții* (sub tipar).
10. V. M. Soare, *Contribuții la calculul plăcilor ortotrope cu nervuri de rigidizare pe o singură parte*, Studii și cercetări de mecanică aplicată, **33**, *4* (1974), **34**, *1* (1975).
11. V. M. Soare, *Plăci plane*. Secțiunea VI din *Manual pentru calculul construcțiilor*, Ediția a 2-a, Edit. tehnică, București, 1977.
12. Wah Thein, L. R. Calcote, *Structural Analysis by Finite Difference Calculus*, Van Nostrand Rheinhold Company, New York, 1970.

CARACTERIZAREA RĂSPUNSULUI PRINCIPALELOR TIPURI DE PĂMÎNTURI LA SOLICITĂRI SEISMICE

II. Modele neliniare pentru răspunsul pămînturilor la solicitarea ciclică de forfecare

de ECATERINA BORCIA

Institutul de fizică și tehnologia materialelor, București

Lucrarea constituie o sinteză a datelor existente în literatura de specialitate privind caracterizarea răspunsului principalelor tipuri de pămînturi la solicitări seismice.
În prima parte a articolului se face o analiză a factorilor ce influențează proprietățile elastice și disipative ale argilelor, nisipurilor și calcarelor.
În partea a doua a articolului sînt prezentate modelele neliniare utilizabile în descrierea răspunsului la solicitarea ciclică de forfecare indusă de mișcarea seismică.

Experimental, s-a observat că răspunsul pămînturilor la solicitări de încărcare ciclică are un predominant caracter neliniar.

Comportarea unei probe supusă la forfecare ciclică uniformă poate fi descrisă prin relații tensiune-deformație de tip histeretic.

Cel mai utilizat mod de construire a curbelor tensiune-deformație pentru solicitarea ciclică pornind de la datele furnizate de încărcarea monotonă este criteriul dat de Masing în 1926.

1. CRITERIUL MASING

O schemă idealizată a unei bucle de histerezis a curbei tensiune-deformație pentru o probă supusă la forfecare ciclică este prezentată în figura 1. Curba AOC reprezintă curba tensiune-deformație pentru încărcarea de forfecare monotonă denumită *curbă-schelet*.

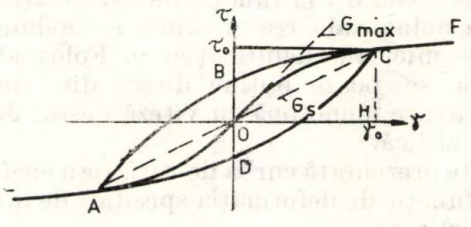


Fig. 1

Specific curbei-schelet este faptul că admite asimptotă orizontală (dreapta de ecuație $\tau = \tau_{max}$ în figura 1) și că panta curbei descrește în raport cu deformația specifică de lunecare γ.

Pentru construirea buclei histeretice, pornind de la curba-schelet, criteriul Masing stipulează următoarele [4], [5]:

i1) tensiuni egale în valoare absolută și de semn opus produc deformații egale în modul și de semn contrar;

i2) panta curbei tensiune-deformație histeretice în punctele de amplitudine maximă este egală cu panta în origine a curbei-schelet (punctele A, C în fig. 1);

i3) curbele de încărcare ($\dot{\gamma} > 0$), respectiv descărcare ($\dot{\gamma} < 0$), sînt reproduceri ale curbei-schelet obținute prin translatare în punctele de minim (A, în fig. 1) și, respectiv de maxim (C, în fig. 1).

În ipotezele i1) — i3) o relație tensiune-deformație de tip histeretic este complet determinată de panta dreptei care unește punctele de extrem și de aria buclei histerezis. Panta dreptei AC definește modulul (secant) de elasticitate transversală, notat G_s pentru $\gamma = \gamma_C$, iar aria buclei histerezis permite caracterizarea amortizării histeretice. O analiză detaliată a diferitelor tipuri de amortizare pentru diferite materiale este făcută de Lazan [7]. Pentru amortizarea de tip histeretic lucrarea oferă mai multe posibilități de definire. Pentru pămînturi, s-a adoptat definiția propusă de Jacobsen [6] conform căreia, coeficientul de amortizare internă λ este

$$\lambda = \frac{A_L}{4\pi A_T}, \tag{1}$$

unde A_L reprezintă aria buclei de histerezis $ABCD$; (fig. 1);

A_T — aria triunghiului OCH (fig. 1).

Notînd cu ΔW energia disipată într-un ciclu și ținînd cont că aria triunghiului OCH reprezintă energia elastică egală cu $\frac{1}{2} G_s \gamma_0$, unde γ_0 este deformația maximă de lunecare, relația (1) devine

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \frac{\Delta W}{G_s \gamma_0^2}. \tag{1'}$$

În figura 2*a* este reprezentată curba de variație a modulului secant de elasticitate transversală G_s, în funcție de deformația specifică de lunecare γ. Cu G_{max} s-a notat valoarea maximă a modulului secant G_s atinsă pentru valori foarte mici ale deformației γ. Folosind criteriul Masing, curba din figura 2*a* se poate obține direct din curba-schelet determinată printr-o încărcare monotonă cu viteză destul de mare, nemaifiind necesară încărcarea ciclică.

În figura 2*b* este prezentată curba de variație a coeficientului de amortizare internă λ, în funcție de deformația specifică de lunecare γ, denumită concis *curbă de amortizare*.

Situîndu-ne în cadrul ipotetic al criteriului Masing problema evaluării comportării mecanice a pămînturilor supuse la încărcări ciclice induse de

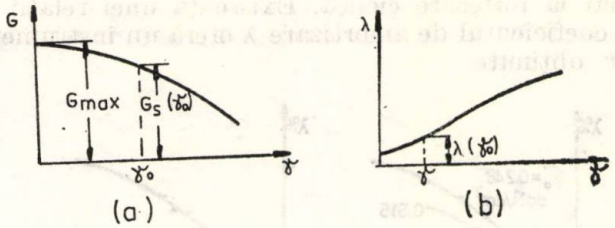


Fig. 2

seisme, se reduce la determinarea ecuației curbei-schelet deci a relației tensiune-deformație pentru încărcarea monotonă. Forma general acceptată a ecuației curbei-schelet este

$$\tau = G_s(\gamma)\gamma, \tag{2}$$

unde $G_s = G_s(\gamma)$ este o funcție neliniară.

În continuare, vor fi prezentate principalele modele neliniare întîlnite în literatura de specialitate, care propun diferite moduri de variație a modulului secant de elasticitate transversală G_s în funcție de deformația specifică de lunecare γ.

2. MODELUL HIPERBOLIC

Pentru analiza stării de tensiune și deformație în timpul solicitării ciclice de forfecare, Hardin și Drnevich [3], [4] au propus în 1970 modelul hiperbolic. Seed și Idriss [9] au făcut o analiză atentă a acestui model, comparînd rezultatele obținute cu datele experimentale citate în literatura de specialitate, concordanța, fiind satisfăcătoare.

Avantajele pe care le oferă modelul propus de Hardin și Drnevich sînt următoarele :

— modelul este controlat de un singur parametru, denumit *deformație de referință* și notat γ_r ;
— existența unei relații simple, liniare, între modulul secant de elasticitate transversală G_s și coeficientul de amortizare internă λ ;
— se descrie variația modulului secant G_s și a coeficientului de amortizare λ în raport cu *deformația normalizată* γ/γ_r.

Introducerea deformației normalizate este salutară deoarece o măsură adimensională a deformației facilitează analiza comportării pămîntului studiat, știut fiind faptul că o deformație dată nu are același efect asupra tuturor tipurilor de pămînt. Mai mult chiar, pentru același tip de pămînt , o deformație dată are efecte diferite la presiuni diferite. Studiile experimentale au arătat că variația coeficientului de amortizare λ în raport cu γ depinde de tensiunea medie (fig. 3*a*) în timp ce variația lui în raport cu deformația normalizată γ/γ_r este independentă de tensiunea medie (fig. 3*b*). Autorii citați [4], [3] afirmă că introducerea deformației normalizate permite aplicarea modelului și în cazul altor tipuri de încăr-

care, nu numai la forfecare ciclică. Existența unei relații simple între modulul G_s și coeficientul de amortizare λ oferă un instrument de control al rezultatelor obținute.

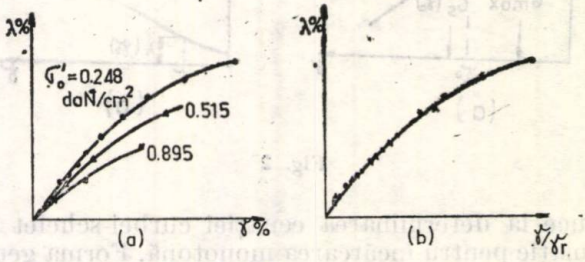


Fig. 3

În construirea modelului hiperbolic pentru comportarea mecanică la solicitarea de forfecare ciclică s-a pornit de la analiza curbei-schelet, obținută din încărcarea monotonă (fig. 4). S-a observat că :

— curba-schelet admite asimptotă orizontală pentru $\tau = \tau_{max}$, unde τ_{max} este tensiunea tangențială de rupere în încercarea monotonă de forfecare ;

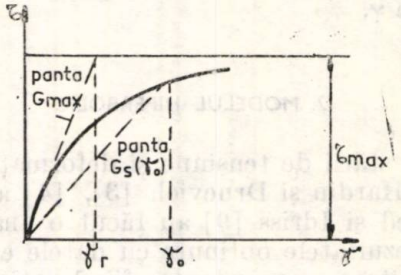


Fig. 4

— panta inițială (în origine) a curbei-schelet (notată G_{max}) reprezintă valoarea maximă a modulului secant de elasticitate transversală, G_s.

Deformația de referință γ_r se definește prin raportul

$$\gamma_r = \frac{\tau_{max}}{G_{max}}. \tag{3}$$

În practică se ia pentru G_{max} valoarea modulului G_s pentru $\gamma \simeq 10^{-4}\%$. Cu aparatura clasică de încercări statice nu se pot face înregistrări pentru deformații atît de mici, fiind necesară folosirea coloanei rezonante sau utilizarea rezultatelor măsurătorilor de teren.

O altă cale pentru determinarea valorii G_{max} este extrapolarea curbelor tensiune-deformație obținute cu aparatura uzuală de laborator ($10^{-2}\% \leqslant \gamma \leqslant 5\%$) pînă la valoarea zero a deformației.

Pentru evaluarea lui G_{max}, Hardin şi Black [2] au propus următoarea relaţie :

$$G_{max} = 14\,760 \frac{(2{,}973 - e)^2}{(1 + e)^2} (n_c)^a \sqrt{\sigma'_m}, \qquad (4)$$

unde e reprezintă indicele porilor ;

n_c — raportul de supraconsolidare ;

σ'_m — tensiunea efectivă medie ;

G_{max} şi σ'_m se exprimă în psf, 1 psf = 47,9 Pa ;

a — constantă a pămîntului ce depinde de indicele de plasticitate (PI) ; pentru un pămînt dat, valoarea constantei a se obţine prin interpolare între valorile date în următorul tabel :

PI	0	20	40	60	80	100
a	0	0,18	0,30	0,41	0,48	0,50

Studiile experimentale comparative arată că relaţia (4) dă rezultate bune pentru multe argile şi nisipuri netulburate pentru care $e \leqslant 2$.

Valoarea tensiunii tangenţiale de rupere τ_{max} depinde de starea iniţială de tensiune a pămîntului şi de modul în care se aplică tensiunea de forfecare.

În cazul în care asupra masivului de pămînt nu acţionează decît tensiunea geostatică peste care se suprapune tensiunea de forfecare, τ_{max} are semnificaţia din figura 5 şi se poate exprima sub forma :

$$\tau_{max} = \left[\left(\frac{1 + K_0}{2} \sigma'_v \sin \Phi + c \cos\Phi\right)^2 - \left(\frac{1 - K_0}{2} \sigma'_v\right)^2\right], \qquad (5)$$

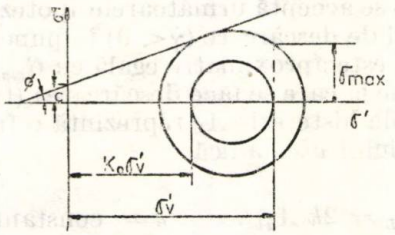


Fig. 5

unde

K_0 este coeficientul de împingere laterală în repaus ;

σ'_v — tensiunea efectivă verticală ;

c, Φ — coeziunea şi unghiul de frecare internă în regim static.

Autorii citaţi [3], [4] sugerează folosirea în relaţiile (4) şi (5) a tensiunii efective chiar şi în cazurile în care, în condiţiile solicitării dinamice, drenarea nu se poate realiza. Studiile experimentale au arătat că în cazul argilelor supuse la forfecare simplă presiunea fluidului de saturare atinge

valori semnificative după ce deformaţia depăşeşte 0,5%. Pentru nisipuri, această limită este mai mică şi cum, ţinînd seama că în marea majoritate a problemelor practice apar deformaţii de pînă la 0,1%, se poate neglija efectul presiunii fluidului de saturare, luîndu-se în considerare doar tensiunea efectivă ce se dezvoltă în scheletul solid.

Relaţiile (3), (4) şi (5) permit determinarea deformaţiei de referinţă γ_r, în funcţie de tensiunea medie efectivă statică şi de constantele de material ce intervin în ecuaţiile (4) şi (5).

Pentru legea de variaţie a modulului secant de elasticitate transversală G_s în funcţie de deformaţia normalizată, Hardin şi Drnevich [3], [4] au propus următoarea expresie :

$$G_s = \frac{G_{max}}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_r}} \tag{6}$$

Introducînd această expresie în ecuaţia constitutivă (2), se obţine următoarea formă a relaţiei tensiune-deformaţie de tip hiperbolic :

$$\tau = \frac{\gamma}{\frac{1}{G_{max}} + \frac{\gamma}{\tau_{max}}} \tag{7}$$

sau

$$\gamma = \gamma_r \left(\frac{G_{max}}{G_s} - 1 \right). \tag{7'}$$

Se poate stabili o legătură simplă între variaţia în raport cu deformaţia normalizată γ/γ_r a modulului secant G_s şi a coeficientului de amortizare internă λ dacă se acceptă următoarele ipoteze :

i4) panta curbei de descărcare ($\dot{\gamma} < 0$) în punctul de maxim al buclei de histerezis este aproximativ egală cu G_{max}, indiferent de nivelul de deformaţie la care se face descărcarea (fig. 6).

i5) Aria buclei de histerezis A_L reprezintă o fracţiune constantă din aria triunghiului *abc*, adică

$$A_L = 2k\, A_{abc}, \qquad k = \text{constant}.$$

Ţinînd cont de modul de definire (1), (1') a coeficientului de amortizare λ şi de legea de variaţie (6) a modulului secant G_s rezultă

$$\lambda = \frac{2k}{\pi} \left(1 - \frac{G_s}{G_{max}} \right). \tag{8}$$

Notînd

$$\lambda_{max} = \frac{2k}{\pi}, \tag{9}$$

relaţia (8) devine

$$\lambda = \lambda_{max}\left(1 - \frac{G_s}{G_{max}}\right). \tag{10}$$

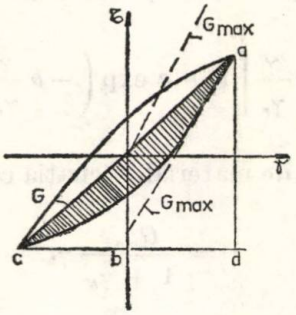


Fig. 6

Ecuaţia (10) stabileşte o legătură extrem de simplă între modulul secant G_s şi coeficientul de amortizare internă λ, la un nivel de deformaţie dat. λ_{max} este valoarea maximă a coeficientului de amortizare internă, atinsă la valori foarte mari ale deformaţiei. Pentru evaluarea lui λ_{max} se propun expresii diferite pentru argile şi nisipuri. Astfel, pentru argile

$$\lambda_{max} = 31 - (3 + 0{,}037)\sqrt{\sigma_0'} + 1{,}5\sqrt{f} - 1{,}5 \lg N, \tag{11}$$

unde N este numărul de cicluri, f este frecvenţa în Hz, iar σ_0' este tensiunea efectivă medie iniţială în daN/cm^2, iar pentru nisipuri,

$$\lambda_{max} = D - 1{,}5 \lg N, \tag{11'}$$

unde N este numărul de cicluri, iar D este 33% pentru nisip uscat şi 28% pentru nisip saturat.

Combinînd relaţiile (6) şi (10) se obţine ecuaţia curbei de amortizare în funcţie de deformaţia normalizată sub forma

$$\lambda = \lambda_{max} \frac{\frac{\gamma}{\gamma_r}}{1 + \frac{\gamma}{\gamma_r}}. \tag{12}$$

3. MODELUL HIPERBOLIC MODIFICAT

Studiile experimentale au arătat că relaţia tensiune-deformaţie (7) nu constituie o aproximaţie foarte bună a comportării reale a diferitelor tipuri de pămînturi. Hardin şi Drnevich [4] au observat că ecuaţia (6)

a curbei de variație a lui G_s și ecuația (12) a curbei de amortizare pot fi modificate pentru a da o mai bună aproximare a curbelor reale dacă se distorsionează scara deformației pentru a da o alură hiperbolică curbei tensiune-deformație guvernată de ecuația (7). În acest scop, se introduce deformația hiperbolică γ_h, definită prin relația

$$\gamma_h = \frac{\gamma}{\gamma_r}\left[1 + a \exp\left(-b\frac{\gamma}{\gamma_r}\right)\right], \tag{13}$$

unde a și b sînt constante de material. Ecuația constitutivă va fi de forma

$$\tau = \frac{G_{max}}{1 + \gamma_h}\gamma_h. \tag{14}$$

Constantele a și b caracterizează abaterea curbei tensiune-deformație (14) de la forma hiperbolică. În [4] se indică modul de a determina aceste constante pentru diferite tipuri de pămînturi, în funcție de numărul de cicluri, frecvență și tensiunea efectivă medie. Se observă că valorile constantelor a și b pentru argile diferă sensibil de cele pentru nisipuri; pentru argile, $a > 0$, iar pentru nisipuri, $a < 0$.

Ecuația curbelor de reducere și de amortizare își păstrează forma, înlocuindu-se însă, deformația normalizată cu deformația hiperbolică. Astfel, ecuația de reducere a modulului secant G_s devine

$$\frac{G_s}{G_{max}} = \frac{1}{1 + \gamma_h}, \tag{15}$$

iar ecuația curbei de amortizare

$$\frac{\lambda}{\lambda_{max}} = \frac{\gamma_h}{1 + \gamma_h}. \tag{16}$$

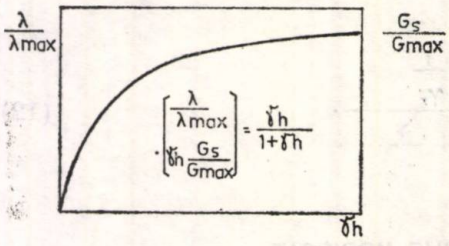


Fig. 7

De remarcat că valorile G_s și λ calculate cu relațiile (15) și (16) se pot citi pe o singură curbă (fig. 7).

Atît curba de reducere a modulului secant G_s generată de ecuația (15), cît și curba de variație a coeficientului de amortizare internă λ de ecuație (16) au fost comparate cu datele experimentale pentru o clasă largă de pămînturi și de condiții de testare ([9], tabelele 7, 8), rezultînd o foarte bună concordanță între valorile calculate și cele măsurate experimental.

4. MODELUL RAMBERG-OSGOOD

Observaţiile experimentale au pus în evidenţă răspunsul neuniform al pămînturilor la forfecarea ciclică. Astfel, s-a observat că o încărcare ciclică uniformă, răspunsul pămîntului solicitat este ciclic, dar amplitudinea scade cu numărul de cicluri. Rezultatele tipice pentru forfecare ciclică cu deformaţia, respectiv tensiunea controlată arată că pentru ambele tipuri de solicitare se înregistrează o descreştere a modulului secant de elasticitate transversală G_s.

Descreşterea modulului secant de elasticitate a fost denumită *„degradare"*. Fenomenul de degradare considerat la început caracteristic argilelor instabile (argile denumite în literatura de specialitate „soft clays", avînd proprietatea că pentru valori ale deformaţiei din domeniul de exploatare ajung să se comporte ca un material instabil în sensul postulatului lui Drucker [8]), a fost observat ulterior şi la alte tipuri de argile, depozite de sedimentare, nisipuri, nămoluri.

În laborator, fenomenul de degradare poate fi pus în evidenţă prin încercări ciclice nedrenate realizate în triaxial şi prin încercări ciclice de forfecare simplă.

Rezultatele investigaţiilor de laborator au fost sintetizate în următoarele observaţii :

— încărcarea ciclică produce o substanţială degradare a modulului de elasticitate transversală ;

– ca urmare a scăderii rezistenţei la forfecare se înregistrează o creştere continuă a presiunii fluidului de saturare care, în extremis, conduce la lichefiere ;

— rezistenţa reziduală înregistrată într-o încărcare statică de forfecare care urmează unei solicitări ciclice este inferioară rezistenţei reziduale obţinute în încercarea monotonă de forfecare simplă.

Pînă în prezent, nu există o metodă de analiză a fenomenului de degradare. O încercare în acest sens este făcută de Idriss şi Dobry [5]. Ca ecuaţie a curbei -schelet este folosită ecuaţia Ramberg-Osgood, iar pentru construirea buclei de histerezis se adoptă criteriul Masing. Astfel, ecuaţia curbei-schelet este

$$\gamma_C = \gamma_r \left(\frac{\tau_C}{G_{max}\, \gamma_r} \right) \left(1 + \alpha \left| \frac{\tau_C}{G_{max}\, \gamma_r} \right|^{R-1} \right). \tag{17}$$

Ramurile de încărcare şi descărcare satisfac ecuaţia

$$\gamma + \gamma_C = \gamma_r \left(\frac{\tau \pm \tau_C}{G_{max}\, \gamma_r} \right) \left(1 + \frac{\alpha}{2^{R-1}} \left| \frac{\tau \pm \tau_C}{G_{max}\, \gamma_r} \right|^{R-1} \right), \tag{18}$$

unde

γ_r reprezintă deformaţia de referinţă ;

α, R — constante de material ;

γ_C, τ_C — coordonatele capătului C al buclei de histerezis (fig. 1) ;

γ, τ — coordonatele punctului curent de pe bucla de histerezis.

Folosind ecuația Ramberg-Osgood (17) se obține ecuația curbei de reducere a modulului secant G_s în raport cu deformația de referință γ_r :

$$G_s = \frac{G_{max}}{1 + \alpha \left(\frac{\tau_C}{G_{max}\, \gamma_r} \right)^{R-1}}, \tag{19}$$

precum și ecuația curbei de amortizare

$$\lambda = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{R-1}{R+1} \frac{\gamma_r}{\gamma_C} \left(\frac{\tau_C}{G_{max}\, \gamma_r} \right)^R. \tag{20}$$

Față de ecuațiile similare propuse în § 2 și 3, în ecuațiile (19) și (20) apar în plus doi parametri, a căror alegere se face astfel încît ecuațiile (19), (20) să păsuiască cît mai bine datele experimentale. Autorii menționează că R poate lua și valori fracționare, fapt care sporește flexibilitatea modelului.

În articolul [5] este prezentat în detaliu programul experiențelor de laborator necesare construirii buclelor de histerezis.

Ideea este următoarea : se fac experiențe de forfecare ciclică cu deformație controlată pentru diferite nivele de deformație și se înregistrează tensiunile maxime atinse pe fiecare ciclu. Pentru fiecare ciclu de încărcare se trasează diagrama tensiune-deformație și se aleg constantele α și R astfel încît curba de ecuație (17) (curba-schelet) să aproximeze cît mai bine curba experimentală.

Pentru determinarea valorii constantei R se propune și o metodă directă de determinare, prin care R este ales astfel încît curba experimentală de variație a coeficientului de amortizare internă să fie cît mai bine aproximată de ecuația

$$\lambda = \frac{2}{\pi} \frac{R-1}{R+1} \left(1 - \frac{G_s}{G_{max}} \right). \tag{21}$$

Spre exemplificare, autorii citează argila recoltată la Bay Mud pentru care, alegîndu-se deformația de referință $\gamma_r = 0{,}02\,\%$ s-au determinat valorile $\alpha = 0{,}5$ și $R \simeq 3{,}5$ (pentru R s-au folosit ambele metode). Valorile astfel determinate pentru constantele α și R se introduc în ecuațiile (18), obținîndu-se astfel ecuația buclei de histerezis pentru fiecare ciclu în parte.

De menționat că se folosește tot criteriul Masing pentru construirea buclei de histerezis cunoscîndu-se curba-schelet, numai că pentru fiecare ciclu de încărcare se folosește o altă curbă schelet și anume curba de ecuație (17) în care se introduc valorile α și R determinate pentru ciclul respectiv.

Comparînd rezultatele experimentale cu cele calculate pentru $N = 1$ s-a observat o bună concordanță pentru deformații mici sau moderate (mai mici de 0,5%) și mai slabă pentru deformații mari (cele mai slabe rezultate au fost înregistrate pentru $\gamma_r \geqslant 0{,}75\,\%$).

În concluzie, criteriul Masing nu este adecvat pentru deformații mari, buclele de histerezis construite pe baza acestui criteriu avînd arii mai mari decît ariile măsurate. Cu alte cuvinte, folosirea criteriului Masing conduce la o supraevaluare a energiei disipate.

Modul de construire a buclelor de histerezis propus de Idriss și Dobry [5] oferă o bună aproximație a comportării reale. Studiile experimentale vin în sprijinul acestei afirmații arătînd că :

— răspunsul pămînturilor la solicitări ciclice uniforme este neuniform ;

— încercările monotone rapide și lente conduc la curbe-schelet diferite ;

— în timpul unei solicitări ciclice uniforme buclele histeretice măsurate pentru cicluri diferite sînt diferite (în fig. 8 sînt comparate buclele histeretice obținute pentru ciclurile 1 și 10), ceea ce constituie o evidențiere a fenomenului de degradare.

Spre exemplificare se citează din nou argila de la Bay Mud la care modulul de elasticitate transversală obținut prin încercarea rapidă este de 1,4—1,5 ori mai mare decît cel obținut prin încercarea statică convențională.

În figura 8 se observă că valoarea maximă a tensiunii de forfecare înregistrată în ciclul 10 este inferioară celei înregistrată în primul ciclu, deformația maximă fiind aceeași. Această descreștere se accentuează cu cît numărul ciclurilor crește.

Se propune ca măsură a degradării pămîntului după N cicluri de forfecare, *indicele de degradare* notat δ și definit ca raportul dintre modulul secant măsurat în ciclul N, G_{sN} și modulul secant din primul ciclu, G_{s1} :

$$\delta(N) = \frac{G_{sN}}{G_{s1}}. \tag{22}$$

Pentru exprimarea directă a indicelui de degradare, în funcție de numărul de cicluri, N, se introduce *parametrul de degradare* t, care reprezintă panta curbei ($\lg\delta$ — $\lg N$), aproximată suficient de bine de o dreaptă, astfel :

$$\delta_n = \delta(N) = N^{-t}. \tag{23}$$

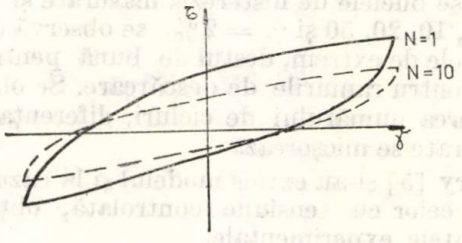


Fig. 8

Referitor la parametrul de degradare t studiile experimentale au condus la următoarele concluzii :

— parametrul de degradare este puternic influențat de nivelul deformației ciclice aplicate (descrește în raport cu γ_c) ;

— parametrul de degradare pare a fi independent de starea inițială de tensiune și de umiditatea probei (încercările pe argila de la Bay Mud conduc la această concluzie).

Ecuația (23) poate fi utilizată pentru a calcula variația indicelui de degradare între două cicluri succesive sau nu.

Notînd variația indicelui de degradare de la ciclul n la ciclul m cu

$$\Delta\delta_{nm} = \delta_n - \delta_m = n^{-t} - m^{-t},$$

se obține

$$\delta_m = \delta_n[1 + (m - n)\sqrt[t]{\delta n}]^{-1}. \tag{24}$$

Relația (24), privită ca o relație de recurență, poate servi la calculul indicelui de degradare pentru un ciclu dat, dacă se cunoaște o valoare anterioară.

Ecuația de tip Ramberg-Osgood a curbei-schelet pentru ciclul n este

$$\gamma_C = \gamma_r \left(\frac{\tau_C}{\delta_n G_{max}\gamma_r}\right)\left(1 + \alpha\left|\frac{\tau_C}{\delta_n G_{max}\gamma_r}\right|^{R-1}\right), \tag{25}$$

unde pentru t se ia valoarea corespunzătoare lui γ_C, din curba $t - \gamma$ determinată experimental.

Ecuația ramurilor de încărcare și descărcare ale buclei de histerezis în funcție de indicele de degradare δ (presupunînd că se poate aplica criteriul Masing) este

$$\gamma \pm \gamma_C = \gamma_r \left(\frac{\tau \pm \tau_C}{\delta_n G_{max}\gamma_r}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{2^{R-1}}\left|\frac{\tau \pm \tau_C}{\delta_n G_{max}\gamma_r}\right|^{R-1}\right). \tag{26}$$

Comparîndu-se buclele de histerezis măsurate și calculate cu ecuația (26) pentru $N = 1, 10, 20, 50$ și $\gamma_r = 2\%$, se observă o concordanță foarte bună pentru punctele de extrem, destul de bună pentru ramurile de încărcare și mai slabă pentru ramurile de descărcare. Se observă, de asemenea, că odată cu creșterea numărului de cicluri, diferența dintre valorile calculate și cele măsurate se micșorează.

Idriss și Dobry [5] și-au extins modelul și la cazul încărcărilor tranzitorii, precum și al celor cu tensiune controlată, obținînd o foarte bună concordanță cu datele experimentale.

În concluzie, se poate aprecia că modelul Ramberg-Osgood oferă suficientă supleță pentru descrierea unei largi clase de pămînturi solicitate la diferite încărcări ciclice. În plus, se obține o concordanță mult mai bună cu datele experimentale decît în cazul modelului hiperbolic, deși numărul de parametri utilizat este relativ redus.

BIBLIOGRAFIE

1. M. Annaki, L. L. Kenneth, *Equivalent uniform cycle concept for soil dynamics* J. Geotech., Eng., Div., ASCE no. GT *6* (1977).
2. B. O. Hardin, W. L. Black, *Vibration modulus for normally consolidated clays*, J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, no. SM *6* (1969).
3. B. O. Hardin, V. P. Drnevich, *Shear modulus and damping in soils* I. *Measurement and parameter effects.* II. *Design equations and curves*, Report no. UKY 27—70-CE2 Univ. of Kentucky, 1970.
4. B. O. Hardin, V. P. Drnevich, *Shear modulus and damping in soils : design equations and curves*, J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, no. SM *7* (1972).
5. I. M. Idriss, R. Dobry, R. D. Singn, *Nonlinear behaviour of soft clays during cyclic loading*, J. Geotech. Eng. Div., ASCE, no. GT *12* (1978).
6. L. Jacobsen, *Motion of a soil subjected to simple harmonic ground vibration*, Bul. Am. Seism. Soc., vol. **20** (1930).
7. B. J. Lazan, *Damping of materials and members in structural mechanics*, Pergamon Press, New York, 1968.
8. W. Olszack, P. Perzyna, A. Sawczuk, *Teoria plasticității* (trad. din lb. poloneză), Edit. tehn., București, 1970.
9. H. B. Seed, I. M. Idriss, *Soil moduli and damping factors for dynamic response analyses*, Report No. EERC 70—10, Univ. of California, Berkeley, 1970.
10. P. Schnabel, H. B. Seed, J. Lysmer, *Modification of seismograph records for effects of local soil conditions*, Report No EERC 71—8, Univ. of California, Berkeley, 1971.
11. M. L. Silver, H. B. Seed, *Deformation characteristics of sands under cyclic loading*, J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, no SM *8* (1971).
12. M. L. Silver, H. B. Seed, *Volume changes in sands during cyclic loading*, J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, no. SM *9* (1971).
13. P. W. Taylor, T. J. Larkin, *Seismic site response of nonlinear soil media*, J. Geotech. Eng Div., ASCE, nor. GT *3* (1978).
14. Z. Yang, A. W. Hatheway, *Dinamic response of tropical marine limestone*, J. Geotech. Eng. Div., ASCE, no. GT *2* (1976).

BUDAPESTI MŰSZAKI FŐISKOLA KÖNYVTÁR 1843

ANALIZA STĂRII DE EFORTURI ŞI DEFORMAŢII ALE COMPENSATOARELOR LENTICULARE DE DILATAŢIE, CU LENTILE DE TIP „U" EXECUTATE MULTISTRAT

de N. POSEA, C. MANEA

Institutul de petrol şi gaze Ploieşti

Lucrarea prezintă un procedeu de calcul pentru determinarea tensiunilor şi deformaţiilor în orice punct al compensatoarelor lenticulare de dilataţie, cu lentile de tip „U", executate multistrat şi pentru orice combinaţie de presiune interioară (sau exterioară) cu deplasarea axială.

Algoritmul stabilit este transpus într-un program pentru un calculator electronic şi permite optimizarea dimensiunilor elementelor geometrice ale tipurilor de compensatoare analizate.

Compensatoarele lenticulare de dilataţie se montează pe conducte, pe diverse aparate de proces în vederea preluării dilataţiilor termice, avînd o largă utilizare în industria petrolieră, petrochimică, termoenergetică etc., ca urmare a proprietăţilor elastice şi de etanşeitate pe care le au.

Pornind de la aceste considerente, lucrarea de faţă prezintă o metodă de calcul pentru determinarea cît mai exactă a tensiunilor şi deformaţiilor din orice punct al compensatorului lenticular de dilataţie, cu lentile de tip „U" executate multistrat, produse de combinaţii de încărcări provenite din presiunea interioară (sau exterioară) şi deplasarea axială.

Algoritmul realizat este transpus într-un program pentru un calculator cifric, a cărui utilizare uşurează şi, în acelaşi timp, îmbunătăţeşte activitatea pentru proiectarea judicioasă a acestor tipuri de compensatoare.

Compensatorul lenticular de dilataţie, cu lentile de tip „U" executat multistrat, este arătat în figura 1.

Straturile care alcătuiesc lentila sînt confecţionate în aşa fel încît fiecare strat este în contact pe toată suprafaţa lui cu cele două straturi vecine.

Se consideră un strat oarecare i al unei jumătăţi de lentile reprezentată în figura 2. Se determină eforturile şi deplasările în sfertul toroidal exterior $1_i C_i$, în sfertul toroidal interior $2_i D_i$, folosind teoria de momente a învelişurilor de revoluţie şi în placa inelară $A_i B_i$, prin folosirea atît a teoriei plăcilor circulare încărcate simetric, cît şi teoria tuburilor (cilin-

drilor) cu pereți groși. Din condițiile de continuitate pentru secțiunile de separație dintre sferturile toroidale și placa circulară, se obțin eforturile secționale de legătură cu ajutorul cărora se determină eforturile și deplasările în orice punct al compensatorului.

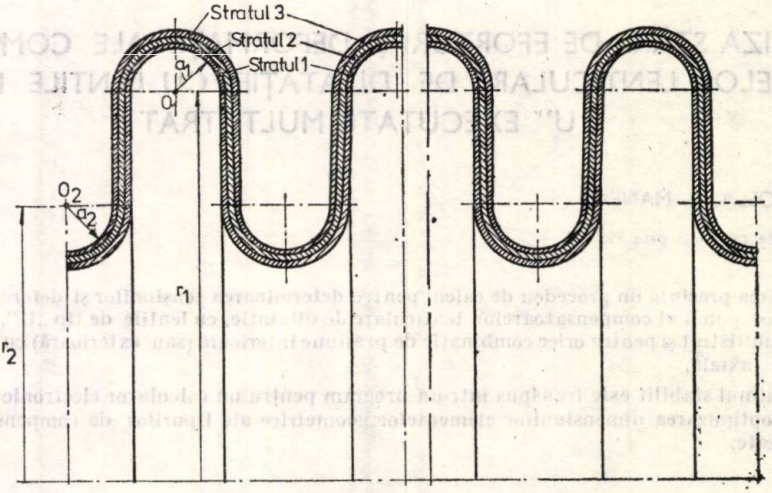


Fig. 1

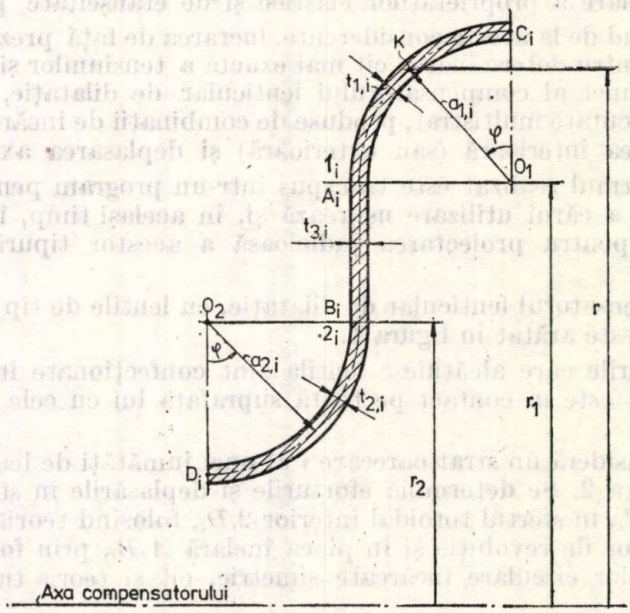


Fig. 2

1. SFERTUL TOROIDAL EXTERIOR

Forţele care acţionează asupra sfertului toroidal exterior $1_i C_i$ sînt arătate în figura 3 *a*, iar deformaţiile elementului meridional în figura 3 *b*.

În conformitate cu figura 3*b*, s-au notat :

p'_i , presiunea de contact dintre straturile i şi $i-1$;
p'_{i+1} , presiunea de contact dintre straturile i şi $i+1$;
$p_i = p'_i - p'_{i+1}$, presiunea interioară care acţionează asupra stratului i ;
$a_{1,i}$, raza curbei meridiane a torului ;
r , raza în raport cu axa compensatorului a unui punct curent K de pe suprafaţa mediană ;
w , deplasarea punctului K după direcţia normalei la înveliş ;
v , deplasarea punctului K după direcţia tangentei la meridian ;
y , deplasarea punctului K după direcţia axei compensatorului ;
z , deplasarea punctului K după direcţia razei r.

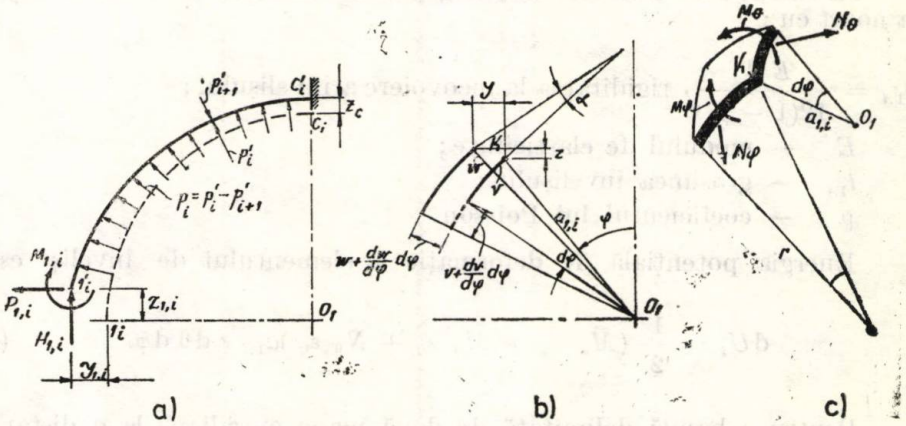


Fig. 3

Unghiul de rotaţie al tangentei la meridian este

$$\alpha = \frac{1}{a_{1,i}} (w' - v), \tag{1}$$

iar variaţiile de curbură sînt :

$$\varkappa_\varphi = \frac{\alpha'}{a_{1,i}}, \quad \varkappa_\theta = \frac{\alpha \sin \varphi}{r}, \tag{2}$$

unde

$$\frac{\mathrm{d}(\ldots)}{\mathrm{d}\varphi} = (\ldots)' .$$

Alungirea specifică circumferențială în punctul K este

$$\varepsilon_\theta = \frac{z}{r} = \frac{a_{1,i}\,\zeta}{r}, \tag{3}$$

în care $\zeta = \dfrac{z}{a_{1,i}}$.

Eforturile secționale, reprezentate în figura 3*c*, folosind relațiile de echivalență, relațiile aspectului geometric și legea generalizată a lui Hooke [1], se determină cu expresiile :

$$N_\theta = E t_{1,i}\,\varepsilon_\theta = E\,t_{1,i}\,a_{1,i}\frac{\zeta}{r};$$
$$M_\varphi = D_{1,i}(\varkappa_{\varphi+\mu}\,\varkappa_\theta);\ M_\theta = D_{1,i}\,(\varkappa_{\theta+\mu}\,\varkappa_\varphi). \tag{4}$$

În relațiile de mai sus s-au neglijat deformațiile produse de N_φ și s-a notat cu :

$D_{1,i} = \dfrac{E\,t_{1,i}^3}{12(1-\mu^2)}$, rigiditatea la încovoiere a învelișului ;

E — modulul de elasticitate ;

$t_{1,i}$ — grosimea învelișului ;

μ — coeficientul lui Poisson.

Energia potențială de deformație a elementului de înveliș este

$$\mathrm{d}U_i = \frac{1}{2}\,(M_\varphi\,\varkappa_\varphi + M_\theta\,\varkappa_\theta + N_\theta\,\varepsilon_\theta)\,a_{1,i}\,r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{5}$$

Pentru o bandă delimitată de două plane meridiane la o distanță unitară ($r\,\mathrm{d}\theta = 1$), energia potențială de deformație este

$$U_i = \frac{D_{1,i}}{2a_{1,i}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\alpha')^2 - 2\mu\lambda_{1,i}\ \alpha\alpha'\sin\varphi + (\lambda_{1,i}\,\alpha\sin\varphi)^2 + 4\nu_{1,i}\,\zeta^2]\,\mathrm{d}\varphi, \tag{6}$$

unde

$$\lambda_{1,i} = \frac{a_{1,i}}{r},\ \nu_{1,i} = \frac{3(1-\mu^2)a_{1,i}^4}{r^2\,t_{1,i}^2}.$$

Energia potențială de poziție a sarcinilor exterioare,

$$U_e = -M_{1,i}\,\alpha_{1,i} - H_{1,i}\,a_{1,i}\,\zeta_{1,i} - P_{1,i}\,a_{1,i}\,\eta_{1,i} - \frac{D_{1,i}}{2a_{1,i}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\bar{p}_{1,i}(\zeta\cos\varphi +$$
$$+ \eta\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \tag{7}$$

egală cu lucrul mecanic al forţelor exterioare cînd se aduce banda considerată din poziţia deformată în poziţia iniţială.

În ecuaţia (7) s-au notat :

$$\eta = \frac{y}{a_{1,i}}\,;\quad \bar{p}_{1,i} = \frac{3(1-\mu^2)a_{1,i}^3\, p_i}{E\, t_{1,i}^3}\,.$$

Energia potenţială totală se obţine prin adunarea ecuaţiilor (6) şi (7) :

$$\Pi = U_i + U_e \tag{8}$$

În ecuaţia (1) se neglijează v în raport cu w şi din figura 3 *b* rezultă

$$\eta = \int_0^{\varphi} \alpha \sin\varphi \, d\varphi,$$

$$\zeta = \zeta_{1,i} - \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \alpha \cos\varphi \, d\varphi. \tag{9}$$

Unghiul de rotaţie α al tangentei la meridian se aproximează printr-o serie trigonometrică, lucrarea [2] de forma :

$$\alpha = C_{11} \sin\varphi + \sum_{n=1}^{4} C_{1.2n} \sin(2n\,\varphi). \tag{10}$$

Această expresie satisface automat condiţiile la limită $\alpha = \eta = 0$, pentru $\varphi = 0$.

Din celelalte condiţii la limită $\alpha = \alpha_1$ şi $\eta = \eta_1$ pentru $\varphi = \pi/2$, rezultă

$$C_{11} = \alpha_1\,;\; C_{12} = \frac{3}{2}\eta_1 - \frac{3\pi}{8}\alpha_1 + \frac{2}{3}C_{14} - \frac{9}{35}C_{16} + \frac{4}{21}C_{18}. \tag{11}$$

Ceilalţi trei coeficienţi ai seriei se obţin pe baza teoremei minimului energiei potenţiale totale, care se exprimă prin condiţiile :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_{1,2n}} = 0. \tag{12}$$

$$(n = 2,3,4).$$

În urma înlocuirii ecuaţiilor (10) şi (9) în ecuaţia (8), a efectuării derivatelor parţiale indicate de ecuaţiile (12) şi relaţiile (11) se obţine un sistem de ecuaţii de forma

$$[K_{1,i}]\,\{C_{1,i}\} = [K_{2,i}]\,\{\alpha_{1,i}\}, \tag{13}$$

n care

$$\{C_{1,i}\} = [C_{12,i},\ C_{14,i}\ C_{16,i}\ C_{18,i}]^t$$

reprezintă vectorul coloană al constantelor $C_{1,i}$;
$[K_{1,i}]$, matricea pătratică dată în tabelul 1;
$[K_{2,i}]$, matricea 4×3 dată în tabelul 1;
$\{\alpha_{1,i}\} = [\alpha_{1,i}\ \zeta_{1,i}\ \eta_{1,i}]^t$, vectorul coloană al deplasărilor din punctul 1 (fig.3).

Din rezolvarea sistemului (13) se obţin constantele $C_{1,i}$, în funcţie de vectorul deplasărilor $\{\alpha_{1,i}\}$, ceea ce conduce la relaţia matriceală

$$\begin{Bmatrix} C_{12,i} \\ C_{14,i} \\ C_{16,i} \\ C_{18,i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11,i} & a_{12,i} & a_{13,i} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{41,i} & \cdot & a_{43,i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{1,i} \\ \zeta_{1,i} \\ \eta_{1,i} \end{Bmatrix}. \tag{13'}$$

Matricea $[a_i]$ se obţine din (13) prin relaţia evidentă $[a_i] = [K_{1,i}]^{-1} \cdot [K_{2,i}]$.

În relaţiile de mai sus s-a făcut aproximaţia că:

$$\frac{a_{1,i}}{r} \cong \frac{a_{1,i}}{r_1} = \lambda_i. \tag{14}$$

Unghiul de rotaţie α al tangentei la meridian este acum o funcţie de deplasările conturului marginal $\alpha_{1,i}$, $\zeta_{1,i}$ şi $\eta_{1,i}$.

Pentru echilibru energia potenţială totală este minimă, deci:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_{i,1}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \zeta_{i,1}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \eta_{1,i}} = 0. \tag{15}$$

După înlocuirea relaţiilor (10), (9) şi (13') în ecuaţia (8) şi a efectuării derivatelor parţiale indicate de ecuaţiile (15) se obţin eforturile de la marginea liberă a stratului i (vezi fig. 3a), care pot fi scrise astfel:

$$\frac{a_{1,i}^2}{D_{1,i}} \begin{Bmatrix} M_{1,i}/a_{1,i} \\ H_{1,i} + (4D_{1,i}\,\bar{p}_{1,i}/a_{1,i}^2 \\ P_{1,i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11,i} & \cdot & b_{13,i} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{31,i} & \cdot & b_{33,i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{1,i} \\ \zeta_{1,i} \\ \eta_{1,i} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} [b_{1,i}] \\ [b_{2,i}] \\ [b_{3,i}] \end{bmatrix} \{\alpha_{1,i}\}. \tag{16}$$

Coeficienţii matricei $[b_i]$ se calculează cu expresiile matriceale:

$$[b_{1,i}] = [a_{1,i}]\,[K_{3,i}]\,[L_{M,i}],$$

$$[b_{2,i}] = [a_{2,i}]\,[K_{4,i}]\,[K_{M,i}],$$

$$[b_{3,i}] = [a_{3,i}]\,[K_{5,i}]\,[K_{M,i}].$$

unde, matricele componente sînt date în tabelele 2, 3 şi 4.

Tabelul 1

Matricele $[K_{1,i}]$ şi $[K_{2,i}]$

$$[K_{1,i}] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} -1{,}0 & +0{,}4 & -0{,}257143 & +0{,}190476 \\ +0 & +0 & +0 & +0 \\ +0 & +0 & +0 & +0 \\ +0 & +0 & +0 & +0 \\ \hline +0{,}8 & +8{,}0 & +0 & +0 \\ +0{,}23282\ \mu\lambda_i & +0{,}362165\mu\lambda_i & +0{,}096421\mu\lambda_i & -0{,}016643\mu\lambda_i \\ -0{,}025\lambda_i^2 & +0{,}20\lambda_i^2 & -0{,}125\lambda_i^2 & +0 \\ +0{,}277778\nu_i & +0{,}097778\nu_i & +0{,}020\ \nu_i & +0 \\ \hline -0{,}514286 & +0 & +18{,}0 & +0 \\ -0{,}103475\mu\lambda_i & +0{,}077943\mu\lambda_i & +0{,}324693\mu\lambda_i & +0{,}102959\ \mu\lambda_i \\ -0{,}064286\ \lambda_i^2 & -0{,}092857\ \lambda_i^2 & +0{,}250\ \lambda_i^2 & -0{,}125\ \lambda_i^2 \\ -0{,}142857\ \nu_i & +0{,}005714\ \nu_i & +0{,}03020\ \nu_i & +0{,}010204\ \nu_i \\ \hline +0{,}380952 & +0 & +0 & +32{,}0 \\ +0{,}070552\mu\lambda_i & -0{,}000517\ \mu\lambda_i & -\ 01391\ \mu\lambda_i & +0{,}320678\ \mu\lambda_i \\ +0{,}047619\ \lambda_i^2 & -0{,}023810\ \lambda_i^2 & -\ 25\ \lambda_i^2 & +0{,}25\ \lambda_i^2 \\ +0{,}10582\ \nu_i & +0{,}010582\ \nu_i & +0{,}010204\ \nu_i & +0{,}016377\ \nu_i \end{array}\right]$$

$$[K_{2,i}] = \left[\begin{array}{c|c|c} +1{,}178097 & +0 & -1{,}5 \\ +0 & +0 & +0 \\ +0 & +0 & +0 \\ +0 & +0 & +0 \\ \hline +0 & +0 & +0 \\ -0{,}10\ \lambda\mu_i & +0 & +0 \\ +0{,}11641\ \lambda_2^i & +0 & +0 \\ -0{,}206952\ \nu_i & +0{,}362166\ \nu_i & +0 \\ \hline +0 & +0 & +0 \\ +0{,}064284\ \mu\lambda_i & +0 & +0 \\ -0{,}051738\ \lambda_i^2 & +0 & +0 \\ +0{,}118258\ \nu_i & -0{,}266081\ \nu_i & +0 \\ \hline +0 & +0 & +0 \\ -0{,}047618\ \mu\lambda_i & +0 & +0 \\ +0{,}035276\ \lambda_i^2 & +0 & +0 \\ -0{,}086603\ \nu_i & +0{,}205309\ \nu_i & +0 \end{array}\right]$$

Tabelul 2.

Expresia pentru $M_{1,i}$

$$a_{1,i}\, M_{1,i}/D_{1,i} = [a_{1,i}]\,[K_{3,i}]\,[K_{M,i}]\{\alpha_{1,i}\} = [b_{1,i}]\{\alpha_{1,i}\}$$

$$[K_{3,i}] = \left[\begin{array}{cccc}
+0 & +0{,}78539 & +0{,}666667 & -0{,}266667 \\
+0 & -0{,}666667\,\mu\lambda_i & +0{,}392699\,\mu\lambda_i^2 & +0 \\
+0 & +0{,}589048\,\lambda_i^2 & +0{,}40\,\lambda_i & -0{,}342857\,\lambda_i^2 \\
-1{,}570796\,\nu_i & +0{,}589048\,\nu_i & +0{,}711111\,\nu_i & +0{,}040634\,\nu_i \\
\hline
+0 & +0{,}666667 & +3{,}141593 & +0 \\
+0 & +0{,}392699\,\mu\lambda_i & +0{,}533333\,\mu\lambda_i & +0{,}152380\,\mu\lambda_i \\
+0 & +0{,}40\,\lambda_i^2 & +0{,}392699\,\lambda_i & -0{,}196350\,\lambda_i^2 \\
-1{,}777778\,\nu_i & +0{,}711111\,\nu_i & +0{,}872664\,\nu_i^2 & +0{,}087266\,\nu_i \\
\hline
+0 & -0{,}266667 & +0 & +12{,}566371 \\
+0 & +0 & +0{,}152380\,\mu\lambda_i & +0{,}507936\,\mu\lambda_i \\
+0 & -0{,}352857\,\lambda_i^2 & -0{,}196350\,\lambda_i^2 & +0{,}392699\,\lambda_i^2 \\
+0{,}142222\,\nu_i & +0{,}040634\,\nu_i & +0{,}087266\,\nu_i & +0{,}118682\,\nu_i \\
\hline
+0 & +0{,}171428 & +0 & +0 \\
+0 & +0 & -0{,}025396\,\mu\lambda_i & +0{,}161616\,\mu\lambda_i \\
+0 & +0{,}184126\,\lambda_i^2 & +0 & -0{,}196350\,\lambda_i^2 \\
-0{,}039183\,\nu_i & -0{,}002902\,\nu_i & +0 & +0{,}031416\,\nu_i \\
\hline
+0 & -0{,}126984 & +0 & +0 \\
+0 & +0 & +0{,}009235\,\mu\lambda_i & -0{,}029836\,\mu\lambda_i \\
+0 & -0{,}131601\,\lambda_i^2 & +0 & +0 \\
+0{,}016124\,\nu_i & +0{,}000586\,\nu_i & +0 & +0
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc}
+0{,}171428 & -0{,}126984 \\
+0 & +0 \\
+0{,}184126\,\lambda_i^2 & -0{,}131601\,\lambda_i^2 \\
-0{,}002902\,\lambda_i & +0{,}000586\,\nu_i \\
\hline
+0 & +0 \\
-0{,}025396\,\mu\lambda_i & +0{,}009235\,\mu\lambda_i \\
+0 & +0 \\
+0 & +0 \\
\hline
+0 & +0 \\
+0{,}161616\,\mu\lambda_i & -0{,}029836\,\mu\lambda_i \\
-0{,}196350\,\lambda_i^2 & +0 \\
+0{,}031416\,\nu_i & +0 \\
\hline
+28{,}274334 & +0 \\
+0{,}503496\,\mu\lambda_i & +0{,}164102\,\mu\lambda_i \\
+0{,}392699\,\lambda_i^2 & -0{,}196350\,\lambda_i^2 \\
+0{,}047444\,\nu_i & +0{,}016028\,\nu_i \\
\hline
+0 & +50{,}265482 \\
+0{,}164102\,\mu\lambda_i & +0{,}501960\,\mu\lambda_i \\
-0{,}196350\,\lambda_i^2 & +0{,}392699\,\lambda_i^2 \\
+0{,}016029\,\nu_i & +0{,}025724\,\nu_i
\end{array}\right]$$

Tab. 2 continuare

$$[a_{1,i}] = [1\ a_{11,i}\ a_{21,i}\ a_{31,i}\ a_{41,i}];\quad [K_{M,i}] = \begin{bmatrix} 0 & 1{,}0 & 0 \\ 1{,}0 & 0 & 0 \\ a_{11,i} & a_{12,i} & a_{13,i} \\ a_{21,i} & a_{22,i} & a_{23,i} \\ a_{31,i} & a_{32,i} & a_{33,i} \\ a_{41,i} & a_{42,i} & a_{43,i} \end{bmatrix}$$

Tabelul 3.

Expresia pentru $H_{1,i}$

$$(H_1 a_{1,i}^2/D_{1,i}) + 4\,\bar{p}_{1,i} = [a_{2,i}]\,[K_{4,i}]\,[K_{M,i}]\,\{\alpha_{1,i}\} = [b_{2,i}]\,\{\alpha_{1,i}\}$$

$$[K_{.,i}] = \left[\begin{array}{cccc}
+0 & +0 & +0 & +0 \\ +0 & +0 & +0 & +0 \\ +0 & +0 & +0 & +0 \\ +0{,}283185\ \nu_i & -1{,}570796\ \nu_i & -1{,}777778\ \nu_i & +0{,}142222\ \nu_i \\ \hline
+0 & +0{,}666667 & +3{,}141593 & +0 \\ +0 & +0{,}392699\ \mu\lambda_i & +0{,}533333\ \mu\lambda_i & +0{,}152380\ \mu\lambda_i \\ +0 & +0{,}40\ \lambda_i^2 & +0{,}392699\ \lambda_i^2 & -0{,}196350\ \lambda_i^2 \\ -1{,}777778\ \nu_i & +0{,}711111\ \nu_i & +0{,}872664\ \nu_i & +0{,}08726\ \nu_i \\ \hline
+0 & -0{,}266667 & +0 & +12{,}566371 \\ +0 & +0 & +0{,}152380\ \mu\lambda_i & +0{,}507936\ \mu\lambda_i \\ +0 & -0{,}342857\ \lambda_i^2 & -0{,}196350\ \lambda_i^2 & +0{,}392699\ \lambda_i^2 \\ +0{,}142222\ \nu_i & +0{,}040634\ \nu_i & +0{,}087266\ \nu_i & +0{,}118682\ \nu_i \\ \hline
+0 & +0{,}171428 & +0 & +0 \\ +0 & +0 & -0{,}025396\ \mu\lambda_i & +0{,}161616\ \mu\lambda_i \\ +0 & +0{,}184126\ \lambda_i^2 & +0 & -0{,}196350\ \lambda_i^2 \\ -0{,}039183\ \nu_i & -0{,}002902\ \nu_i & +0 & +0{,}031416\ \nu_i \\ \hline
+0 & -0{,}126984 & +0 & +0 \\ +0 & +0 & +0{,}009235\ \mu\lambda_i & -0{,}029836\ \mu\lambda_i \\ +0 & -0{,}131601\ \lambda_i^2 & +0 & +0 \\ +0{,}016124\ \nu_i & +0{,}000586\ \nu_i & +0 & +0
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cc}
+0 & +0 \\ +0 & +0 \\ +0 & +0 \\ -0{,}039183\ \nu_i & +0{,}016124\ \nu_i \\ \hline
+ & +0 \\ -0{,}025396\ \mu\lambda_i & +0{,}009235\ \mu\lambda_i \\ +0 & +0 \\ +0 & +0 \\ \hline
+0 & +0 \\ +0{,}161616\ \mu\lambda_i & -0{,}029836\ \mu\lambda_i \\ -0{,}196350\ \lambda_i^2 & +0 \\ +0{,}031416\ \nu_i & +0 \\ \hline
+28{,}274334 & +0 \\ +0{,}503496\ \mu\lambda_i & +0{,}164102\ \mu\lambda_i \\ +0{,}392699\ \lambda_i^2 & -0{,}196350\ \lambda_i^2 \\ +0{,}047444\ \nu_i & +0{,}016028\ \nu_i \\ \hline
+0 & +50{,}265482 \\ +0{,}164102\ \mu\lambda_i & +0{,}501960\ \mu\lambda_i \\ -0{,}196350\ \lambda_i^2 & +0{,}392699\ \lambda_i^2 \\ +0{,}016028\ \nu_i & +0{,}015724\ \nu_i
\end{array}\right]$$

$$[a_{2,1}] = [1 a_{12,i}\ a_{22,i}\ a_{32,i}\ a_{42,i}]$$

Tabelul 4. Expresia pentru $P_{1,i}$

$$P_{1,i}a_{1,i}^2/D_{1,i} = [a_{3,i}]\,[K_{5,i}][K_{M,i}]\,\{\alpha_{1,i}\} = [b_{3,i}]\,\{\alpha_{,i}\}$$

$$[K_{5,i}] = \left[\begin{array}{cccc}
+0 & +0{,}666667 & +3{,}141593 & +0 \\
+0 & +0{,}392699\,\mu\lambda_i & +0{,}533333\,\mu\lambda_i & +0{,}152380\,\mu\lambda_i \\
+0 & +0{,}40\,\lambda_i^2 & +0{,}392699\,\lambda_i^2 & -0{,}196350\,\lambda_i^2 \\
-1{,}777778\,\nu_i & +0{,}711111\,\nu_i & +0{,}872644\,\nu_i & +0{,}087266\,\nu_i \\
\hline
+0 & -0{,}266667 & +0 & +12{,}566371 \\
+0 & +0 & +0{,}152380\,\mu\lambda_i & +0{,}507936\,\mu\lambda_i \\
+0 & -0{,}342857\,\lambda_i^2 & -0{,}196350\,\lambda_i^2 & +0{,}392699\,\lambda_i^2 \\
+0{,}142222\,\nu_i & +0{,}040634\,\nu_i & +0{,}087266\,\nu_i & +0{,}118682\,\nu_i \\
\hline
+0 & +0{,}171428 & +0 & +0 \\
+0 & +0 & -0{,}025396\,\mu\lambda_i & +0{,}161616\,\mu\lambda_i \\
+0 & +0{,}184126\,\lambda_i^2 & +0 & -0{,}196350\,\lambda_i^2 \\
-0{,}039183\,\nu_i & -0{,}002902\,\nu_i & +0 & +0{,}031416\,\nu_i \\
\hline
+0 & -0{,}126984 & +0 & +0 \\
+0 & +0 & +0{,}009235\,\mu\lambda_i & -0{,}029836\,\mu\lambda_i \\
+0 & -0{,}131601\,\lambda_i^2 & +0 & +0 \\
+0{,}016124\,\nu_i & +0{,}000586\,\nu_i & +0 & +0
\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{cc}
+0 & +0 \\
-0{,}026396\,\mu\lambda_i & +0{,}009235\,\mu\lambda_i \\
+0 & +0 \\
+0 & +0 \\
\hline
+0 & +0 \\
+0{,}161616\,\mu\lambda_i & -0{,}029836\mu\lambda_i \\
+0{,}392699\,\lambda_i^2 & +0 \\
+0{,}118682\,\nu_i & +0 \\
\hline
+28{,}274334 & +0 \\
+0{,}503495\,\mu\lambda_i & +0{,}164102\,\mu\lambda_i \\
+0{,}392699\,\lambda_i^2 & -0{,}196\,350\,\lambda_i^2 \\
+0{,}047444\,\nu_i & +0{,}016028\,\nu_i \\
\hline
+0 & +50{,}265482 \\
+0{,}164102\,\mu\lambda_i & +0{,}501960\,\mu\lambda_i \\
-0{,}196350\,\lambda_i^2 & +0{,}392699\,\lambda_i^2 \\
+0{,}016028\,\nu_i & +0{,}025824\,\nu_i
\end{array}\right]$$

$$[a_{3,i}] = [a_{13,i}\ a_{23,i}\ a_{33,i}\ a_{43,i}]$$

2. SFERTUL TOROIDAL INTERIOR

Calculele se efectuează identic ca pentru efortul toroidal exterior. Eforturile de la marginea liberă a stratului i vor fi :

$$\frac{a_{2,i}^2}{D_{2,i}}\begin{Bmatrix} M_{2,i}/a_{2,i} \\ H_{2,i} - (4D_{2,i}\,p_{2,i}/a_{2,i}^2) \\ P_{2,i} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{44,i} & \cdot & b_{46,i} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{64,i} & \cdot & b_{66,i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{2,i} \\ \zeta_{2,i} \\ \eta_{2,i} \end{Bmatrix}. \qquad (17)$$

Presiunea $\bar{p}_2$ are semnul minus deoarece acţionează din exteriorul suprafeţei.

Matricele $[a_i]$, $[b_i]$ şi $\{C_{2,i}\}$ se calculează cu tabelele 1,2,3 şi 4 modificînd în mod corespunzător mărimile variabile ce intervin.

3. PLACA INELARĂ

Sarcinile ce acţionează asupra plăcii inelare corespunzătoare stratului i, se descompun în sarcini normale pe planul plăcii, (fig. 4 *a*) şi în sarcini cuprinse în planul plăcii (fig. 4 *a*) şi în sarcini cuprinse în planul plăcii (fig. 4 *b*).

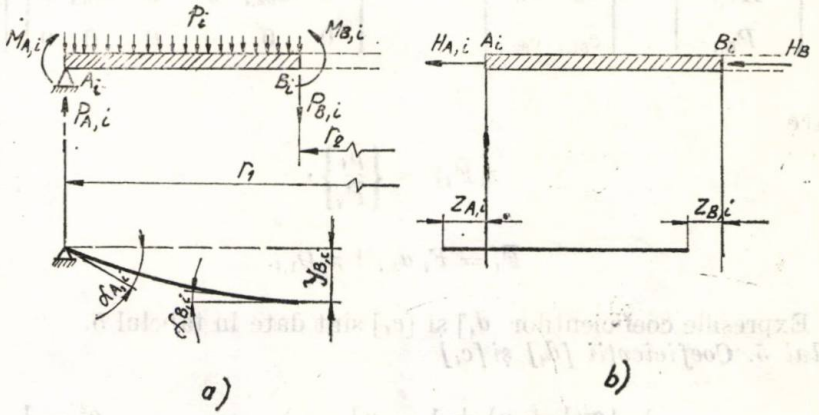


Fig. 4

Forţele $P_{A,i}$ şi $P_{B,i}$ din figura 4 *a*, se determină din ecuaţiile de echilibru ce acţionează pe cilindrul de rază r_1, respectiv de rază r_2 :

$$2\pi r_1 P_{A,i} - \pi r_1^2 p_i - F_i = 0,$$

$$2\pi r_2 P_{B,i} - \pi r_2^2 p_i - F_i = 0.$$

Rezultă

$$P_{A,i} = \frac{r_1}{2} p_i + \frac{F_i}{2\pi r_1},$$

$$P_{B,i} = \frac{r_2}{2} p_i + \frac{F_i}{2\pi r_2},$$

unde F_i este forţa axială corespunzătoare stratului i, considerată pozitivă cînd trage de lentilă.

Pentru determinarea stărilor de eforturi și deformații produse de sarcinile din figura 4*a*, se aplică teoria plăcilor circulare încărcate simetric, iar pentru sarcinile din figura 4*b* se aplică teoria tuburilor cu pereți groși.

Relațiile dintre eforturile de la capetele barei, sarcinile exterioare și deplasările de la marginile A_i și B_i se aranjează sub forma :

$$\frac{a_{1,i}^2}{D_{1,i}} \begin{Bmatrix} M_{A,i}/a_{1,i} \\ H_{A,i} \\ P_{A,i} \\ M_{B,i}/a_{1,i} \\ H_{B,i} \\ P_{B,i} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11,i} & c_{12,i} \\ 0 & 0 \\ c_{31,i} & c_{32,i} \\ c_{41,i} & c_{42,i} \\ 0 & 0 \\ c_{61,i} & c_{62,i} \end{bmatrix} \{\bar{F}_i\} = \begin{bmatrix} d_{11,i} & 0 & 0 & d_{14,i} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22,i} & 0 & 0 & d_{25,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d_{41,i} & 0 & 0 & d_{44,i} & 0 & 0 \\ 0 & d_{52,i} & 0 & 0 & d_{55,i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{A,i} \\ \zeta_{A,i} \\ \eta_{A,i} \\ \alpha_{B,i} \\ \zeta_{B,i} \\ \eta_{B,i} \end{Bmatrix} \tag{18}$$

în care

$$\{\bar{F}_i\} = \begin{Bmatrix} \bar{p}_i \\ \bar{F}_i \end{Bmatrix},$$

$$\bar{F}_i = F_i \, a_{1,i}/4 \, \pi \, D_{1,i}.$$

Expresiile coeficienților $d_i]$ și $[c_i]$ sînt date în tabelul 5.

Tabelul 5. Coeficienții $[d_i]$ și $[c_i]$

$$d_{11,i} = \frac{\lambda_{1,i}[q^2(1+\mu)+1-\mu]}{k_{3,i}^3(q^2-1)}, \qquad c_{11,i} = -\frac{q^2-1}{2\lambda_{1,i}^2 q^2},$$

$$d_{14,i} = \frac{2q\lambda_{1,i}}{k_{3,i}^3(q^2-1)}, \qquad c_{12,i} = \frac{2\ln q}{q^2-1} - 1,$$

$$d_{22,i} = \frac{4\nu_{1,i}[q^2(1+\mu)+1-\mu]}{k_{3,i}\,\lambda_{1,i}(q^2-1)(1-\mu^2)}, \qquad c_{31,i} = 2/\lambda_{1,i},$$

$$d_{25,i} = \frac{-8\,k_{1,i}\,q\nu_{1,i}}{k_{3,i}\,\lambda_{1,i}(q^2-1)(1-\mu^2)}, \qquad c_{32,i} = 2\,\lambda_{1,i},$$

$$d_{41,i} = \frac{2q^2\,\lambda_{1,i}}{k_{3,i}^3(q^3-1)}, \qquad c_{41,i} = -\,c_{11,i},$$

$$d_{44,i} = -\frac{q\lambda_{1,i}[q^2(1-\mu)+1+\mu]}{k_{3,i}^3(q^2-1)}, \qquad c_{42,i} = \frac{2q^2\ln q}{q^2-1} - 1,$$

$$d_{52,i} = \frac{-8q^2 \nu_{1,i}}{k_{3,i}\,\lambda_{1,i}(q^2-1)\,(1-\mu^2)}, \qquad c_{61,i} = 2/q\,\lambda_{1,i},$$

$$d_{56,i} = \frac{4k_{1,i}\,q\nu_{1,i}[q^2(1-\mu)+1+\mu]}{k_{3,i}\,\lambda_{1,i}\,(q^2-1)\,(1-\mu^2)}, \qquad c_{62,i} = 2\,q\lambda_{1,i},$$

$$d_{12} = d_{13} = d_{15} = d_{21} = d_{23} = d_{24} = d_{31} = d_{32} = d_{34} = d_{35} = d_{42} =$$

$$= d_{43} = d_{45} = d_{53} = d_{54} = 0,$$

$$c_{21} = c_{22} = c_{51} = c_{52} = 0,$$

unde

$$q = \frac{r_1}{r_2}\ ;\ k_{1,i} = \frac{a_{2,i}}{a_{1,i}}\ ;\quad k_{2,i} = \frac{t_{1,i}}{t_{2,i}}\ ;\quad k_{3,i} = \frac{t_{1,i}}{t_{3,i}}.$$

Deplasările axiale la marginile A şi B ale stratului i, în situaţia conturului A simplu rezemat sînt:

$\eta_{A,i} = 0,$

$$\eta_{B,i} = \frac{k_{3,i}^3}{4\lambda_{1,i}^2\,q^2}\left[\frac{q^4-1-4q^2\ln q}{4\lambda_{1,i}^2\,q^2}\,\bar{p}_{1;i} + \left(q^2-1-\frac{4q^2\ln^2 q}{q^2-1}\right)\bar{F}_i\right] +$$

$$+\frac{1}{\lambda_{1,i}}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{\ln q}{q^2-1}\right)\alpha_{A,i} - \left(\frac{1}{2q}-\frac{q\ln q}{q^2-1}\right)\alpha_{B,i}\right]. \qquad (19)$$

4. CONDIŢIILE LA LIMITĂ

În figura 5 se arată sensurile convenţionale pozitive ale forţelor (fig. 5*b*) şi deplasărilor (fig. 5*a*) pentru toate cele trei părţi componente ale semi-lentilei stratul i.

Aplicînd principiul acţiunii şi reacţiunii, cît şi condiţiile de continuitate ale lentilei stratul i, se obţin următoarele ecuaţii:

— Pentru punctul $1_i \equiv A_i$:

$$M_{1,i} = -M_{A,i};\ H_{1,i} = -H_{A,i};\ P_{1,i} = P_{A,i},$$

$$\alpha_{1,i} = \alpha_{A,i}\ \zeta_{1,i} = \zeta_{A,i}; \qquad (20)$$

— Pentru punctul $2_i \equiv B_i$:

$$M_{2,i} = M_{B,i};\ H_{2,i} = H_{B,i};\ P_{2,i} = P_{B,i},$$

$$\alpha_{2,i} = \alpha_{B,i};\ \zeta_{2,i} = \zeta_{B,i}.$$

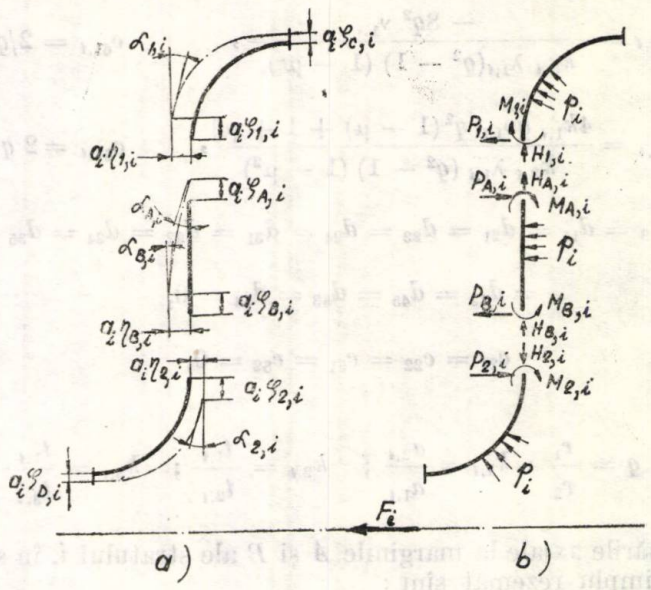


Fig. 5

Înlocuind ecuațiile (16), (17) și (18) în relațiile (20) se obține sistemul algebric de șase ecuații, de mai jos :

$$\begin{bmatrix} b_{11,i}+d_{11,i} & b_{12,i} & b_{13,i} & d_{14,i} & 0 & 0 \\ b_{21,i} & b_{22,i}+d_{22,i} & b_{23,i} & 0 & -d_{25,i} & 0 \\ b_{31,i} & b_{32,i} & b_{33,i} & 0 & 0 & 0 \\ -A_{1,i}\,d_{41,i} & 0 & 0 & b_{44,i}-A_{1,i}\,d_{44,i} & b_{45,i} & b_{46,i} \\ 0 & -A_{2,i}\,d_{52,i} & 0 & b_{54,i} & b_{55,i}+A_{2,i}\,d_{55,i} & b_{56,i} \\ 0 & 0 & 0 & b_{64,i} & b_{65,i} & b_{66,i} \end{bmatrix} \{\alpha_{1,2,i}\} =$$

$$= \begin{bmatrix} -c_{11,i} & c_{12,i} \\ 4 & 0 \\ c_{31,i} & c_{32,i} \\ A_{1,i}\,c_{41,i} & A_{1,i}\,c_{42,i} \\ -4A_{3,i} & 0 \\ -A_{2,i}\,c_{61,i} & A_{2,i}\,c_{62,i} \end{bmatrix} \{\overline{F}_i\} \tag{21}$$

sau

$$[g_i]\,\{\alpha_{1,2,i}\} = [f_i]\cdot\{\overline{F}_i\},$$

unde

$$\{\alpha_{1,2,i}\} = [\alpha_{1,i}\ \zeta_{1,i};\ \eta_{1,i}\ \alpha_{2,i}\ \zeta_{2,i}\ \eta_{2,i}]^t$$

şi

$$A_{1,i} = K_{1,i}\, k_{2,i}^3;\ A_{2,i} = k_{1,i}^2\, k_{2,i}^3;\ A_{3,i} = k_{1,i}^3\, k_{2,i}^3. \tag{22}$$

Necunoscutele sistemului algebric (21) reprezintă deplasările marginale şi pot fi exprimate în funcţie de sarcini astfel :

$$\{\alpha_{1,2,i}\} = [e_i]\,\{\bar{F}_i\} \tag{23}$$

în care $[e_i]$ este o matrice 6×2, care se exprimă prin relaţia :

$$[e_i] = [g_i]^{-1}\,[f_i].$$

5. DEPLASAREA AXIALĂ A LENTILEI

Deplasarea axială a unei lentile este egală cu deplasarea axială a fiecărui strat. Ea se obţine prin însumarea deplasărilor elementelor componente ale unei semilentile, notate cu $y_{1,i}$, $y_{B,i}$, $y_{2,i}$.

Rezultă

$$y_i = y_i = 2(y_{1,i} + y_{B,i} + y_{2,i}). \tag{24}$$

Folosind relaţiile (19) şi (23), se exprimă deplasarea axială a fiecărui strat în funcţie de forţele exterioare :

$$\eta_i = \eta_i = 2K_{1,i}(\bar{F}_i + K_{2,i}\,\bar{p}_{1,i}), \tag{25}$$

unde

$$K_{1,i} = e_{32,i} + e_{62,i} + \frac{k_{3,i}^3}{4\lambda_{1,i}^2\, q_2}\left(q^2 - 1 - \frac{4q^2 \ln^2 q}{q^2 - 1)}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_{1,i}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\ln q}{q^2 - 1}\right) e_{12,i} - \frac{1}{\lambda_{1,i}}\left(\frac{1}{2q} - \frac{q \ln q}{q^2 - 1}\right) e_{42,i},$$

$$K_{2,i} = \frac{1}{K_{1,i}}\left[e_{31,i} + e_{61,i} + \frac{k_3^3}{16\lambda_{1,i}^4\, q^4}\left(q^4 - 1 - \frac{4q^2/n^2 q}{q^2 - 1}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_{1,i}}\left(\frac{1}{2} - \frac{\ln q}{q^2 - 1}\right) e_{11,i} - \frac{1}{\lambda_{1,i}}\left(\frac{1}{2q} - \frac{q \ln q}{q^2 - 1}\right) e_{41,i}\right].$$

Din ecuaţiile (25) se determină forţele axiale corespunzătoare fiecărui strat i :

$$\bar{F}_i = \frac{1}{2k_{1,i}}\,\eta_i - K_{2,i}\,\bar{p}_{1,i}, \tag{26}$$

unde $y_i = a_{1,i}\ \eta_i$.

Pentru determinarea presiunii interioare care acționează asupra sfertului toroidal exterior al stratului i, p_i din figura 3 *a* se scriu condițiile :

$$y_{1.1} = y_{1.2} = \ldots = y_{1.i} = \ldots = y_{1.N}, \tag{27}$$

unde N—numărul de straturi ale compensatorului.

Ținînd seama că $y_{1.i} = a_{1.i}\ \eta_{1.i}$ condițiile (27) iau forma :

$$a_{1.1}\ \eta_{1.1} = a_{1.2}\ \eta_{1.2} = \ldots = a_{1.i}\ \eta_{1.i} = a_{1;N}\ \eta_{1;N}. \tag{28}$$

Înlocuind pe $\bar{F}_i$ din (26) în ecuațiile (23) se calculează :

$$\eta_{1.i} = (e_{31.i} - K_{2.i}\ e_{32.i})\ \bar{p}_{1.i} + \frac{e_{32.i}}{2K_{1.i}} \cdot \frac{y_i}{a_{1.i}}. \tag{29}$$

Înlocuind pe $\eta_{1.i}$ în (28) se obține :

$$(e_{31.i} - K_{2.i}\ e_{32.i})\ \frac{3(1-\mu^2)\ a_{1.i}^4}{Et_{1.i}^3}\ p_i + \frac{e_{32.i}}{2K_{1.i}}\ y_i = K'p + K''\ y_i, \tag{30}$$

care exprimă presiunea p_i în funcție de presiunea p și deplasarea y_i.

Notînd cu $K_i' = \frac{3(1-\mu^2)a_{1.i}^4}{Et_{1;i}^3}\ (e_{31.i} - K_{2.i}\ e_{32.i})$; $K_i'' = \frac{e_{32.i}}{2K_{1.i}}$. (31)

Sistemul de ecuații (30) ia forma :

$$p_i + \frac{K_i''}{K_i'}\ y_i = \frac{K'}{K_i'}\ p + \frac{K''}{K_i'}\ y_i, \tag{32}$$

$$\text{pentru } i = 1,2, \ldots, N.$$

Prin adunarea, membru cu membru, a celor N ecuații (32) se obține :

$$p + \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{K_i''}{K_i'}\right) y_i = K' \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{K_i'}\right) p + K'' \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{K_i'}\right) y_i \tag{33}$$

din care rezultă

$$K' = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{K_i'}}\ ;\ K'' = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{K_i''}{K_i'}}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{K_i'}} = K' \sum_{i=1}^{N} \frac{K_i''}{K_i'}. \tag{34}$$

Cunoscînd K' şi K'' din ecuaţiile (32) se determină :

$$\bar{p}_{1,i}=\frac{3(1-\mu^2)a_{1,i}^3}{E\,t_{1,i}^3}\,p_i=\frac{K'p+(K''-K_i'')\,y_i}{(e_{31,i}-K_{2,i}\,e_{32,i})\,a_{1,i}} \tag{35}$$

$$\text{pentru } i=1,2,\ldots,N.$$

Mărimile (35) şi (26) se înlocuiesc în ecuaţiile (23) obţinînd deplasările elastice din punctele 1 şi 2 ale fiecărui strat adică, se obţin elementele matricei $\{\alpha_{1;2,i}\}$.

6. EFORTURI ŞI EFORTURI UNITARE

Eforturile secţionale M_φ, M_θ şi N_θ se calculează cu relaţiile (4). Astfel pentru sfertul toroidal exterior, stratul i :

$$M_{\varphi,i}=\frac{D_{1,i}}{a_{1,i}}\left\{\alpha_{1,i}\cos\varphi+\sum_{n=1}^{4}2nC_{1,2n,i}\cos(2n\varphi)-\mu\lambda_{1,i}\left[\alpha_{1,i}\sin\varphi+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{n=1}^{4}C_{1,2n,i}\sin(2n\varphi)\right]\sin\varphi\right\},$$

$$M_{\theta,i}=\frac{D_{1,i}}{a_{1,i}}\left\{-\lambda_{1,i}\left[\alpha_{1,i}\sin\varphi+\sum_{n=1}^{4}C_{1,2n,i}\sin(2n\varphi)\right]\sin\varphi+\mu\left[\alpha_{1,i}\cos\varphi+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{n=1}^{4}2nC_{1,2n,i}\cos(2n\varphi)\right]\right\}. \tag{36}$$

$$N_{\theta,i}=E\,t_{1,i}\,\varepsilon_{\theta,i}=E\,t_{1,i}\,a_{1,i}\,\frac{\varphi}{r},\ \text{în care}$$

$$\zeta=\zeta_{1,i}-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}C_{11,i}(1+\cos2\varphi)+\sum_{n=1}^{4}C_{1,2n,i}\left[\frac{[\cos(2n-1)\varphi}{2n-1}+\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1}\right]\right\}.$$

Pentru sfertul toroidal interior, stratul i, expresiile eforturilor secţionale se obţin din (36) prin înlocuirea indicelui 1 cu 2, adică apar mărimile $\alpha_{2,i}$, $D_{2,i}$, $a_{2,i}$, $\lambda_{2,i}$, $t_{2,i}$, $\zeta_{2,i}$, $C_{2,2n,i}$.

Efortul forță $N_{\varphi,i}$, se calculează în punctele 1 și 2 (vezi fig. 2) folosind ecuațiile (16) și (17), iar în punctele C și D din ecuațiile de echilibru.

Se obțin:

$$N_{\varphi,1,i} = \frac{D_{1,i}}{a_{1,i}^2}(b_{21,i}\,\alpha_{1,i} + b_{22,i}\,\zeta_{1,i} + b_{23,i}\,\eta_{1,i} - 4\bar{p}_{1,i}),$$

$$N_{\varphi,C,i} = \frac{D_{1,i}}{a_{1,i}^2}\left[\frac{2\lambda_{1,i}}{1+\lambda_{1,i}}\,\bar{F}_i + \frac{2(1+\lambda_{1,i})}{\lambda_{1,i}}\,\bar{p}_{1,i}\right], \tag{37}$$

$$N_{\varphi,2,i} = \frac{D_{2,i}}{a_{2,i}^2}[b_{54,i}\,\alpha_{2,i} + b_{55,i}\,\zeta_{2,i} + 4\,A_{3,i}\,\bar{p}_{1,i} + b_{56,i}\,\eta_{2,i}],$$

$$N_{\varphi,D,i} = \frac{D_{2,i}}{a_{2,i}^2}\left[\frac{2\,A_{1,i}\,\lambda_{2,i}}{1-\lambda_{2,i}}\,\bar{F}_i + \frac{2A_{3,i}(1-\lambda_{2,i})}{\lambda_{2,i}}\,\bar{p}_{1,i}\right].$$

Eforturile unitare maxime sau minime, adică în punctele situate pe suprafața interioară sau exterioară a învelișului se calculează cu relațiile:

$$\sigma_{\varphi,\substack{max\\min}} = \frac{N_\varphi}{t} \pm \frac{6M_\varphi}{t^2},$$

$$\sigma_{\theta,\substack{max\\min}} = \frac{N_\theta}{t} \pm \frac{6M_\theta}{t^2}, \tag{38}$$

unde semnul (+) se consideră pentru punctul din interiorul învelișului.

Efortul unitar echivalent după teoria de rezistență a lui τ este

$$\sigma_{echiv} = \max\,[|\sigma_\varphi|,\ |\sigma_\theta|,\ |\sigma_\varphi - \sigma_\theta|]. \tag{39}$$

7. ALCĂTUIREA PROGRAMULUI PENTRU UN CALCULATOR CIFRIC

Algoritmul prezentat mai sus, pentru calculul eforturilor și deplasărilor compensatoarelor lenticulare de dilatație, cu lentile de tip „U" executate multistrat, este transpus într-un program pentru un calculator cifric. Programul este scris în limbajul FORTRAN fiind verificat și rulat pe calculatorul FELIX C-256.

Ordinea de efectuare a operaţiilor este indicată în schema logică din figura 6.

Datele de intrare se dau în ordinea indicată în tabelul 6, iar cele de ieşire (rezultatele) în ordinea din tabelul 7.

Simbolurile folosite în tabelele 6 şi 7 au semnificaţiile precizate în paragrafele anterioare.

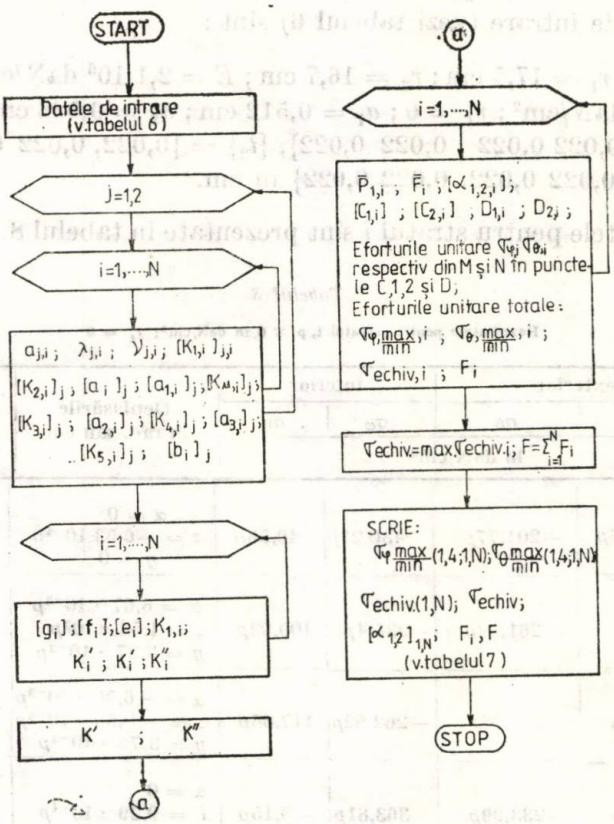


Fig. 6

Tabelul 6

Datele de intrare

N	r_1	r_2	E	μ	p	y_t	a_1	a_2	$t_1(1, N)$	$t_2(1, N)$	$t_3(1, N)$

Tabelul 7

Datele de ieşire (rezultatele)

$\sigma_{\varphi\ \frac{max}{min}}(1,4\ ;\ 1,\ N)$	$\sigma_{\theta,\frac{max}{min}}(1,4\ ;\ 1,\ N)$	$\sigma_{echiv}(1,\ N)$	σ_{echiv}	$\{\alpha_{1,2}\}\ 1,\ N$

F_i	$F = \sum_{i=1}^{N} F_i$

8. EXEMPLUL DE CALCUL

Ca exemplu de calcul se consideră compensatorul lenticular de dilatație D_n 300, cu patru straturi, fabricat de Întreprinderea de utilaj chimic, Ploiești.

Se consideră mai întîi cazul de încărcare : presiune interioară $p \neq 0$ și deplasare axială nulă $y_t = 0$.

Datele de intrare (vezi tabelul 6) sînt :

$N = 4$; $r_1 = 17{,}5$ cm ; $r_2 = 16{,}7$ cm ; $E = 2{,}1.10^6$ daN/cm^2 ; $\mu = 0{,}3$; $p = 1$ daN/cm^2 ; $y_t = 0$; $a_1 = 0{,}512$ cm ; $a_2 = 0{,}588$ cm ;
$\{t_1\} = \{0{,}022\ 0{,}022\ \ 0{,}022\ 0{,}022\}$, $\{t_2\} = \{0{,}022,\ 0{,}022\ 0{,}022\ 0{,}022\}$;
$\{t_3\} = \{0{,}022\ 0{,}022,\ 0{,}022\ 0{,}022\}$ în cm.

Rezultatele pentru stratul i sînt prezentate în tabelul 8.

Tabelul 8

Rezultatele pentru stratul i, $p \neq 0$ în daN/cm^2; $y_t = 0$

Punctul	exterior		interior		Deplasările în rad. sau cm	$\sigma_{ech.}$ daN/cm^2	F_t daN
	σ_φ	σ_θ	σ_φ	σ_θ			
	în daN/cm^2						
C	$-407{,}56p$	$-201{,}77p$	$430{,}21p$	$49{,}56p$	$\alpha = 0$ $z = -6{,}53.10^{-4}p$ $y = 0$	$430{,}21p$	$-254p$
1	$244{,}32p$	$261{,}69p$	$-236{,}4p$	$109{,}02p$	$\alpha = 6{,}67 \cdot 10^{-3}p$ $z = 1{,}54 \cdot 10^{3}p$ $y = 3{,}27 \cdot 10^{-3}p$		
2	$252{,}92p$	$276{,}95p$	$-262{,}92p$	$117{,}06p$	$\alpha = -6{,}96 \cdot 10^{-3}p$ $z = -1{,}56 \cdot 10^{-3}p$ $y = 3{,}76 \cdot 10^{-3}p$		
D	$-389{,}01p$	$-233{,}99p$	$363{,}81p$	$-8{,}15p$	$\alpha = 0$ $t = 9{,}29 \cdot 10^{-4}p$ $y = 0$		

Pentru întreg compensatorul se obține :

$$\sigma_{echiv} = 430{,}21\ p \text{ și } F = -\ 918{,}55\ p.$$

Pentru cazul de încărcare : presiune interioară nulă $p = 0$ și deplasare axială $y_t \neq 0$.

În datele de intrare se modifică numai :

$$p = 0\ ;\ y_t = 1 \text{ cm}.$$

Rezultatele pentru stratul i sînt prezentate în tabelul 9.

Tabelul 9

Rezultatul pentru stratul i, p = 0; $y_i \neq 0$ în cm.

Punctul	exterior		interior		Deplasările în rad. sau cm	σ_{echiv} daN/cm²	F_i daN
	σ_φ	σ_θ	σ_φ	σ_θ			
	în daN/cm²						
C	$-7{,}17 \cdot 10^3 y_i$	$-8{,}69 \cdot 10^3 y_i$	$7{,}33 \cdot 10^3 y_i$	$-4{,}34 \cdot 10^3 y_i$	$\alpha = 0$ $z = 0{,}0559 y_i$ $y = 0$		
1	$-8{,}87 \cdot 10^3 y_i$	$-2{,}66 \cdot 10^3 y_i$	$9{,}22 \cdot 10^3 y_i$	$2{,}23 \cdot 10^3 y_i$	$\alpha = 0{,}3231\ y_i$ $z = -0{,}00018 y_i$ $y = 0{,}1020\ 7 y_i$	$11{,}68 \cdot 10^3 y_i$	$134{,}8 y_i$
2	$9{,}32 \cdot 10^3 y_i$	$2{,}28 \cdot 10^3 y_i$	$-8{,}93 \cdot 10^3 y_i$	$-2{,}75 \cdot 10^3 y_i$	$\alpha = 0{,}3295 y_i$ $z = 0{,}00018 y_i$ $y = 0{,}10918 y_i$		
D	$5{,}22 \cdot 10^3 y_i$	$8{,}44 \cdot 10^3 y_i$	$-50{,}5 \cdot 10^3 y_i$	$5{,}35 \cdot 10^3 y_i$	$\alpha = 0$ $z = -0{,}05296 y_i$ $y = 0{,}5 y_i$		

Pentru întreg compensatorul se obţine :

$$\sigma_{echiv.} = 12{,}54 \cdot 10^3\ y_i \text{ şi } F = 738{,}1\ y_i$$

9. CONCLUZII

a. Algoritmul întocmit şi transpunerea lui într-un program pentru un calculator cifric (calculatorul FELIX C—256) permite calculul exact şi rapid al tensiunilor şi deplasărilor compensatoarelor lenticulare de dilataţie, cu lentile de tip „U" executate multistrat, pentru orice combinaţie de presiune interioară (sau exterioară) cu deplasarea axială.

b. Întrucît în programul întocmit toate elementele geometrice pot fi variate prin datele de intrare, folosirea programului permite o optimizare a dimensiunilor compensatoarelor lenticulare de dilataţie.

Primită la redacţie la 18 martie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. W. Flugge, *Statique et dinamique des coques*, Ed. Dunod, Paris, 1960.
2. A. Laupa, N. Weil, *Analysis of U-Shaped Expansion Joints*, Journal of Applied Mechanics, March 1962.
3. C. Manea, *Asupra calculului de rezistenţă al compensatoarelor cu lentile de tip „U", la deplasări axiale*, Buletinul Institutului de petrol şi gaze, Ploieşti, XXII, 2 (1975).
4. C. Manea, *Asupra calculului de rezistenţă al compensatoarelor cu lentile de tip „U", la presiune interioară sau exterioară*, Buletinul Institutului de petrol şi gaze Ploieşti, **XXIII**, 3, (1977).

Tabelul 2

Rezultatul pentru starea $t, p = 0{,}1\ p_1 \pm 0$ în cm.

Punc-tul	exterior		interior		Deplasarile în daN/cm²	Eforturile daN/cm²	F_y daN
	σ_x	σ_y	σ_y	σ_x			
C	$-2{,}17 \cdot 10^2 p_1$	$-8{,}09 \cdot 10^2 p_1$	$7{,}23 \cdot 10^2 p_1$	$-4{,}14 \cdot 10^2 p_1$	$\alpha = 0$ $z = 0{,}0359 p_1$ $\beta = 0$		
1	$-8{,}87 \cdot 10^2 p_1$	$-2{,}86 \cdot 10^2 p_1$	$9{,}22 \cdot 10^2 p_1$	$2{,}38 \cdot 10^2 p_1$	$\alpha = 0{,}2734\ p_1$ $z = -0{,}0880 p_1$ $\beta = 0{,}1020\ 7p_1$	$11{,}08 \cdot 10^2 p_1$	134,9 p_1
2	$9{,}32 \cdot 10^2 p_1$	$2{,}28 \cdot 10^2 p_1$	$-8{,}05 \cdot 10^2 p_1$	$-2{,}7 \cdot 10^2 p_1$	$\alpha = 0{,}3285 p_1$ $z = 0{,}0001 8 p_1$ $\beta = 0{,}1021 8 p_1$		
D	$9{,}22 \cdot 10^2 p_1$	$8{,}14 \cdot 10^2 p_1$	$-10{,}3 \cdot 10^2 p_1$	$-4{,}75 \cdot 10^2 p_1$	$\alpha = 0$ $z = -0{,}0{,}2 \text{ceg} p_1$ $\beta = 0{,}9 p_1$		

Pentru lucrul compensatorul se obține:

$$\sigma_{max} = 12{,}54 \cdot 10^2\ p_1 \text{ și } F = 738{,}1\ p_1$$

5. CONCLUZII

a. Algoritmul întocmit și transpunerea lui într-un program pentru un calculator cifric (calculatorul FELIX C–256) permite calculul exact și rapid al tensiunilor și deplasărilor compensatoarelor lenticulare de diferite tipuri, cu lentile de tip „U" excentrice multistrat, pentru orice combinație de presiuni interioare (sau exterioare) ca depășească o limită.

b. Încercări în programul întocmit toate elementele geometrice pot fi variate prin datele de intrare, folosirea programului permite o optimizare a dimensiunilor compensatorului lenticulare de diferite.

Primită în redacție la martie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. W. Prager, Sur une théorie des coques, Ed. Dunod, Paris, 1960.
2. A. Lacaze, N. Wenz, Analyse des [illegible] Journal of Applied Mechanics, March 1962.
3. C. Mazure, Asupra calculului de rezistență al compensatorului cu lentile de tip „U", în [illegible] Buletinul Institutului de petrol și gaze, Ploiești, XXII, 2 (1970).
4. C. Mazure, Asupra calculului de rezistență al compensatorului cu lentile de tip „U", în prezența [illegible] Buletinul Institutului de petrol și gaze Ploiești, XXIII, 5 (1971).

STUDII ŞI CERCETĂRI TEORETICO-EXPERIMENTALE PRIVIND SECURITATEA TEHNICĂ A MANTALEI CILINDRICE A UNUI EXPANDOR DE ÎNALTĂ PRESIUNE

de A. PAVEL, L. RIZEA, C. MATEESCU
Institutul de petrol şi gaze Ploieşti

Sînt prezentate rezultatele principale ale unor studii, cercetări, măsurări şi analize tehnice, efectuate în scopul precizării funcţionării în continuare, în deplină securitate tehnică, a mantalei cilindrice a expandorului de înaltă presiune din circuitul unui cazan de mare capacitate al unei centrale electrotermice.
După prezentarea principalelor caracteristici tehnice şi de calcul, pentru expandorul respectiv, se emit cîteva consideraţii privind geometria mantalei cilindrice şi rezultatele măsurărilor dimensionale (de grosime) efectuate cu mijloace ultrasonice.
Sînt prelucrate, apoi, rezultatele determinării prin măsurări tensometrice a eforturilor unitare din mantaua examinată, totodată, evaluîndu-se coeficienţii globali de siguranţă corespunzători.
Interpretarea atentă a rezultatelor permite, în final, precizarea presiunii de lucru maxim admisibile a expandorului în discuţie, în condiţii corespunzătoare de securitate tehnică a funcţionării sale în regim de exploatare.

Expandorul, cu o capacitate nominală de 25,3 m³ (tab. 1), al cărui mediu de lucru este aburul şi apa fierbinte, serveşte ca utilaj de pornire al cazanului de mare capacitate al unei centrale electrotermice.

Tabelul 1

Caracteristicile tehnice ale expandorului de pornire

Tipul expandorului		Metalic, cilindric vertical, cu manta simplă, izolat termic
Capacitatea nominală, în l		25 300
Dimensiunile proiectate, în mm	Diametrul exterior D_e	2 000
	Înălţimea mantalei cilindrice H	8 000
	Înălţimea fundurilor torosferice h	570
Mediul de lucru		Abur supraîncălzit (şi apă fierbinte)
Temperatura maximă de lucru, în °C		400
Presiunea de lucru la temperatura maximă, în bar		70
Presiunea de încercare hidraulică, în bar		91
Materialul de bază (al mantalei şi fundurilor)		W1.7335—13CrMo44 DIN 17006 DIN 17007

Din punct de vedere constructiv, expandorul respectiv este un recipient cilindric vertical (fig. 1) de mare presiune, realizat dintr-o manta cilindrică, cu două funduri torosferice la extremităţi.

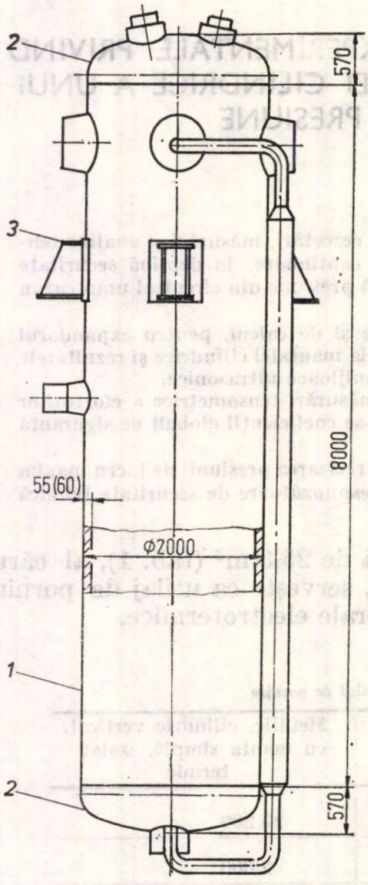


Fig. 1. — Expandorul de înaltă presiune :
1 — mantaua cilindrică ;
2 — fundul torosferic ;
3 — suportul lateral.

Materialul de bază atît al mantalei, cît şi al fundurilor, este oţelul de tip 13Cr Mo44, avînd compoziţia chimică şi caracteristicile fizico-mecanice prezentate în tabelele 2 şi 3.

Calculul de rezistenţă al expandorului a fost efectuat pentru o presiune de calcul de 70 bar şi pentru o temperatură maximă de calcul de 400°C, rezultînd, pentru manta şi fund, grosimile de perete corespunzătoare, menţionate în tabelul 4.

Iniţial, expandorul (izolat de restul instalaţiei) a fost supus unei încercări de presiune hidraulică la rece, la suprapresiunea de 91 bar, efectuîndu-se, apoi, verificarea la presiunea de regim de 70 bar — conform documentaţiei firmei constructoare.

În timpul funcţionării expandorului, datorită slăbirii (din fixare), vibrării şi apoi ruperii unor dispozitive şi elemente interioare, au fost afectate (prin amprentarea sau erodarea suprafeţei interioare şi, deci, prin diminuarea grosimii peretelui) mai multe zone de pe mantaua acestuia. Aceste zone au avut forme şi mărimi diferite, în funcţie de factorii care le-au generat, şi anume :

— jocul liber în suporturi a condus la erodarea suprafeţei interioare a mantalei, aceste zone — cu excavaţii — fiind cele mai numeroase,

— ruperea şi prăbuşirea unor elemente interioare a produs deformaţii remanente — cu amprentare — ale suprafeţei interioare a mantalei.

Pentru peretele mantalei cilindrice, grosimea minimă a zonelor afectate, măsurată *) ultrasonic, a fost de 49 mm, faţă de 55 mm — grosimea proiectată, respectiv 60 mm — grosimea măsurată efectiv, în peretele neavariat.

Pe lîngă defectele menţionate anterior, a mai fost depistată o zonă cu „ciupituri", erodări locale, cu suprafeţe mici, dar profunde, a căror adîncime nu a putut fi precizată cu mijloace ultrasonice.

---

* De către ICEMENERG Bucureşti

Tabelul 2

Compoziţia chimică a oţelului 13CuMo44

Compoziţia chimică, în %						
C	Si	Mn	Cr	Mo	P	S
0,10...0,18	0,15...0,35	0,40...0,70	0,70...1,00	0,40...0,50	max. 0,04	max. 0,04

Tabelul 3

Caracteristicile mecanice şi elastice ale oţelului 13CuMo44

Caracteristice mecanice, în N/mm²				Caracteristicile elastice		
Rezistenţa de rupere σ_r la 20°C	Limita tehnică de curgere $\sigma_{0,2}$ la		Rezistenţa tehnică de durată $\sigma_{r/100\,000}$, la 450°C	Lungirea la rupere δ_5, în %	Modulul de elasticitate longitudinal E, în N/mm², la	
	20°C	400°C			20°C	400°C
450...580	300	210	290	22	$0{,}213 \cdot 10^6$	$0{,}185 \cdot 10^6$

Tabelul 4

Grosimea peretelui metalic al mantalei şi fundurilor expandorului

Parametrul geometric proiectat \ Elemente principale ale expandorului		Manta	Fund
Grosimea de perete proiectată, în mm	Grosimea de rezistenţă	51,5	68,7
	Adaosul de grosime	0,5	1,0
	Grosimea totală calculată	52,0	69,7
	Grosimea totală adoptată	55,0	80,0

În scopul evaluării maximale a eforturilor unitare din mantaua cilindrică avariată, s-au adoptat schemele de calcul indicate în figura 5, din care rezultă următoarele cinci cazuri distincte :

a) $s = s_0 = 60$ mm, care reprezintă valoarea maximă a grosimii de perete măsurate ;

b) $s = 55$ mm — valoarea maximă a grosimii de perete proiectate ;

c) $s = 50$ mm
d) $s = 45$ mm
e) $s = 40$ mm
} — valorile ipotetice ale grosimii de perete reduse (slăbite) prin existenţa defectelor menţionate.

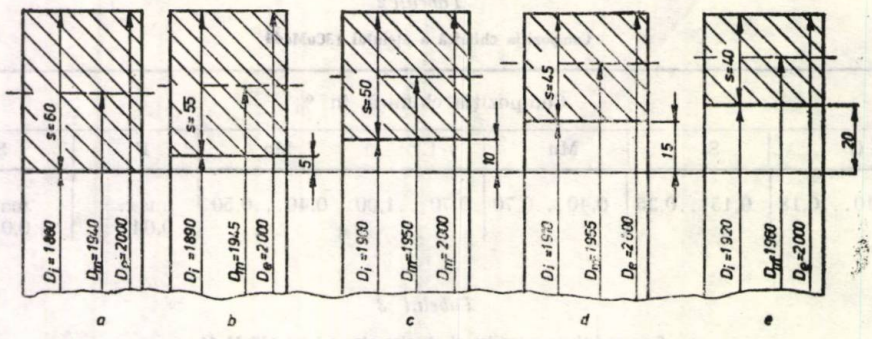


Fig. 2. — Schemele de calcul pentru mantaua cilindrică a expandorului.

Întrucît mantaua expandorului este de tipul învelișului cilindric *cu perete subțire*, eforturile unitare se determină cu formulele :

$$\sigma_t = k_t\, p\,; \tag{1}$$

$$\sigma_m = k_m\, p, \tag{2}$$

în care $k_t = D_m/2s$ și $k_m = D_m/4s$ sînt simplexuri dimensionale cu semnificația unor coeficienți de proporționalitate, ale căror valori (teoretice), pentru diferitele scheme de calcul adoptate (fig. 2), sînt date în tabelul 5.

Tabelul 5

Valorile analitice ale coeficienților de proporționalitate k_t și k_m

Cazul (fig. 2) / s, în mm / Coeficientul	*a* 60	*b* 55	*c* 50	*d* 45	*e* 40
k_t	16,17	17,64	19,40	21,56	24,25
k_m	8,08	8,82	9,70	10,78	12,13

Expresiile (1) și (2) confirmă că dependența (în domeniul comportării elastice a materialului de bază) dintre eforturile unitare σ și presiunea interioară p este liniară (fig. 3).

Factorul de slăbire (reducere) ψ al grosimii peretelui mantalei cilindrice, prin intermediul căruia se poate aprecia sau caracteriza capacitatea portantă reală a mantalei avariate, se poate defini astfel :

$$\psi = \frac{A_{net}}{A_{brut}} = \frac{s}{s_0} \leqslant 1{,}0, \tag{3}$$

în care $A_{net} = sL$ și $A_{brut} = s_0 L$ sînt ariile secțiunilor longitudinale prin mantaua de lungime L, s avînd semnificațiile din figura 2, iar $s_0 = 60$ mm.

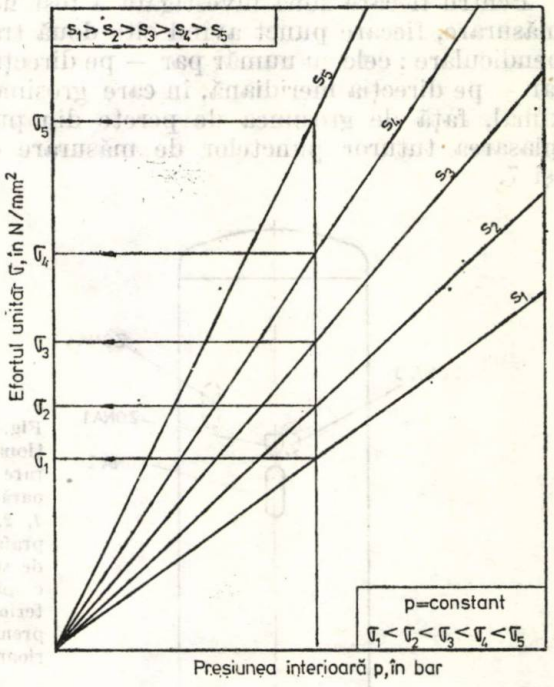


Fig. 3. — Dependența generală dintre eforturile unitare σ și presiunea interioară p.

Valorile teoretice ale acestui factor, corespunzătoare diferitelor alternative de studiu, sînt indicate în tabelul 6.

În scopul determinării valorilor reale (experimentale) ale eforturilor unitare din peretele zonelor prezentînd defecte (reduceri de grosime), colectivul de specialitate al autorilor a executat măsuri tensometrice în condițiile încercării hidraulice de presiune la rece.

Tabelul 6

Valorile analitice ale factorului de slăbire Ψ al grosimii peretelui mantalei cilindrice

Grosimea de perete s (fig. 2), în mm	60*	55	50	45	40
Factorul de slăbire Ψ	1,000	0,917	0,833	0,750	0,667
	100,0 %	91,7 %	83,3 %	75,0 %	66,7 %

* $s = 60$ mm $= s_0$.

Amplasarea pozițională a zonelor de măsurare, în care au fost aplicate traductoare tensometrice rezistive (TTR), este indicată în figura 4. În scopul delimitării (ca întindere a) zonelor de măsurare *, s-a utilizat un aparat de examinare ultrasonică de tip D-METTER.

* Se precizează că zonele cu punctele de măsurare sînt situate pe suprafața exterioară a mantalei cilindrice, însă sînt radial incidente cu defectele de pe suprafața interioară. Poziționarea acestor zone a necesitat efectuarea în mod special a unui control ultrasonic de grosime.

Pentru fiecare zonă investigată a fost hotărît un număr de puncte de măsurare, fiecare punct avînd cîte două traductoare, lipite pe direcţii perpendiculare : cele cu număr par — pe direcţia inelară, iar cele cu număr impar — pe direcţia meridiană, în care grosimea de perete era diminuată maximal, faţă de grosimea de perete din punctele imediat învecinate. Amplasarea tuturor punctelor de măsurare este prezentată în figurile 5,6 şi 7.

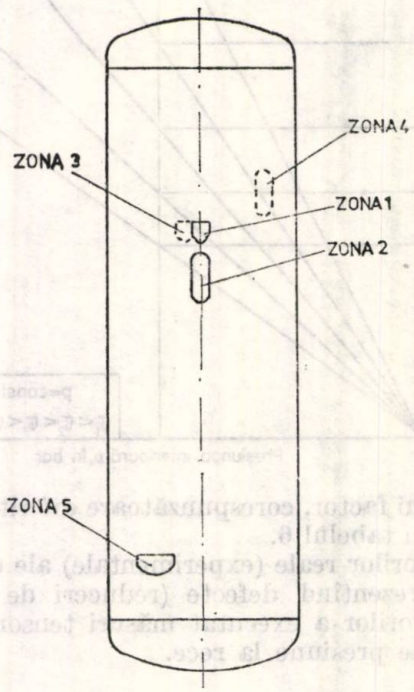


Fig. 4. — Amplasarea poziţională a zonelor de măsurare pe suprafaţa exterioară a mantalei cilindrice ; *1, 2, 3* — zonele cu suprafaţă interioară erodată de suporturi ; *4* — zona cu ciupituri pe suprafaţa interioară ; *5* — zona cu amprentă pe suprafaţa interioară, produsă prin lovire.

Zona	Numărul de TTR active	Numărul poziţiei TTR active	Simbolul TTR compensator	Observaţii
1	2	1 ; 2	C 1	Parţial accesibilă
2	22	3 ... 24		Accesibilă
3	4	25 ... 28	C 3	Parţial accesibilă
4	6	29 ... 34	C 4	Accesibilă
5	8	35 ... 42	C 5	Accesibilă

NOTĂ : TTR — traductor tensometric rezistiv.
Observaţie. Zonele cu accesbilitate parţială intersectează brîul reazemelor.

Avînd în vedere starea fizică a mantalei cilindrice şi condiţiile de lucru ale expandorului, încercarea hidraulică de presiune la rece s-a efectuat pînă la presiunea de 91 bar, în două cicluri (încărcare-descărcare),

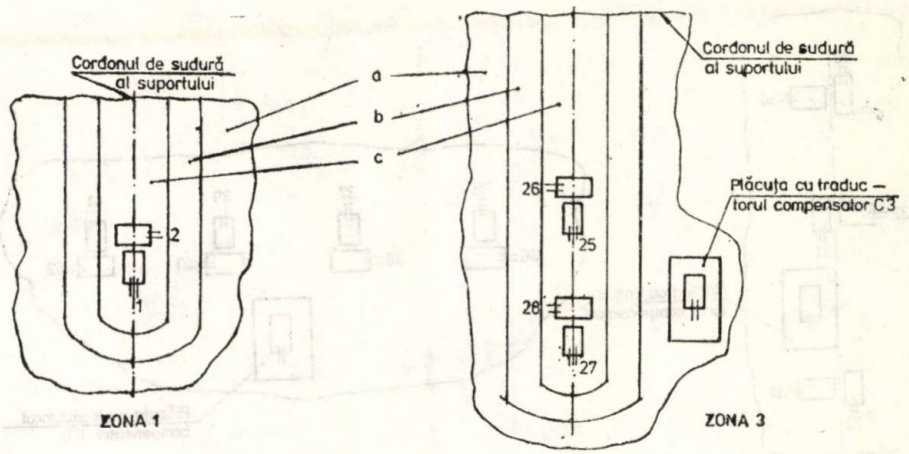


Fig. 5. — Zonele *1* și *3* aflate sub dispozitivele de rezemare ale exapandorului : *a* — cîmpul normal (fără defecte) ; *b* — cîmpul de racordare (grosimea de perete este variabilă) ; *c* — cîmpul central, cu grosime de perete diminuată.

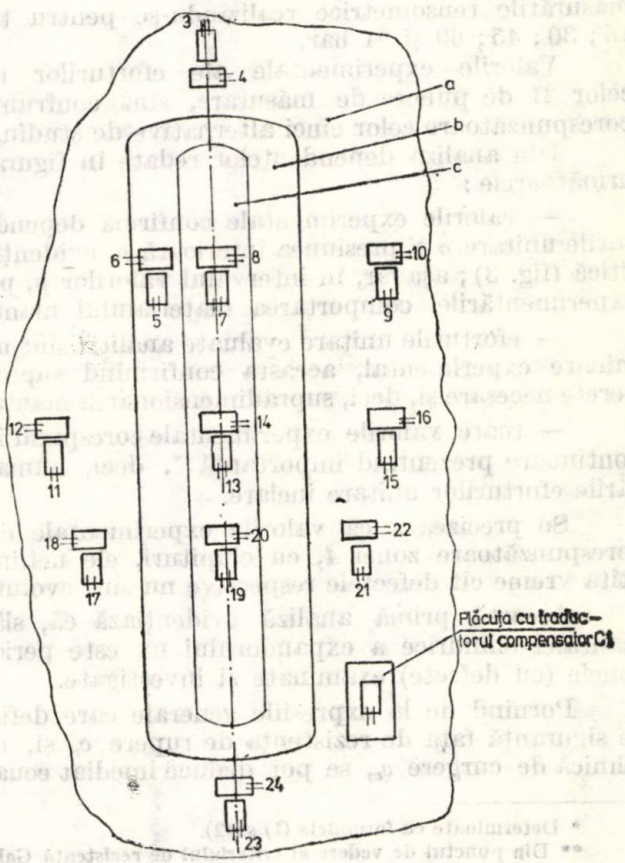


Fig. 6. — Zona *2* : *a* — cîmpul normal (fără defecte) ; *b* — cîmpul de racordare (grosimea de perete este variabilă) ; *c* — cîmpul central, cu grosimea de perete diminuată.

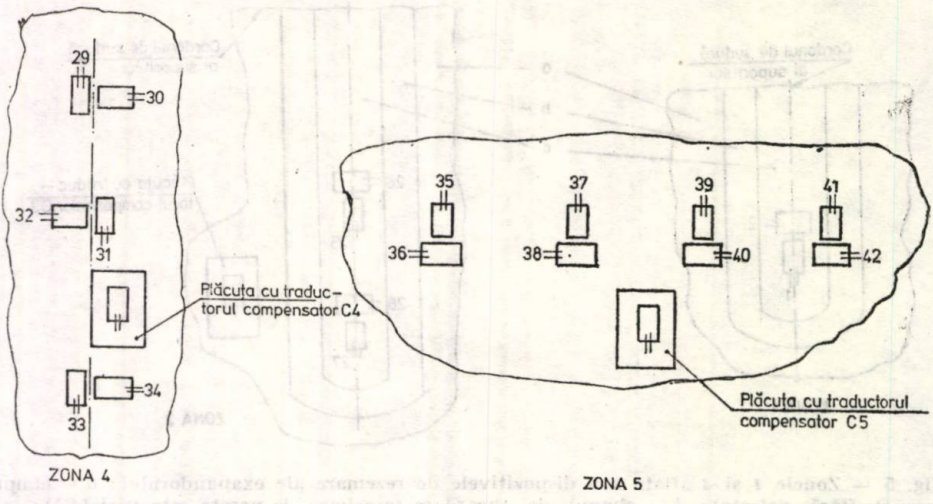


Fig. 7. — Zonele *4* (cu ciupituri) și *5* (cu amprentă).

măsurările tensometrice realizîndu-se pentru treptele de presiune de: 15; 30; 45; 60 și 91 bar.

Valorile experimentale ale eforturilor unitare, corespunzătoare celor 21 de puncte de măsurare, sînt confruntate cu cele teoretice *, corespunzătoare celor cinci alternative de studiu, în figura 8.

Din analiza dependențelor redate în figura 8 rezultă, în principal, următoarele:

— valorile experimentale confirmă dependența liniară dintre eforturile unitare σ și presiunea interioară p, evidențiată anterior pe cale analitică (fig. 3); așadar, în intervalul valorilor p, pentru care s-au efectuat experimentările, comportarea materialului mantalei este elastică;

— eforturile unitare evaluate analitic sînt mai mari decît cele determinate experimental, aceasta confirmînd supraevaluarea grosimii de perete necesare și, deci, supradimensionarea mantalei respective;

— toate valorile experimentale corespund inegalității $\sigma_t^{exp} > \sigma_m^{exp}$, în continuare prezentînd importanță **, deci, numai rezultatele și interpretările eforturilor unitare inelare.

Se precizează că valorile experimentale cele mai mari $\sigma_{t\,max}^{exp}$ sînt corespunzătoare zonei *4*, cu ciupituri, ele nefiind, însă, amenințătoare, atîta vreme cît defectele respective nu sînt evolutive în timp.

Această primă analiză evidențiază că, slăbirea reală a peretelui mantalei cilindrice a expandorului nu este periculoasă în nici una din zonele (cu defecte) examinate și investigate.

Pornind de la expresiile generale care definesc coeficienții globali de siguranță față de rezistența de rupere c_r și, respectiv, față de limita tehnică de curgere c_c, se pot deduce imediat ecuațiile generale ale depen-

* Determinate cu formulele (1) și (2).

** Din punctul de vedere al criteriului de rezistență Galilei-Rankine.

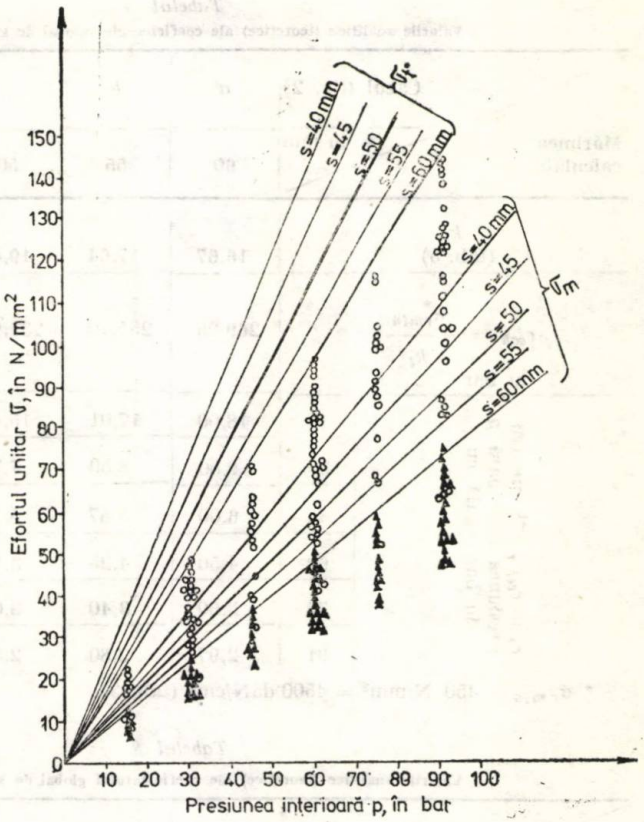


Fig. 8. — Compararea eforturilor unitare analitice (teoretice) cu cele experimentale: O — valori experimentale σ_t; ▲ — valori experimentale σ_m.

denţelor teoretice $c_r = c_r(p)$ şi $c_c = c_c(p)$, rezultînd:

$$c_r = c_{ech\,r}\, p^{-1}, \tag{4}$$

$$c_c = c_{ech\,c}\, p^{-1}, \tag{5}$$

valorile analitice c_r şi c_c, pentru alternativele de studiu prezentate în figura 2, fiind cele redate în tabelele 7 şi 8.

Valorile experimentale ale aceloraşi coeficienţi globali de siguranţă, determinate cu următoarele formule evidente:

$$c_r^{exp} = \frac{\sigma_{r\,min}}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_{r\,min}}{\sigma_t^{exp}}, \tag{6}$$

$$c_c^{exp} = \frac{\sigma_{0.2\,min}}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_{0.2\,min}}{\sigma_t^{exp}}, \tag{7}$$

Tabelul 7

Valorile analitice (teoretice) ale coeficientului global de siguranță c_r

Mărimea calculată \ Cazul (fig. 2)		a	b	c	d	e
	s, în mm	60	55	50	45	40
k_t (tab. 5)		16,67	17,64	19,40	21,56	24,25
$c_{ech\,r} = \frac{\sigma^{*}_{r\,min}}{k_t}$, în bar		269,95	255,10	231,96	208,72	185,57
$c_r = c_{ech\,r}\,p^{-1}$, pentru presiunea interioară p, în bar, egală cu	15	18,00	17,01	15,46	13,91	12,37
	30	9,00	8,50	7,73	6,96	6,19
	45	6,00	5,67	5,15	4,64	4,12
	60	4,50	4,25	3,87	3,48	3,09
	75	3,60	3,40	3,09	2,87	2,47
	91	2,97	2,80	2,55	2,29	2,04

* $\sigma_{r\,min} = 450$ N/mm² = 4500 daN/cm² (tab. 3).

Tabelul 8

Valorile analitice (teoretice) ale coeficientului global de siguranță c_c

Mărimea calculată \ Cazul (fig. 2)		a	b	c	d	e
	s, în mm	60	55	50	45	40
k_t (tab 5)		16,67	17,64	19,40	21,56	24,25
$c_{ech\,c} = \frac{\sigma^{*}_{0,2\,min}}{k_t}$, în bar		179,96	170,07	154,64	139,15	123,71
$c_c = c_{ech\,c}\,p^{-1}$, pentru presiunea interioară p, în bar, egală cu	15	12,00	11,34	10,31	9,28	8,25
	30	6,00	5,67	5,15	4,64	4,12
	45	4,00	3,78	3,44	3,09	2,75
	60	3,00	2,83	2,58	2,32	2,06
	75	2,40	2,27	2,06	1,86	1,65
	91	1,98	1,87	1,70	1,53	1,34

* $\sigma_{0,2\,min} = 300$ N/mm² = 3000 daN/cm² (tab. 3).

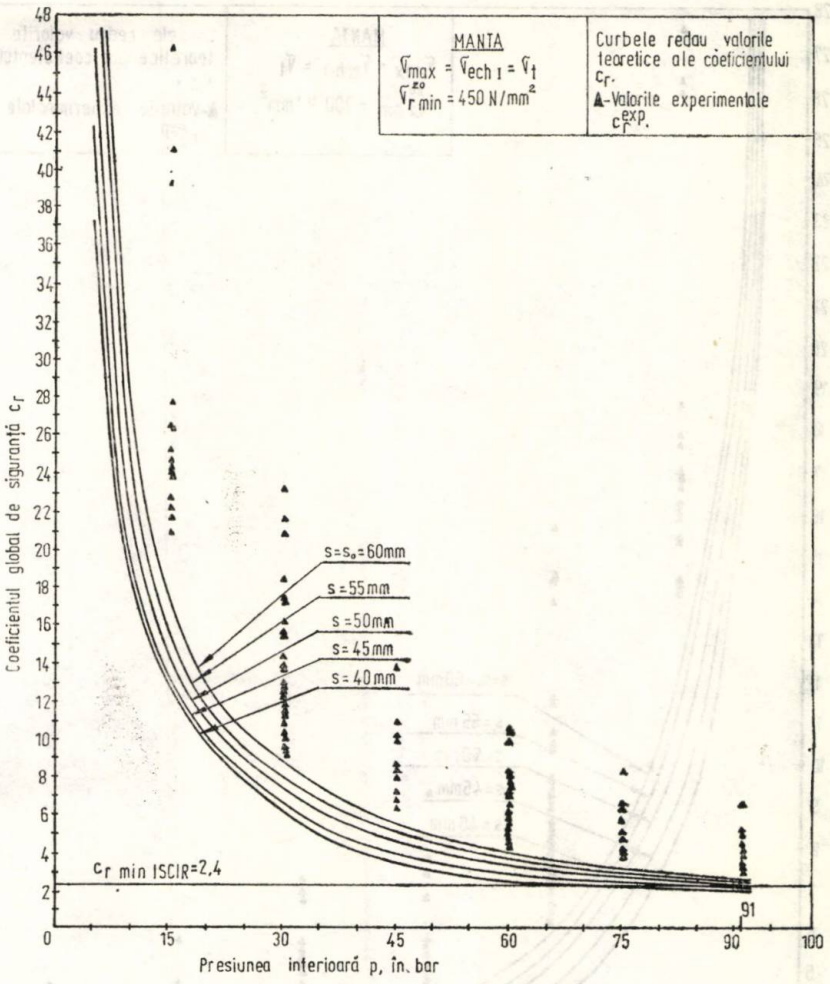


Fig. 9. — Compararea coeficienților globali de siguranță c_r (valori teoretice și experimentale).

pentru fiecare treaptă de presiune a ciclului de încercare hidraulică și pentru fiecare punct de măsurare, sînt confruntate cu cele analitice din figurile 9 și 10.

Din figurile respective rezultă că valorile reale (experimentale) ale coeficienților globali de siguranță c_r^{exp} și c_c^{exp} se înscriu — practic, în totalitate — deasupra dependențelor teoretice $c_r = c_r(p)$ și $c_c = c_c(p)$, corespunzătoare grosimii de perete $s = 60$ mm.

* Pentru solicitări excepționale (corespunzătoare cazului încercării hidraulice de presiune la rece), ISCIR admite, ca valoare maximă efectivă pentru σ_{max} (aici, $\sigma_{t\,max}$), valoarea $\sigma_{t\,max} = 0{,}8\ \sigma_{0,2}$, pentru care rezultă $c_c = 1{,}25$.

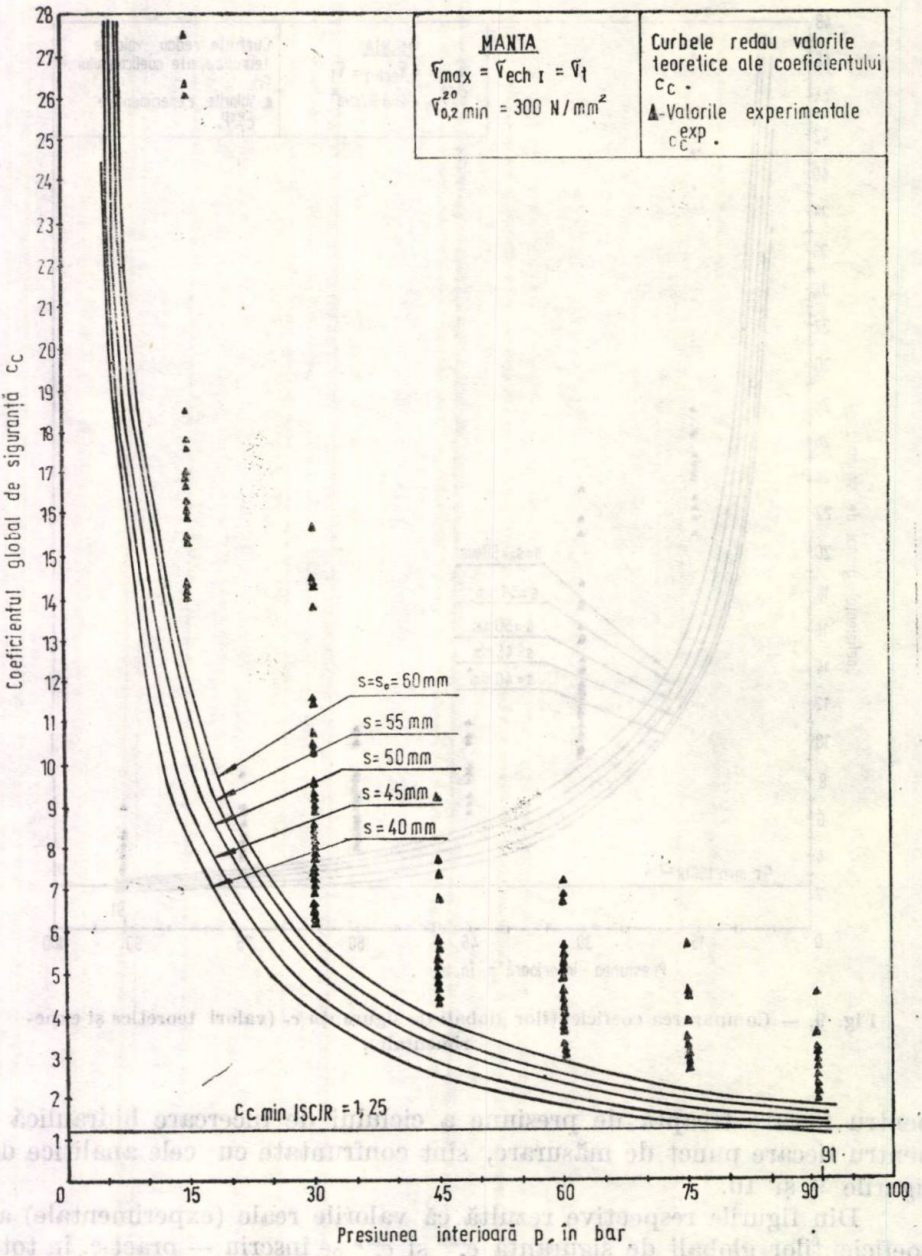


Fig. 10. — Compararea coeficienților globali de siguranță c_c (valori teoretice și experimentale).

Se precizează că cele mai mici valori experimentale ale coeficienților globali de siguranță — $c^{exp}_{r\ min} = 3,11$ (fig. 9), respectiv $c^{exp}_{c\ min} = 2,07$ (fig. 10) — sînt superioare valorii minime impuse de către ISCIR *) și recomandate

de ISO, astfel că

$$c_{r\,min}^{exp} = 3{,}11 > c_{r\,min\,ISCIR} = 2{,}4, \tag{8}$$

$$c_{c\,min}^{exp} = 2{,}07 > c_{c\,min\,ISCIR} = 1{,}25. \tag{9}$$

În condițiile în care materialul de bază (oțelul 13CrMo44), din care este executată mantaua cilindrică, se consideră ca fiind ideal plastic, se pot determina presiunile caracteristice corespunzătoare, cu formulele:

$$p_{c\,min} = k_c\ \sigma_{0,2\,min}, \tag{10}$$

$$p_{r\,min\,lim} = k_{lim}\ \sigma_{0,2\,min}, \tag{11}$$

$$p_{r\,min\,aparent} = k_r\ \sigma_{r\,min}, \tag{12}$$

în care

$$k_c = k_r = \frac{\beta^2 - 1}{\sqrt{3}\ \beta^2}, \tag{13}$$

$$k_{lim} = \frac{2}{\sqrt{3}} \ln \beta. \tag{14}$$

Pentru diferitele alternative studiate (fig. 2), în tabelul 9 sînt date valorile analitice ale coeficienților $k_{c,r,lim}$ și presiunilor caracteristice con-

Tabelul 9

Valorile calculate* (teoretice) ale coeficienților de proporționalitate $k_{c,r,lim}$ și ale presiunilor caracteristice $p_{c\,min}$, $p_{r\,min\,lim}$ și $p_{r\,min\,aparent}$

Mărimea calculată \ Cazul (fig. 2) / s, în mm		*a* 60	*b* 55	*c* 50	*d* 45	*e* 40
$\beta = D_e/D_i$		1,064	1,058	1,053	1,047	1,042
k_c		0,067	0,062	0,057	0,051	0,046
k_r		0,067	0,062	0,057	0,051	0,046
k_{lim}		0,072	0,065	0,060	0,053	0,048
Presiunea caracteristică, în bar	$p_{c\,min}$	201	186	171	153	138
	$p_{r\,min\,lim}$	216	195	180	159	144
	$p_{r\,min\,aparent}$	302	279	257	230	207

* În calculul presiunilor caracteristice s-a considerat (tab. 3):
$\sigma_{0,2\ min} = 300$ N/mm² = 3000 daN/cm²;
$\sigma_{r\ min} = 450$ N/mm² = 4500 daN/cm².

cordante, din tabelul respectiv rezultînd următoarea inegalitate evidentă :

$$p_{c\,min} < p_{r\,min\,lim} < p_{r\,min\,aparent}. \tag{15}$$

Deci, *condiția de funcționare în deplină securitate tehnică*, corespunzătoare mantalei cilindrice cu defecte a expandorului, se poate reda prin inecuația :

$$p < p_{c\,min}, \tag{16}$$

respectiv

$$p \leqslant p_{ad} = \frac{p_{c\,min}}{c_{p\,min}}. \tag{17}$$

În scopul precizării presiunilor caracteristice antecitate ale mantalei, ținîndu-se seama de rezultatele măsurărilor experimentale ale eforturilor unitare, în figura 11 sînt prezentate, pentru $s = s_0 = 60$ mm, următoarele dependențe generale dintre efortul unitar σ și presiunea interioară p :

— dependența *reală* care delimitează domeniul punctelor experimentale la partea sa superioară* ;

— dependența *reală* care delimitează domeniul punctelor experimentale la partea sa inferioară** ;

— dependența *teoretică* corespunzătoare criteriului de rezistență Galilei-Rankine (teoria I), pentru care $\sigma_{teo\,r} = \sigma_{ech\,I} = \sigma_t$.

Comparînd valorile presiunilor caracteristice $p_{c\,min}$ și $p_{r\,min\,aparent}$, cu valorile presiunilor $p_{c\,teor}$ și $p_{r\,teor\,aparent}$, puse în evidență în figura 11, rezultă cvasiidentitatea acestora. Ca urmare, valorile presiunilor caracteristice menționate, obținute din figura 11, în cazul cînd se consideră dependența teoretică corespunzătoare teoriei I, sînt — practic — egale cu cele calculate în ipoteza materialului ideal plastic.

Dacă p reprezintă presiunea interioară maximă de lucru a mantalei expandorului, corespunzătoare stării tehnice pentru care $s < s_0 = 60$ mm (respectiv $\psi < 1{,}0$), iar p_0 este presiunea interioară maximă de lucru sau de referință a aceleeași mantale, corespunzătoare pentru $s = s_0 = 60$ mm (adică pentru $\psi = 1{,}0$), atunci se poate scrie următoarea relație evidentă de dependență :

$$p = \psi p_0. \tag{18}$$

Imaginea grafică a acestei din urmă dependențe, pentru diferite presiuni caracteristice de referință, $p_0 = p_{c\,min}^{exp}$, $p_0 = p_{c\,max}^{exp}$ etc., este prezentată în figura 12, din care rezultă ușor cvasiegalitatea $p_{c\,teor} \approx p_{c\,min}$ și presiunea caracteristică $p_{c\,min}^{exp}$.

---

* S-a avut în vedere valoarea maximă experimentală a efortului unitar inelar $\sigma_{i\,max}^{exp} = 144{,}8$ N/mm².

** S-a avut în vedere valoarea minimă experimentală a efortului unitar inelar $\sigma_{i\,min}^{exp} = 64{,}8$ N/mm².

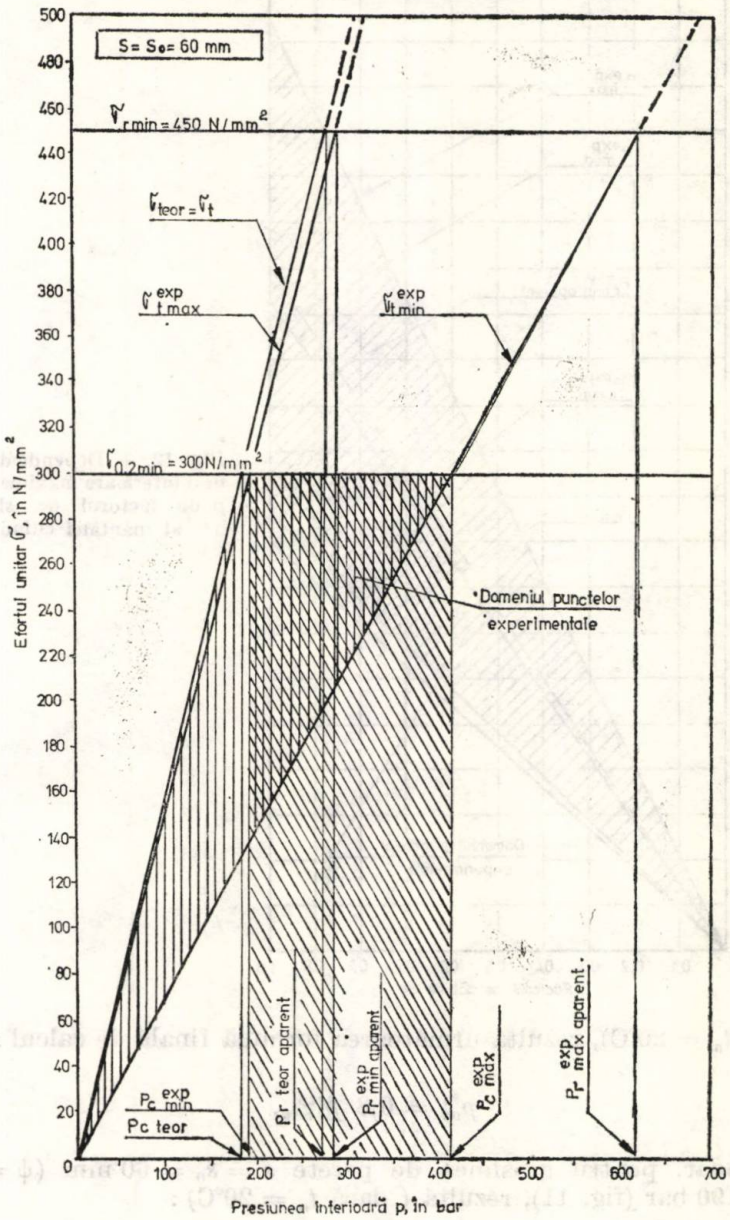


Fig. 11. — Dependența generală dintre efortul unitar σ și presiunea interioară p, în cazul mantalei cilindrice.

Considerînd un coeficient de siguranță $c_{p\,min} = 1{,}25$ (admis de către ISCIR pentru solicitări excepționale) și ținînd cont de cele expuse mai sus, pentru presiunea efectivă maxim admisibilă (în condițiile temperaturii

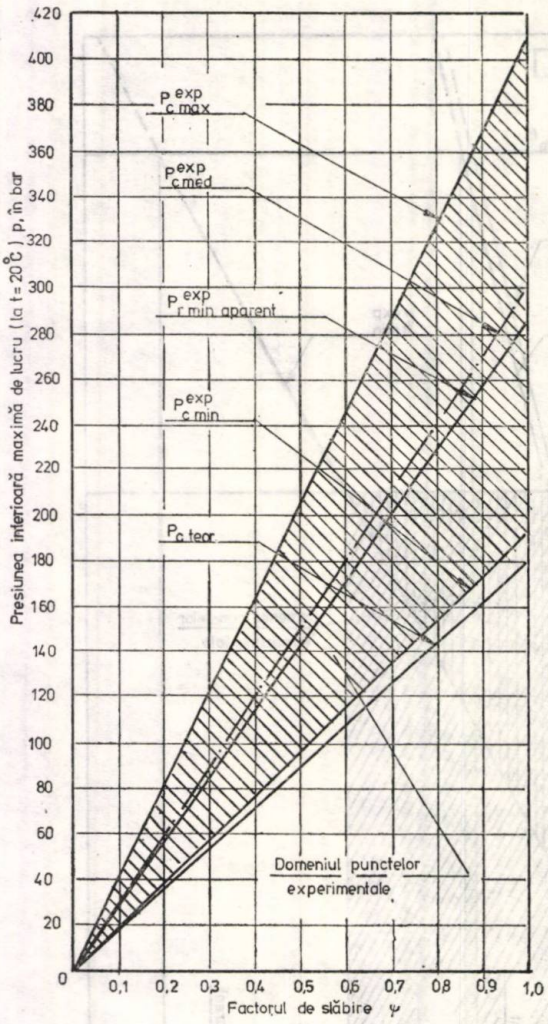


Fig. 12. — Dependența presiunii interioare maxime de lucru p de factorul de slăbire ψ al mantalei cilindrice.

normale $t_n = 20°C$), rezultă următoarea formulă finală de calcul :

$$p_{ad}^{t_n} = 0{,}8\ p_{c\,min}^{exp}. \tag{19}$$

Așadar, pentru grosimea de perete $s = s_0 = 60$ mm ($\psi = 1{,}0$) și $p_{c\,min}^{exp} = 190$ bar (fig. 11), rezultă (dacă $t_n = 20°C$) :

$$p_{ad}^{t_n} = 0{,}8\ p_{c\,min}^{exp} = 152 \text{ bar}. \tag{20}$$

Presiunea maximă admisibilă de lucru, la temperatura $t \gg t_n = 20°C$, este cea dată de formula

$$p_{ad}^{t} = p_{ad}^{t_n} \frac{\sigma_a^t}{\sigma_a^{t_n}} = p_a^{t_n} \frac{\sigma_{0,2}^t}{\sigma_{0,2}^{t_n}}. \tag{21}$$

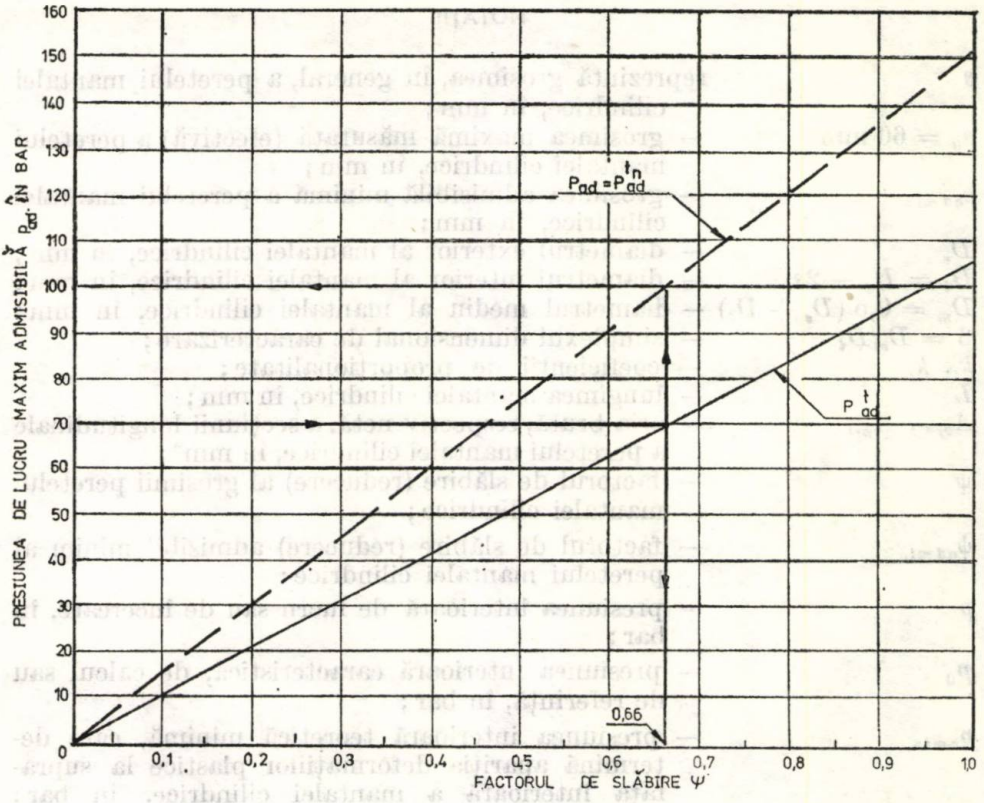


Fig. 13. — Dependența presiunii de lucru maxim admisibile p_{ad} de factorul de slăbire ψ.

Pentru $p_{ad}^{t_n} = 152$ bar și $t = 400°C$, în conformitate cu datele din tabelul 3, rezultă $p_{ad}^{400} = 106$ bar.

Dependențele presiunii de lucru maxim admisibile p_{ad}, la temperaturile standard normală t_n și de lucru $t = 400°C$, în funcție de factorul de slăbire ψ al mantalei cilindrice a expandorului, sînt cele redate în figura 13.

În baza graficului din figura 13 se poate afirma că expandorul de presiune în discuție poate funcționa în continuare, la presiunea de lucru $p_{max}^{400} = 70$ bar, în depline condiții de securitate tehnică, atîta vreme cît factorul său de slăbire ψ nu coboară valoric sub limita sa admisibilă minimă :

$$\psi_{ad\,min} = 0{,}66, \tag{22}$$

pentru care rezultă următoarea valoare restrictivă a grosimii peretelui mantalei cilindrice :

$$s_{ad\,min} = \psi_{ad\,min}\, s_0 = 39{,}6 \text{ mm}. \tag{23}$$

NOTAȚII

s — reprezintă grosimea, în general, a peretelui mantalei cilindrice, în mm;

$s_0 = 60$ mm — grosimea maximă măsurată (efectivă) a peretelui mantalei cilindrice, în mm;

$s_{ad\,min}$ — grosimea admisibilă minimă a peretelui mantalei cilindrice, în mm;

D_e — diametrul exterior al mantalei cilindrice, în mm;

$D_i = D_e - 2s$ — diametrul interior al mantalei cilindrice, în mm;

$D_m = 0{,}5\,(D_e + D_i)$ — diametrul mediu al mantalei cilindrice, în mm;

$\beta = D_e/D_i$ — simplexul dimensional de caracterizare;

k_t, k_m — coeficienții de proporționalitate;

L — lungimea mantalei cilindrice, în mm;

A_{brut}, A_{net} — aria brută, respectiv netă, a secțiunii longitudinale a peretelui mantalei cilindrice, în mm^2;

ψ — factorul de slăbire (reducere) al grosimii peretelui mantalei cilindrice;

$\psi_{ad\,min}$ — factorul de slăbire (reducere) admisibil minim al peretelui mantalei cilindrice;

p — presiunea interioară de lucru sau de încercare, în bar;

p_0 — presiunea interioară caracteristică, de calcul sau de referință, în bar;

$p_{c\,min}$ — presiunea interioară teoretică minimă, care determină apariția deformațiilor plastice la suprafața interioară a mantalei cilindrice, în bar;

$p_{c\,teor}$ — presiunea interioară teoretică pentru care efortul unitar teoretic maxim (determinat conform cu teoria I) determină apariția deformațiilor plastice la suprafața interioară a mantalei cilindrice, în bar;

$p_{c\,min}^{exp}$ — presiunea interioară minimă experimentală (în condiții de încercare hidraulică) care determină apariția deformațiilor plastice în punctul cel mai solicitat de pe suprafața exterioară a mantalei cilindrice, în bar;

$p_{c\,max}^{exp}$ — presiunea interioară maximă experimentală (în condiții de încercare hidraulică) care determină apariția deformațiilor plastice în punctul cel mai puțin solicitat de pe suprafața exterioară a mantalei cilindrice, în bar;

$p_{c\,med}^{exp} = 0{,}5(p_{c\,min}^{exp} + p_{c\,max}^{exp})$ — presiunea interioară medie experimentală (în condiții de încercare hidraulică) care determină apariția deformațiilor plastice la suprafața exterioară a mantalei cilindrice, în bar;

$p_{r\,min\,lim}$ — presiunea interioară teoretică minimă limită pe care o poate suporta mantaua cilindrică atunci

cînd întreaga secţiune a peretelui său este deformată plastic, în bar;

$p_{r\ min\ aparent}$ — presiunea interioară teoretică minimă aparentă care, aparent, determină distrugerea (ruperea) mantalei cilindrice, în bar;

$p_{r\ teor\ aparent}$ — presiunea interioară teoretică pentru care efortul unitar teoretic maxim (determinat conform cu teoria I,) aparent, determină distrugerea (ruperea) mantalei cilindrice, în bar;

$p^{exp}_{r\ min\ aparent}$ — presiunea interioară minimă aparentă experimentală (în condiţii de încercare hidraulică) care, aparent, determină distrugerea (ruperea) mantalei cilindrice în punctul cel mai solicitat de pe suprafaţa sa exterioară, în bar;

$p^{exp}_{r\ max\ aparent}$ — presiunea interioară maximă aparentă experimentală (în condiţii de încercare hidraulică) care, aparent, determină distrugerea (ruperea) mantalei cilindrice în punctul cel mai puţin solicitat de pe suprafaţa sa exterioară, în bar;

p_{ad} — presiunea de lucru maximă admisibilă la care poate funcţiona, în continuare, expandorul, în bar;

k_c, k_r, k_{lim} — coeficienţii caracteristici de proporţionalitate;

$\sigma_t = pD_m/2\,s$ — efortul unitar inelar (circumferenţial) teoretic (analitic) din peretele mantalei cilindrice, în N/mm^2;

$\sigma_m = pD_m/4s$ — efortul unitar meridian (meridional) teoretic (analitic) din peretele mantalei cilindrice, în N/mm^2;

$\sigma^{exp}_t, \sigma^{exp}_m$ — eforturile unitare inelar (circumferenţial) şi, respectiv, meridian (meridional) experimentale (în condiţii de încercare hidraulică) din peretele mantalei cilindrice, în N/mm^2;

$\sigma_a = \sigma_{0,2}/c_c$ — rezistenţa admisibilă a materialului de bază al mantalei cilindrice, corespunzătoare solicitării statice la întindere, în N/mm^2;

c_c, c_r — coeficienţii globali (unici) de siguranţă teoretici faţă de limita tehnică de curgere şi, respectiv, faţă de rezistenţa de rupere;

c^{exp}_c, c^{exp}_r — coeficienţii globali (unici) de siguranţă experimentali faţă de limita tehnică de curgere, şi, respectiv, faţă de rezistenţa de rupere;

$c_{ech\ c}, c_{ech\ r}$ — parametrii de calcul, în bar;

$c_{p\ min}$ — coeficientul global (unic) de siguranţă faţă de presiunea caracteristică $p_{c\ min}$.

Primită la redacţie la 19 decembrie 1979

STUDIUL TEORETIC ŞI EXPERIMENTAL AL VARIAŢIEI PRESIUNII ELECTROLITULUI ÎN ZONA DE LUCRU LA PRELUCRAREA ELECTROCHIMICĂ A SUPRAFEŢELOR SFERICE

de MIRCEA IVAN, IOAN CRISTIAN, VICTOR BENCHE
Universitatea din Braşov

Lucrarea prezintă studiul teoretic şi experimental al variaţiei presiunii electrolitului de-a lungul interstiţiului de lucru, la prelucrarea electrochimică a suprafeţelor sferice. În urma interpretării rezultatelor experimentale se trag concluzii utile referitoare la metodele ce trebuie folosite pentru îmbunătăţirea rugozităţii suprafeţei prelucrate precum şi la calcularea mai exactă a forţelor ce solicită maşina de prelucrat electrochimic.

1. INTRODUCERE

Prelucrarea electrochimică a metalelor necesită un electrolit care circulă cu viteză mare între piesa ce se prelucrează, legată la polul pozitiv al unui generator de curent continuu şi electrodul sculă, legat la polul negativ al aceluiaşi generator. Acest electrolit îndeplineşte următoarele funcţiuni :

— asigură desfăşurarea electrolizei (dizolvarea anodică a piesei);

— înlătură produsele de dizolvare din zona de lucru, împiedicîndu-le să se depună pe catodul sculă, şi asigură condiţii pentru dizolvarea a noi straturi de material;

— preia căldura, produsă în urma prelucrării, din zona de lucru, căci aproape întreaga energie electrică consumată la prelucrare se transformă în căldură.

Pentru buna desfăşurare a prelucrării trebuie să se asigure o curgere uniformă a electrolitului în zona de lucru şi o peliculă continuă de electrolit pe întreaga suprafaţă ce se prelucrează. Întreruperea peliculei de electrolit determină apariţia scurtcircuitului în zonele respective, căci în aceste zone piesa nu se prelucrează, iar electrodul sculă continuă să avanseze. Apariţia unor fenomene legate de curgere, de tipul vîrtejurilor, trecerea de la un regim de curgere la un alt regim de curgere şi existenţa zonelor de subpresiune provoacă o calitate scăzută a suprafeţei prelucrate.

Curgerea electrolitului în spaţiul de lucru este determinată de valoarea presiunii electrolitului la intrarea şi la ieşirea din zona de lucru şi de modul cum se repartizează această diferenţă de presiune în lungul interstiţiului.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 5, 1980, P. 761—776

Cîmpul de presiune de-a lungul interstiţiului de lucru este deosebit de important şi pentru stabilirea forţelor care apar la prelucrarea electrochimică, forţe necesare la dimensionarea maşinilor ce folosesc acest procedeu de lucru.

2. STABILIREA TIPULUI DE CURGERE A ELECTROLITULUI LA PRELUCRAREA ELECTROCHIMICĂ A SUPRAFEŢELOR COMPLEXE

Elementul prin care se poate aprecia tipul curgerii electrolitului, laminar sau turbulent, este numărul lui Reynolds $\mathcal{R}e$ definit prin relaţia :

$$\mathcal{R}e = \frac{v \cdot d_{hid}}{\nu}, \tag{1}$$

în care v este viteza medie de curgere a electrolitului, d_{hid} — diametrul hidraulic, iar ν — vîscozitatea cinematică a electrolitului.

O curgere este laminară pentru $\mathcal{R}e < \mathcal{R}e_{cr}$, turbulentă pentru $\mathcal{R}e > \mathcal{R}e_{cr}$, $\mathcal{R}e_{cr}$ fiind numărul critic care corespunde zonei de separaţie a celor două tipuri de curgere.

Reynolds şi Darcy au stabilit, pentru curgerea prin conducte, că $\mathcal{R}e_{cr}$ ia valoarea 2 000. Măsuri ulterioare, făcute de către Schiller pentru cazul conductelor netede (tehnice), au precizat pentru $\mathcal{R}e_{cr}$ valoarea 2 300.

Diametrul hidraulic se calculează cu relaţia :

$$d_{hid} = \frac{4A}{P}, \tag{2}$$

în care A este secţiunea de curgere iar P — perimetrul secţiunii de curgere.

La prelucrarea suprafeţelor complexe, de tip sferic, secţiunea de curgere este de formă inelară (fig. 1). Prin desfăşurare, această secţiune poate fi asimilată cu o suprafaţă dreptunghiulară de lăţime $2\pi R_\alpha$ şi înălţime S_α. Cu aceste date relaţia (2) devine :

$$d_{hid} = \frac{8\pi R_\alpha}{4\pi R_\alpha + 2 S_\alpha}. \tag{3}$$

Avînd în vedere că interstiţiul de lucru $S_\alpha \ll 2\pi R_\alpha$ prin neglijarea termenului $S2_\alpha$ al numitorului, rezultă expresia :

$$d_{hid} = 2 S_\alpha. \tag{4}$$

Calcularea numărului lui Reynolds la prelucrarea suprafeţelor sferice presupune şi determinarea vitezei de curgere a electrolitului în interstiţiul de lucru. Pentru aceasta se ataşează electrodului sculă sistemul de coordonate *xoy* (fig. 1).

Curba BC a electrodului sculă aparține cercului cu centrul în C_0 (R_c, R_0) și de rază R_0. Pornind de la debitul de alimentare Q, viteza medie de curgere a electrolitului se poate calcula cu relația :

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\pi\left[R_c + R_0 \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)\right] \cdot S_\alpha}. \tag{5}$$

Pe baza relațiilor (4) și (5) numărul lui Reynolds la prelucrarea suprafețelor sferice se poate calcula cu formula :

$$\mathcal{R}e = \frac{Q}{\pi R_0 \cdot \nu\left[\frac{R_c}{R_0} + \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)\right]}. \tag{6}$$

Deoarece interstițiul de lucru S_α este foarte mic în comparație cu raza R_0, unghiul C_0EG poate fi considerat de 90°, rezultînd pentru unghiul tangentei la profilul piesei următoarea expresie :

$$\alpha = 2\pi - \theta. \tag{7}$$

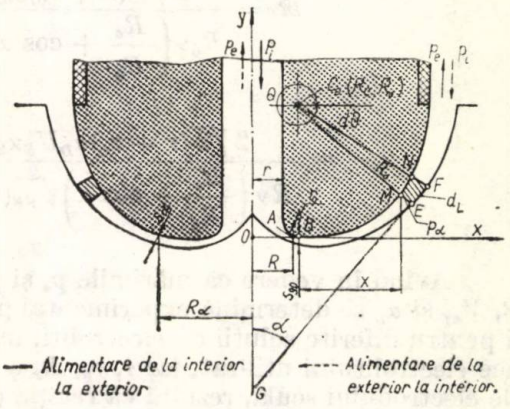


Fig. 1

Experimentările, făcute și prezentate în lucrările [1, 2], au arătat că la prelucrarea electrochimică, pentru calculul debitului de electrolit se poate utiliza relația lui Bernoulli :

$$Q = \alpha_D \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho_E}} \cdot S \cdot \sqrt{p_e - p_i}, \tag{8}$$

celula electrochimică putînd fi asimilată cu o rezistență hidraulică (s-a luat în studiu cazul alimentării cu electrolit prin interiorul electrodului).

În relația (8), α_D este un coeficient de debit ce depinde de forma secțiunii de curgere a electrolitului, ρ_E — densitatea electrolitului, S — secțiunea minimă de curgere a electrolitului, p_i — presiunea electrolitului la intrarea în zona de lucru și p_e — presiunea electrolitului la ieșirea din zona de lucru.

Pe baza notațiilor din figura 1, secțiunea de curgere S este :

$$S = 2\pi(r + r_0) \cdot S_{90} \tag{9}$$

Interstițiul frontal S_{90} se calculează cu relația [3] :

$$S_{90} = \frac{U_E \cdot \varkappa_E \cdot V_{ef}}{v_A + B}, \tag{10}$$

unde U_E este căderea de tensiune în soluția de electrolit, $\varkappa_E$ — conductibilitatea soluției la intrarea în zona de lucru, V_{ef} — volumul de material dizolvat, v_A — viteza de avans, iar B — o constantă ce depinde de materialul de prelucrat și de caracteristicile soluției de electrolit (temperatură, concentrație).

La prelucrarea cu soluții de NaCl, $B = 0$.

Cu ajutorul relațiilor (9) și (10) expresiile debitului de electrolit și numărului lui Reynolds, la prelucrarea suprafețelor sferice, devin :

$$Q = 2\pi\alpha_D S_{90}(r + r_0)\sqrt{\frac{2}{\rho_E}}\sqrt{p_i - p_e} = \frac{2\sqrt{2}\,\pi(r + r_0)\alpha_D U_E \varkappa_E V_{ef}}{\sqrt{\rho_E}(v_A + B)}\sqrt{p_i - p_e}, \tag{11}$$

$$\mathcal{R}e = \frac{2\sqrt{2}\,(r + r_0)\alpha_D S_{90}}{R_0 \nu\left(\frac{R_c}{R_0} + \cos\alpha\right)\sqrt{\rho_E}}\sqrt{p_e - p_i} = \tag{12}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,(r + r_0)\alpha_D U_E \varkappa_E V_{ef}}{R\nu\left(\frac{R_c}{R_0} + \cos\alpha\right)\sqrt{\rho_E}(v_A + B)}\sqrt{p_i - p_e}.$$

Avînd în vedere că mărimile p_e și p_i se adoptă inițial, mărimile U_E, B, V_{ef} și α_D se determină experimental pentru diferite cupluri de electrozi și pentru diferite soluții de electroliți, mărimile $\varkappa_E$, ρ_E și ν sînt caracteristice electrolitului utilizat, iar r, r_0, R_c și R_0 reprezintă mărimi geometrice ale electrodului sculă, rezultă că relația (12) permite calcularea numărului lui Reynolds pentru orice punct al profilului sferic al piesei și pentru orice viteză de lucru v_A adoptată.

Relațiile (6) și (12) arată că numărul lui Reynolds este dependent de debitul de electrolit care trece prin zona de lucru, adică de presiunea electrolitului la intrarea în zona de lucru, presiunea electrolitului la ieșire și valoarea interstițiului de lucru, respectiv mărimile care determină această valoare.

Stabilirea debitului de electrolit este o problemă deosebit de importantă pentru prelucrarea electrochimică și care în prezent se rezolvă numai prin încercări experimentale.

Această viteză de curgere determină, conform relației (1), pentru interstiții mai mici ca 0,35 mm un regim laminar de curgere, iar pentru interstiții mai mari un regim turbulent de curgere. Dar interstiții de lucru mai mici ca 0,35 mm se obțin la viteze de avans mai mari ca 1 mm/min., pentru soluțiile de NaCl și mai mari ca 0,8 mm/min., pentru soluții de $NaNO_3$. Avînd în vedere că temperatura electrolitului la ieșirea din zona de lucru este o funcție pătratică a vitezei de avans v_A [3], rezultă o puternică încălzire a electrolitului. Creșterea temperaturii peste anumite limite (90°C la prelucrarea cu soluții de NaCl și 60°C la prelucrarea cu soluții de $NaNO_3$) duce la înrăutățirea condițiilor de prelucrare, iar randamentul prelucrării tinde spre zero. Temperatura electrolitului la intrarea în zona

de lucru fiind de 25—30°C, înseamnă că este necesar un debit mult mai mare ca cel corespunzător vitezei de curgere de 4 m/s.

Concluzia finală este că debitul de electrolit se stabilește funcție de creșterea de temperatură admisă pentru electrolit, sau în funcție de precizia ce urmează să se obțină. În ambele cazuri rezultă debite mari de electrolit, curgerea situîndu-se în regim turbulent. Astfel, la prelucrarea electrochimică a oțelului 56 Ni Cr Mo V7 cu ajutorul unui electrod sferic cu caracteristicile $r_0 = 5$ mm, $R_e = 7{,}5$ mm, $R_0 = 22{,}5$ mm, cu utilizarea următorilor parametri de lucru : $v_A = 1{,}22$ mm/min și $Q = 42$ l/min ($p_e = 16$ daN/cm², $p_i = 4$ daN/cm²) s-a obținut în lungul interstițiului de lucru $\mathcal{R}e = 7\,500—30\,000$, deci curgere turbulentă.

3. CALCULUL TEORETIC AL VARIAȚIEI PRESIUNII ÎN LUNGUL INTERSTIȚIULUI DE LUCRU LA PRELUCRAREA ELECTROCHIMICĂ

Pentru obținerea relațiilor de calcul a variației presiunii în lungul interstițiului de lucru se pornește de la relația lui Bernoulli scrisă pentru lichidele reale. În plus, se va avea în vedere faptul că avem sensuri diferite de curgere la alimentarea cu electrolit prin interiorul electrodului, respectiv la alimentarea de la exteriorul electrodului.

Pentru cazul alimentării cu electrolit prin interiorul electrodului (fig. 1) relația de legătură între presiunea electrolitului p_α într-un punct de-a lungul interstițiului de lucru și presiunea p_i din interiorul electrodului poate fi scrisă sub forma :

$$p_i + \frac{\rho_E v_i^2}{2} = p_\alpha + \frac{\rho_E v_\alpha^2}{2} + \Delta p_{Loc_{\alpha-i}} + \Delta p_{L_{\alpha-i}}, \tag{13}$$

în care v_i reprezintă viteza medie a electrolitului la intrarea în zona de lucru ; v_α—viteza medie a electrolitului în punctul considerat, $\Delta p_{Loc_{\alpha-i}}$ și $\Delta p_{L_{\alpha-i}}$ — pierderile de presiune locale, respectiv liniare în zona considerată.

Din relația (13) rezultă pentru p_α următoarea expresie :

$$p_\alpha = p_i - \Delta p_{Ec_{\alpha-i}} - \Delta p_{Loc_{\alpha-i}} - \Delta p_{L_{\alpha-i}}, \tag{14}$$

unde $\Delta p_{Ec_{\alpha-i}} = \frac{\rho_E}{2}(v_\alpha^2 - v_i^2)$ reprezintă variația de presiune datorată modificării energiei cinetice a electrolitului.

Deoarece este foarte dificil să se determine pierderile locale la intrarea electrolitului în zona de lucru precum și presiunea electrolitului în această zonă se va considera ca element de referință presiunea p_e a electrolitului la ieșirea din zona de lucru. Expresia lui p_α devine :

$$p_\alpha = p_e + \Delta p_{Ec_{e-\alpha}} + \Delta p_{Loc_{e-\alpha}} + \Delta p_{L_{e-\alpha}}, \tag{15}$$

în care $\Delta p_{Loc_{e-\alpha}}$ și $\Delta p_{L_{e-\alpha}}$ reprezintă pierderile de presiune locale, respectiv liniare, între punctul considerat și punctul terminal al interstițiului, iar

$$\Delta p_{Ec_{e-\alpha}} = \frac{\rho_E}{2}(v_e^2 - v_\alpha^2).$$

Pierderile locale de presiune la ieșirea electrolitului din zona de lucru și în lungul interstițiului fiind mici se pot neglija rezultînd expresia :

$$p_\alpha \approx p_e + \Delta p_{Ec_{e-\alpha}} + \Delta p_{L_{e-\alpha}}. \tag{16}$$

Procedînd în același mod ca mai sus se obține relația de calcul a presiunii în lungul interstițiului și în cazul cînd alimentarea cu electrolit se face de la exterior la interior :

$$p_\alpha = p_i - \Delta p_{Ec_{\alpha-i}} - \Delta p_{Loc_{\alpha-i}} - \Delta p_{L_{\alpha-i}}. \tag{17}$$

De precizat că în acest caz s-a luat ca element de referință presiunea p_i a electrolitului la intrarea în zona de lucru, deci presiunea de alimentare.

Pierderile locale de presiune la intrarea electrolitului în zona de lucru și în lungul interstițiului fiind mici se pot neglija, rezultînd expresia

$$p_\alpha \approx p_i - \Delta p_{Ec_{\alpha-i}} - \Delta p_{L_{\alpha-i}}. \tag{18}$$

Datorită faptului că la prelucrarea electrochimică a suprafețelor complexe mărimea interstițiului S_α variază continuu, pentru calcularea pierderilor liniare de presiune și a variației de presiune datorate modificării energiei cinetice a electrolitului se vor utiliza relații de calcul scrise sub formă diferențială.

Pierderea liniară de presiune între punctele 1 și 2 aflate în lungul interstițiului de lucru se obține cu ajutorul relației de mai jos, scrisă sub formă diferențială :

$$\Delta p_L = \int_1^2 -\frac{\partial p_L}{\partial l}\,\mathrm{d}l = \int_1^2 -\frac{\lambda}{d_{hid}}\frac{\rho_E}{2}v^2\,\mathrm{d}l, \tag{19}$$

$\mathrm{d}l$ fiind lungimea instantanee pe care are loc curgerea. Coeficientul adimensional λ se calculează cu ajutorul unor relații empirice. Pentru curgerea în regim turbulent prin conducte netede, care este și cazul întîlnit la prelucrarea electrochimică, coeficientul λ se determină cu ajutorul relației lui Blasius :

$$\lambda = 0{,}3164\left(\frac{v \cdot d_{hid}}{\nu}\right)^{-\frac{1}{4}}, \tag{20}$$

valabilă pentru $\mathcal{R}e < (0{,}3 \ldots 3)\cdot 10^5$.

Dacă se ține cont de relațiile (4) și (20) se obține :

$$\Delta p_L = \int_1^2 -0{,}0665\,\rho_E \nu^{\frac{1}{4}} S_\alpha^{-\frac{5}{4}} v^{\frac{7}{4}}\,dl. \tag{21}$$

Dar viteza medie de curgere a electrolitului ca funcție $v(l)$ poate fi determinată cu relația :

$$v = \frac{Q}{b(l)S_\alpha(l)}, \tag{22}$$

unde b este lungimea secțiunii de curgere.

Cu această precizare se obține următoarea relație generală pentru calculul pierderilor liniare de presiune :

$$\Delta p_L = -\,0{,}0665\;\rho_E \nu^{\frac{1}{4}} Q^{\frac{7}{4}} \int_1^2 \frac{}{b^{7/4}(l)S_\alpha^3(l)}\,dL. \tag{23}$$

La prelucrarea suprafețelor sferice variația interstițiului de lucru în lungul profilului este dată de relația

$$S_\alpha = \frac{S_{90}}{\sin\alpha} = \frac{U_E \varkappa_E V_{ef}}{(v_A + B)\sin\alpha}. \tag{24}$$

Pentru a se trece de la variabila l la variabila α se pot scrie, pe baza notațiilor din figura 1, următoarele relații :

$$\alpha = 2\pi - \theta\,;\; b(l) = 2\pi(R_c + R_0\cos\alpha)\,;\; dl = -R_0\,d_\alpha\;(dl = R_0 d\theta).$$

În această situație relația (23) devine :

$$\Delta p_L = \frac{0{,}0665\;\rho_E \nu^{1/4} Q^{7/4}}{(2\pi)^{7/4} S_{90}^3 R_0^{3/4}} \int_1^2 \frac{\sin\alpha}{\left(\frac{R_c}{R_0} + \cos\alpha\right)^{7/4}}\,d\alpha. \tag{25.a}$$

Ținînd cont de expresia (11) a debitului de electrolit funcție de parametrii de lucru se obține :

$$\Delta p_L = 0{,}0665 \cdot 2^{7/8} \rho_E^{1/8} \nu^{1/4} \alpha_D^{7/4} (p_i - p_e)^{7/8} \frac{(r + r_0)^{7/4}(v_A + B)^{5/4}}{U_E^{5/4} \varkappa^{5/4} V_{ef}^{5/4} R_0^{3/4}} \cdot$$

$$\cdot \int_1^2 \frac{\sin^3\alpha}{\left(\frac{R_c}{R_0} + \cos\alpha\right)^{7/4}}\,d\alpha, \tag{25.b}$$

care reprezintă relaţia de calcul a pierderilor liniare de presiune la prelucrarea electrochimică a suprafeţelor sferice, iar integrala cuprinsă în ea se rezolvă numeric.

Pentru calculul variaţiilor de presiune Δp_{Ec} datorate modificării energiei cinetice a electrolitului se utilizează o relaţie asemănătoare relaţiei (19) :

$$\Delta p_{Ec} = \int_1^2 - \frac{\partial p_E}{\partial l}\, \mathrm{d}l = - \int_1^2 \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\rho_E}{2} v^2\right) \mathrm{d}l. \tag{26}$$

Trecînd la variabila α se obţin relaţiile finale :

$$\Delta p_{Ec} = \frac{\rho_E Q^2}{8\pi^2 S_{90}^2 R_0}\left[\left(\frac{\sin \alpha_2}{\frac{R_c}{R_0} + \cos \alpha_2}\right)^2 - \left(\frac{\sin \alpha_1}{\frac{R_c}{R_0} + \cos \alpha_1}\right)^2\right], \tag{27.a}$$

respectiv

$$\Delta p_{Ec} = \frac{\alpha_D^2 (p_i - p_e)}{2 \rho_E U_E \varkappa_E V_{ef} R_0}\left[\left(\frac{\sin \alpha_2}{\frac{R_c}{R_0} + \cos \alpha_2}\right)^2 - \left(\frac{\sin \alpha_1}{\frac{R_c}{R_0} + \cos \alpha_1}\right)^2\right]. \tag{27.b}$$

4. INSTALAŢIA DE ÎNCERCARE UTILIZATĂ

Încercările experimentale au fost făcute pe o instalaţie de prelucrat electrochimic a cărei schemă de principiu este prezentată în figura 2.

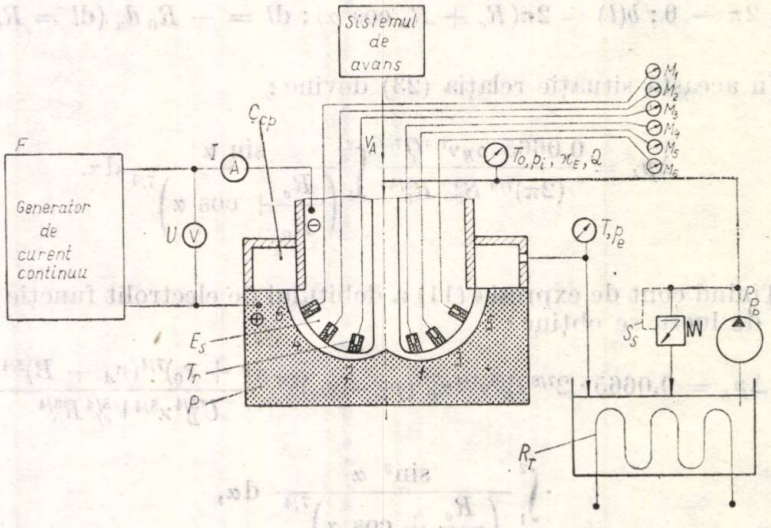


Fig. 2

Principalele părți componente ale acestei instalații sînt următoarele : generatorul de curent continuu, circuitul pentru electrolit, cuva de lucru și sistemul de avans.

Generatorul de curent continuu asigură alimentarea cu energie electrică, la un curent de maximum 6 000 A și o tensiune reglabilă în intervalul 5—20 V.

Circuitul pentru electrolit alimentează zona de lucru cu electrolit. Elementele componente, pompa de presiune P_p, supapa de siguranță, grupul de filtrare și rezervorul cu sistemul de reglare a temperaturii R_T, mențin constanți parametrii electrolitului la intrarea în zona de lucru; temperatură, presiune p_i, conductibilitate electrică $\varkappa_E$ și debitul Q.

În interiorul cuvei de lucru se fixează piesa de prelucrat P. Camera de contrapresiune Ccp permite obținerea presiunii p_e de ieșire a electrolitului din zona de lucru precum și inversarea sensului de curgere al electrolitului — de la exterior la interior.

Sistemul de avans asigură deplasarea electrodului sculă Es de formă sferică, cu o viteză de avans v_A reglabilă în intervalul 0,25 ... 4 mm/min.

Instalația experimentală este dotată cu o serie de aparate necesare pentru măsurarea parametrilor de lucru. Pentru măsurarea presiunii în lungul interstițiului de lucru pe suprafața periferică a electrodului sculă s-au practicat, în diferite puncte situate de-a lungul profilului găuri cu diametrul de 0,2 mm. La aceste puncte de măsurare s-au legat monometrele tubulare de precizie M_1 ... M_n pentru citirea presiunii.

5. FREZENTAREA ȘI INTERFRETAREA REZULTATELOR EXPERIMENTALE

Verificarea experimentală a relațiilor teoretice s-a efectuat pentru prelucrarea electrochimică a unor epruvete din oțel termorezistent 56 Ni Cr Mo V7 utilizînd o soluție de NaCl, cu concentrație de 12% și alta de $NaNO_3$, cu concentrație de 20% (s-a recurs la aceste concentrații pentru a se ajunge la aceeași conductibilitate specifică a ambelor soluții de electrolit).

Electrodul sferic folosit în experimentări a avut următoarele dimensiuni : $R_0 = 22{,}5$ mm ; $R_c = 7{,}5$ mm ; ; $r_0 = 5$ mm ; $r = 1{,}5$ mm.

Alte mărimi necesare rezolvării relațiilor (25.a) și (27.b) și care rămîn constante pentru toate încercările sînt : $T_0 = 308°K$, $U = 15$ V ; $\alpha_D = 0{,}84$; $\varkappa_E = 164$ mm.s/cm ; $\rho_E = 1\,050$ g/m^3 ; $v = 1{,}2 \cdot 10^6$ m^2/s [3].

S-au făcut prelucrări cu viteze de avans diferite (0,79 ; 1,02 ; 1,22 ; 1,45 mm/min), cu diferite presiuni de intrare (10, 14, 16 daN/cm^2) și de ieșire (2, 4, 6 daN/cm^2).

Măsurarea presiunii în lungul profilului s-a făcut în 6 puncte, decalate cu 15° unul față de celălalt. Măsurările s-au efectuat pentru două cazuri distincte : cazul existenței prelucrării și cazul lipsei prelucrării ($v_A = 0$; $U = 0$). Pentru comparație alături de rezultatele experimentale s-au trasat și curbele teoretice corespunzătoare relațiilor.

5.1. PRELUCRAREA ELECTROCHIMICĂ CU SOLUȚII DE NaCl 12%

În cazul folosirii soluției de NaCl apar următoarele mărimi: $V_{sp} = 2{,}46\ mm^3/A.min$; $U_E = 13{,}2$ V ($U = 15$ V, $\Delta U = 1{,}8$ V); $B = 0$.

5.1.1. Alimentarea cu electrolit de la exterior la interior

Rezultatele experimentale pentru cazul prelucrării cu un interstițiu frontal de 0,37 mm, obținut la viteză de avans de 1,45 mm/min, pentru două valori diferite ale presiunii de intrare a electrolitului (16 și 14 daN/cm²) și presiune de ieșire de 4 daN/cm² se prezintă în figura 3.

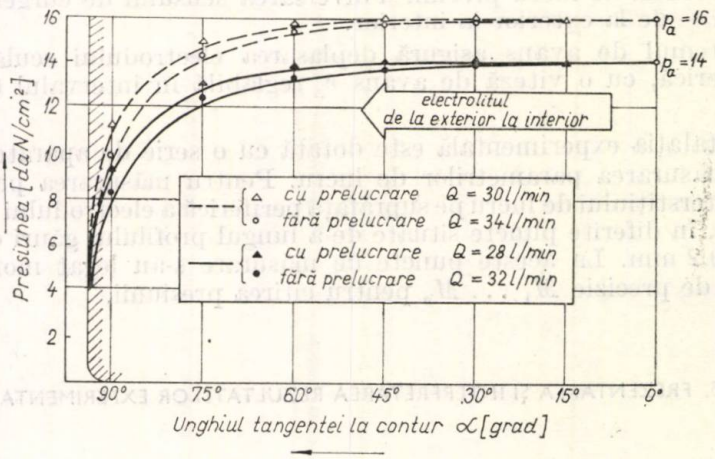


Fig. 3

Se constată o foarte mică variație a presiunii la intrarea electrolitului în zona de lucru (în domeniul $0 < \alpha < 60°$) și o foarte mare variație a presiunii în apropierea interstițiului frontal (în domeniul $60° < \alpha < 90°$). Aceasta se explică prin faptul că în zona de început a curgerii secțiunea variază lent, iar pe măsura apropierii de interstițiul frontal variația devine din ce în ce mai pronunțată. Vitezele mari de curgere din această ultimă zonă determină aici o foarte mare variație a presiunii.

Dacă se compară pierderile liniare de presiune Δp_L în lungul interstițiului de lucru cu variația de presiune Δp_{Ec}, datorate modificării energiei cinetice în lungul direcției de curgere, se constată prin efectuarea calculelor teoretice că $\Delta p_{Ec} \gg \Delta p_L$. Astfel, pentru $S_{90} = 0{,}37$ mm și $Q = 34$ l/min (corespunzător presiunilor $p_i = 16$ daN/cm² și $p_2 = 4$ daN/cm² și absenței prelucrării) corespunzătoare unghiului $\alpha = 90°$ avem $\Delta p_L = 1{,}07$ da N/cm² și $\Delta p_{Ec} = 5{,}5$ daN/cm².

Comparînd curbele trasate pentru cele două cazuri distincte, prezența și absența prelucrării, se constată o creștere a debitului în absența prelucrării, la aceeași cădere de presiune $\Delta p = p_i - p_e$. Acest lucru se dato-

rează faptului că în timpul lucrului are loc modificarea coeficientului de debit α_D prin apariția gazelor și produselor datorate prelucrării, ceea ce produce o creștere a rezistenței opuse curgerii.

Rezultatele experimentale pentru cazul prelucrării cu interstițiu frontal de 0,53 mm, obținut la prelucrarea cu viteză de avans de 1,02 mm/min, pentru două valori diferite ale presiunii de intrare a electrolitului (16 și 10 daN/cm²) și trei valori diferite ale presiunii de ieșire (6, 4 și 2 daN/cm²) se prezintă în figura 4.

Observațiile făcute anterior, pentru interstițiul frontal de 0,37 mm se mențin și aici.

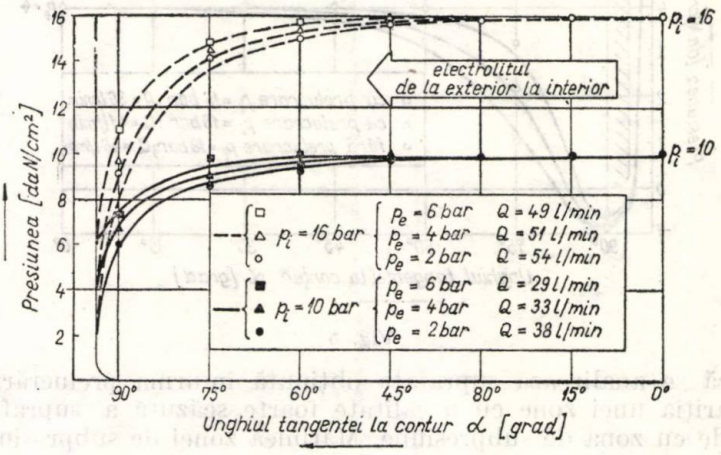


Fig. 4

Se poate concluziona că alura curbei de variație a presiunii, în domeniul $0 < \alpha < 60°$, se menține aproximativ aceeași pentru același interstițiu de lucru indiferent de valorile presiunilor de intrare și ieșire din zona de lucru. Alura curbei pe ultima porțiune $60° < \alpha < 90°$, este determinată în special de căderea de presiune $\Delta p = p_i - p_e$.

5.1.2. Alimentarea cu electrolit de la interior la exterior

Verificarea experimentală a relației (16) a fost făcută pentru cazul prelucrării cu interstițiu frontal de 0,37 mm pentru viteza de avans de 1,45 mm/min, două presiuni de intrare (18 și 16 daN/cm²) și presiunea de ieșire de 4 daN/cm².

Rezultatele experimentale sînt prezentate în figura 5.

În acest caz se constată apariția unei zone de subpresiune în apropierea interstițiului frontal. Această subpresiune se datorează vitezelor foarte mari de curgere din această zonă ca și variației foarte mari de viteză ce apare la trecerea electrolitului din orificiul central de alimentare în interstițiul frontal de lucru.

Curba de variație a presiunii prezintă patru zone distincte :
— zona orificiului de alimentare, cu descreșterea bruscă a presiunii ;
— zona de subpresiune în domeniul apropiat interstițiului frontal, (vecinătatea unghiului $\alpha = 90°$) ;
— zona de creștere rapidă a presiunii ($80° > \alpha > 60°$) ;
— zona de creștere lentă a presiunii ($0 < \alpha < 60°$) pînă la valoarea presiunii p_e reglate prin camera de contrapresiune.

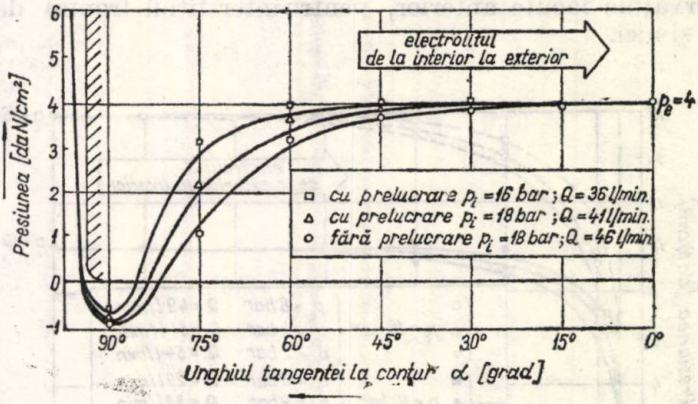


Fig. 5

Dacă se analizează suprafața obținută în urma prelucrării se constată apariția unei zone cu o calitate foarte scăzută a suprafeței care corespunde cu zona de subpresiune. Mărimea zonei de subpresiune și im-

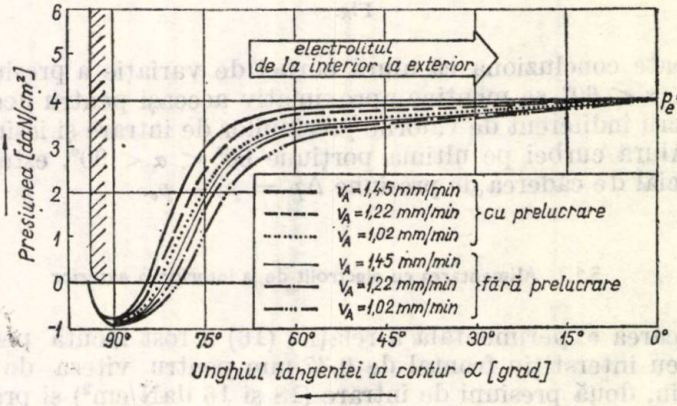


Fig. 6

plicit a suprafeței cu calitate scăzută depinde de debitul de electrolit ce trece prin zona de lucru. Cu creșterea debitului de electrolit, la același interstițiu de lucru, crește și zona de subpresiune, fapt ce se observă și din compararea curbelor trasate, la aceiași viteză de lucru, pentru cazul prezenței prelucrării, respectiv absenței prelucrării (fig. 6).

Rezultă ca metodă pentru îmbunătățirea calității suprafeței, la circulația electrolitului de la interior la exterior, micșorarea debitului de electrolit prin creșterea presiunii de ieșire sau mărirea vitezei de avans (micșorarea interstițiului).

Curbele din figura 6 au fost trasate pentru a pune în evidență modul cum influențează viteza de avans asupra variației presiunii în zona de lucru. S-a studiat prelucrarea cu trei viteze distincte (1,45 ; 1,22 ; 1,02 mm/min) cu menținerea constantă a presiunii de intrare (14 daN/cm^2) și de ieșire (4 daN/cm^2).

Micșorarea vitezei de lucru determină mărirea interstițiului frontal și deci în final mărirea debitului de electrolit. Crescînd viteza de curgere a electrolitului rezultă o creștere mai lentă a presiunii.

5.2. PRELUCRAREA ELECTROCHIMICĂ CU SOLUȚII DE $NaNO_3$ 20%

În cazul folosirii soluției de $NaNO_3$ apar următoarele mărimi: $V_{sp} = 2{,}33$ mm^3/A · min ; $U_E = 10{,}5$ V ($U = 15$ V, $\Delta U = 4{,}5$ V); $B = 0{,}19$ mm/min.

5.2.1. Alimentarea cu electrolit de la exterior la interior

Verificarea experimentală a relației (18) a fost făcută pentru cazul prelucrării cu interstițiu frontal de 0,29 mm obținut la viteza de avans de 1,22 mm/min, pentru două presiuni de intrare (16 și 14 daN/cm^2) și presiunea de ieșire de 4 daN/cm^2. Rezultatele experimentale sînt prezentate în figura 7.

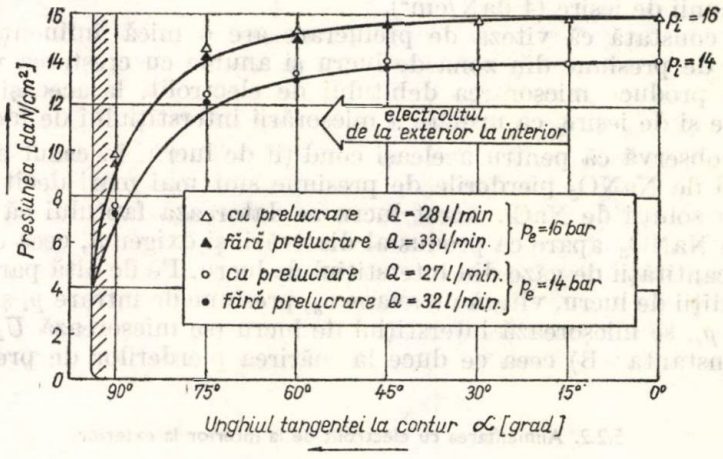
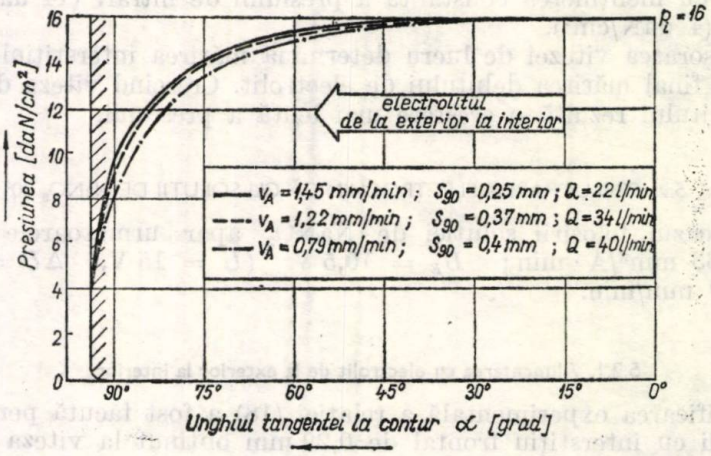


Fig. 7

Observațiile făcute la prelucrarea cu soluții de NaCl referitoare la alura curbei de variație a presiunii, la ponderea pierderilor de presiune Δp_L și Δp_{Ec}, și la influența exercitată de produsele dizolvării (pentru cazul existenței prelucrării) se mențin și la prelucrarea cu soluții de $NaNO_3$.

În vederea scoaterii în evidenţă a modului cum viteza de prelucrare influenţează variaţia presiunii în zona de lucru, precum şi a deosebirilor care există între prelucrarea cu NaCl şi cea cu $NaNO_3$ s-au făcut cercetările experimentale a căror rezultate se prezintă în figura 8.

Experimentările au fost făcute pentru prelucrarea cu trei interstiţii frontale (0,25 ; 0,37 şi 0,4 mm) obţinute la vitezele de avans de 1,45 ; 1,22



Ftg. 8

şi 0,79 mm/min, cu menţinerea constantă a presiunii de intrare (16 daN/cm²) şi a presiunii de ieşire (4 daN/cm²).

Se constată că viteza de prelucrare are o mică influenţă asupra cîmpului de presiune din zona de lucru şi anume cu creşterea vitezei de avans se produce micşorarea debitului de electrolit, la aceeaşi presiune de intrare şi de ieşire, ca urmare a micşorării interstiţiului de lucru.

Se observă că pentru aceleaşi condiţii de lucru, în cazul prelucrării cu soluţii de $NaNO_3$ pierderile de presiune sînt mai mari decît la prelucrarea cu soluţii de NaCl. Acest lucru se datorează faptului că la prelucrarea cu $NaNO_3$ apare ca produs al dizolvării şi oxigenul, ceea ce duce la mărirea cantităţii de gaze din interstiţiul de lucru. Pe de altă parte în aceleaşi condiţii de lucru, viteză de avans v_A, presiune de intrare p_i şi presiune de ieşire p_e, se micşorează interstiţiul de lucru (se micşorează U_E şi V_{ef} şi apare constanta B) ceea ce duce la mărirea pierderilor de presiune.

5.2.2. Alimentarea cu electrolit de la interior la exterior

Rezultatele experimentale pentru prelucrarea cu două interstiţii de lucru (0,25 şi 0,4), obţinute la vitezele de avans de 1,45 şi 0,79 mm/min, pentru două presiuni de intrare (16 şi 14 daN/cm²) şi presiunea de ieşire de 5 daN/cm² sînt prezentate în figura 9.

Şi în acest caz se constată apariţia zonei de subpresiune, însă de dimensiuni mai mici ca la prelucrarea cu soluţii de NaCl. Metoda de micşo-

rare a zonei de subpresiune este tot micșorarea debitului de electrolit prin mărirea vitezei de avans (micșorarea interstițiului de lucru) sau mărirea presiunii de ieșire. Influența modificării vitezei de avans este în acest caz însă mult mai mare, în așa fel încît la viteze relativ mari de prelucrare (pentru cazul studiat $v_A = 1{,}45$ mm/min) această zonă dispare complet.

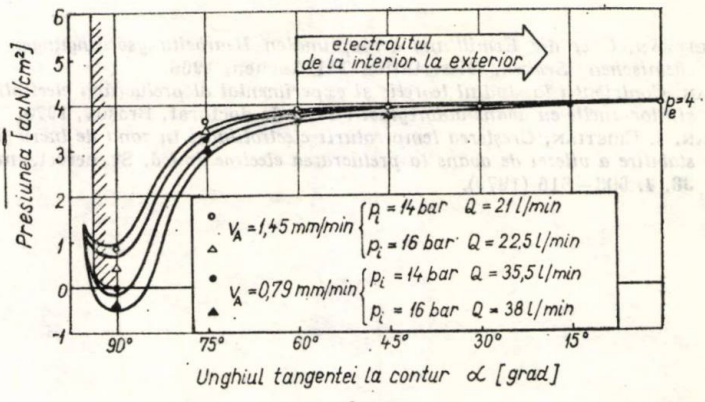


Fig. 9

Observațiile făcute la prelucrarea cu soluții de NaCl referitoare la zonele și alura curbelor de variație a presiunii în zona de lucru rămîn valabile și pentru prelucrarea cu soluții de $NaNO_3$.

6. CONCLUZII FINALE

Analizînd curbele de variație a presiunii în interstițiul de lucru, trebuie avute în vedere două aspecte : calitatea suprafeței ce se obține prin prelucrare și forțele care solicită mașina în timpul prelucrării.

Din punct de vedere al calității suprafeței prelucrate este mai avantajoasă circulația electrolitului de la exterior la interior deoarece lipsesc zonele de subpresiune cărora le corespund zone cu rugozitate scăzută. În cazul folosirii prelucrării cu circulația electrolitului de la interior la exterior, metoda pentru reducerea zonei de subpresiune, deci a zonei cu calitate scăzută a suprafeței, este de a micșora debitul de electrolit prin mărirea vitezei de lucru (scade interstițiul frontal) sau prin mărirea presiunii electrolitului la ieșirea din zona de lucru. De precizat că la prelucrarea cu soluții de $NaNO_3$ zona de subpresiune dispare la viteze mari de avans.

Din punct de vedere al mărimii forțelor care solicită mașina în timpul prelucrării este mai avantajoasă circulația electrolitului de la interior la exterior. Aceasta deoarece la introducerea electrolitului de la exterior la interior presiunea ce acționează pe cea mai mare parte a suprafeței electrodului și piesei este aproximativ presiunea de alimentare (deci de valoare

ridicată), iar la introducerea electrolitului de la interior spre exterior presiunea ce solicită mașina este presiunea de ieșire creată prin camera de contrapresiune (deci de valoare mult mai mică ca presiunea de intrare).

Primită la redacție la 22 decembrie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. H. W. HEITMAN, *Über die Ermittlung der optimalen Bearbeitungsbedingungen beim elektrochemischen Sebken*, Dissertation TH Aachen, 1966.
2. M. D. IVAN, *Contribuții la studiul teoretic și experimental al prelucrării electrolitice și al mașinilor-unelte cu avans autoreglabil*, Teză de doctorat, Brașov, 1970.
3. M. D. IVAN, I. CRISTIAN, *Creșterea temperaturii electrolitului în zona de lucru un criteriu de stabilire a vitezei de avans la prelucrarea electrochimică*, St. cercet. mec. aplicată, **38**, *4*, 603—616 (1979).

CONTRIBUȚII LA STUDIUL PRELUCRĂRII PRIN EROZIUNE ELECTROCHIMICĂ CU DEPASIVIZARE HIDRODINAMICĂ

de I. SPULBER
Ministerul Educației și Învățămîntului — CEPEIT
C. SPULBER
Întreprinderea Optică Română — IOR

După ce se face o scurtă analiză a unor rezultate obținute pînă în prezent în strunjirea electrochimică, se prezintă cîteva considerații asupra fenomenelor de natură hidrodinamică ce apar în această problemă. În cadrul acestora se caută să se stabilească factorii ce favorizează depasivizarea suprafețelor prelucrate. În continuare, se prezintă mai multe soluții de optimizare în sensul obținerii unei depasivizări cît mai accentuate, respectiv a unei prelucrări cît mai bune a suprafețelor.

1. INTRODUCERE

Se știe că, în urma procesului de electroliză, pe suprafața anodului se formează o peliculă pasivizatoare care trebuie îndepărtată continuu pentru a asigura continuitatea procesului. Unul dintre mijloacele de reducere a pasivizării îl constituie prelucrarea cu depasivizarea hidrodinamică, în care îndepărtarea peliculei de hidroxizi metalici de pe suprafața anodului se efectuează prin acțiunea mecanică a electrolitului introdus cu presiune ridicată între obiectul de prelucrat și electrod.

Există numeroase studii în care se încearcă definirea caracteristicilor de curgere, dar ipotezele destul de discutabile și simplificările utilizate reduc simțitor valoarea practică a rezultatelor [3].

În această lucrare și în cele care îi vor urma, ne propunem să eliminăm, cel puțin în parte, insuficiențele amintite mai sus, prin elaborarea unui model matematic prin care să se descrie mecanismul fenomenelor hidrodinamice de depasivizare. De asemenea, pe baza concluziilor la care se ajunge, urmărim o definire mai puțin empirică a parametrilor optimi pentru prelucrare ai curgerii electrolitului.

2. CERCETARE PRELIMINARĂ

Analizînd lucrările de specialitate, am ales parametri de lucru care oferă avantajele cele mai importante ca : rugozitate mică, viteza mare de prelucrare, siguranță sporită în exploatare.

Toți acești parametrii vor fi comparați cu rezultatele obținute cu ajutorul modulului matematic al depasivizării hidrodinamice, aceasta reprezentînd și un mijloc de verificare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 5, 1980, P. 777–787

Facem observația că, pentru început, vom studia cazul particular al strunjirii electrochimice.

Din [1], pentru obținerea unei rugozități convenabile, vom alege ca regim de lucru $U = 14$ V și $p \geqslant 20$ at, regim care asigură o rugozitate $R_z = 0{,}85/\mu m$.

După afirmațiile din [5], în cazul unui interstițiu de lucru constant, dacă se modifică debitul de electrolit se produce o schimbare, în anumite limite, a vitezei de prelucrare și a densității de curent, datorită modificării vitezei de îndepărtare a atomilor dizolvați din zona de lucru.

Dacă electrolitul este înlocuit la intervale regulate, iar gradul de impurificare este mai mic de 10%, pentru o anumită formă a secțiunii de lucru, putem adopta [5], pentru calculul mărimii interstițiului de lucru δ, formula

$$\delta = \frac{Q_E}{k_E \alpha_E L \sqrt{p_1 - p_2}}, \tag{1}$$

unde Q_E este debitul de electrolit, L — lungimea secțiunii, iar k_E și α_E sîn constante care se pot îngloba într-una singură $K = k_E \alpha_E$ astfel încît formula precedentă devine

$$\delta = \frac{Q_E}{KL\sqrt{p_1 - p_2}}. \tag{2}$$

Pentru presiuni $p_1 > 20$ at, rezultă experimental [5] un interstițiu $\delta \simeq 0{,}2$ mm.

După [10], factorii care determină pasivitatea zonei de lucru sînt temperatura ridicată și intensitatea mică a curentului electric. În principiu, trebuie deci să se adopte un debit ridicat, astfel ca efectul temperaturii să

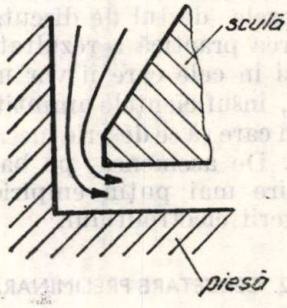


Fig. 1

fie cît mai mic. De asemenea, trebuie să se lucreze cu intensități de curent electric cît mai mari posibil, în limita siguranței și a condițiilor de rugozitate.

Pentru reducerea la minimum a erorilor de formă, în [10] se recomandă ca electrolitul să fie adus în zona de lucru printr-un ajutaj. Propunem ca forma sculei să constituie chiar acest ajutaj (fig. 1).

După afirmaţiile făcute în aceiaşi lucrare [10], se poate lucra cu un avans foarte mic ($s = 0{,}1$ mm) deoarece se produce o compensare de densitate mare a curentului (40 A/cm^2) corespunzătoare aceleiaşi înlăturări de material. Densitatea mare de curent constituie totodată un factor de activare a suprafeţei prelucrate.

După [8], pentru interstiţii foarte mici rezultă că viteza electrolitului nu trebuie să fie mai mare de 20 m/s, pentru a nu avea abateri de formă.

Interstiţiul lateral $\delta_{\Delta R}$ (fig. 2) se calculează după [3] cu formula

$$\delta_{\Delta R} = \sqrt{\delta_e(2h + 2{,}9\ \delta_e)}. \tag{3}$$

După alţi autori [7], creşterea presiunii atrage solicitări importante ale electrozilor. În general, se propune [7] următorul regim:

$$v_E = 27 \div 55 \text{ m/s}.$$

$$p_1 = 7 \div 28 \text{ at}. \tag{4}$$

3. CONSIDERAŢII TEORETICE

Urmărim să studiem repartiţia de viteze şi de presiuni în masa de fluid electrolitic în mişcare, prin asimilare cu o mişcare plană potenţială a unui fluid ideal.

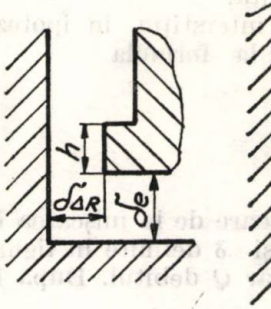


Fig. 2

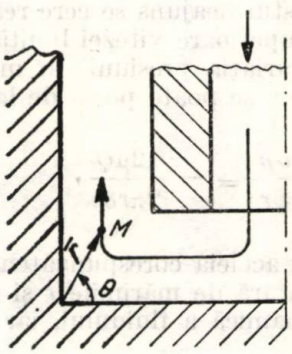


Fig. 3

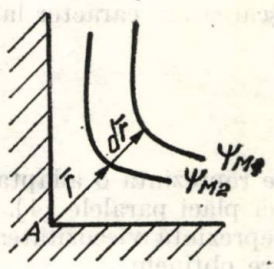


Fig. 4

Analiza este desigur limitată de posibilitatea acestei asimilări, respectiv de domeniul de valori al numărului lui Reynolds.

Să studiem în primul rînd repartiţia vitezelor, admiţînd pentru simplificare, aşa cum am mai spus, că mişcarea este plană.

Potenţialul complex al mişcării în interiorul unui diedru (fig. 4) este

$$f(z) = -Cz^2, \tag{5}$$

C fiind o constantă reală, iar $z = x + iy = re^{i\theta}$, variabila complexă. În coordonatele polare, r, θ, potențialul vitezei are expresia

$$\varphi = -Cr^2 \cos 2\theta \tag{6}$$

și componentele vitezei sînt

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -2Cr \cos 2\theta \tag{7}$$

și

$$v_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 2Cr \sin 2\theta. \tag{8}$$

Într-un punct oarecare, la distanța r de origine, viteza este

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = 2Cr \tag{9}$$

și prin urmare în zona muchiei vii O viteza electrolitului este foarte mică, tinzînd către zero. Începînd de la o anumită valoare limită, viteza devine deci insuficientă pentru a asigura eliminarea totală a materialului dizolvat din zona de lucru. Rezultă de aici creșterea gradului de impuritate și a temperaturii electrolitului. Acesta din urmă își schimbă deci conductivitatea ceea ce implică schimbarea densității de curent în toată zona amintită. Ca urmare rezultă o reducere neuniformă, deci, implicit, o precizie dimensională slabă și multe neregularități. Astfel se explică și apariția rotunjirii, în loc de o muchie, în O.

Pentru înlăturarea acestui neajuns se cere realizarea, în vecinătatea punctului O, a unei viteze superioare vitezei limită.

Pentru a determina variația presiunii în interstițiu, în ipoteza că mișcarea are caracter laminar, se poate porni de la formula

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{12\mu Q}{2\pi r \delta^3}, \tag{10}$$

care reprezintă o adaptare a aceleia corespunzătoare de la mișcarea între două plăci paralele [4]. În afară de mărimile r și δ definite în figura 5, μ reprezintă vîscozitatea dinamică a fluidului, iar Q debitul. După integrare obținem

$$p = -\frac{6\mu Q}{\pi \delta^3} \ln r + C_0, \tag{11}$$

constanta C_0 putînd fi determinată prin impunerea valorii presiunii la o anumită rază r.

În cazul în care fluidul este considerat ideal, presiunea rezultă din ecuația lui Bernoulli

$$p = C_1 - \rho \frac{v^2}{2} \tag{12}$$

sau, dacă utilizăm expresia (9) a vitezei,

$$p = C_1 - 2C^2\rho r^2. \tag{13}$$

În figura 6 este reprezentată variația presiunii între valorile extreme p_1 și p_2 din amonte, respectiv din aval.

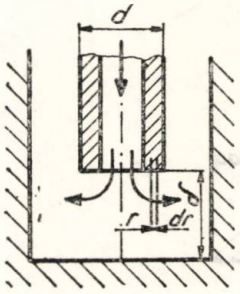


Fig. 5

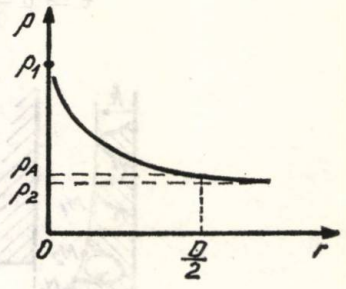


Fig. 6

Dacă presupunem că sensul de intrare al electrolitului este acela dinspre interstițiu spre diametrul interior al electrodului (sculei), presiunea de depasivizare va avea valoarea maximă posibilă.

În ipoteza sensului de mișcare propus mai sus să studiem fenomenele de la nivelul rugozităților formate de înălțime k, cu condiția $v_{M1} > v_{M2} > v_{N1} > v_{N2}$ (fig. 7), corespunzătoar cu $p_{M1} < p_{M2} < p_{N1} < p_{N2}$.

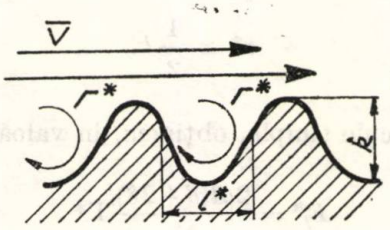


Fig. 7

Particulele de fluid din stratul din vecinătatea peretelui se vor desprinde și vor da naștere la zone de discontinuitate sub formă de mici vîrtejuri (fig. 8).

Să notăm cu Γ^* intensitatea vîrtejului ce a luat naștere între două neregularități de înălțime k. Se constată că odată cu creșterea lui Γ^* crește și forța de frecare F_f^*, realizîndu-se astfel o mai bună înlăturare a stratului pasivizator.

Forța de frecare are expresia generală :

$$F_f^* = \tau A, \tag{14}$$

în care, în cazul strunjirii electrochimice, pentru un element de rugozitate,

$$A = \pi l\,(d + 2\delta), \tag{15}$$

δ fiind interstiţiul dintre electrod şi piesă. De asemenea, efortul tangenţial τ are expresia

$$\tau = \mu \frac{\partial v_\theta}{\partial r^*}, \tag{16}$$

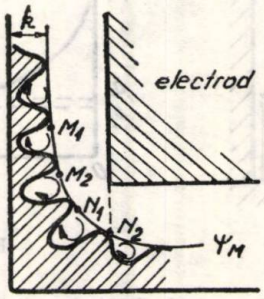


Fig. 8

în care

$$v_\theta = \frac{\Gamma^*}{2\pi\, r^*} \tag{17}$$

şi

$$r^* \simeq \frac{1}{2} k. \tag{18}$$

După cîteva calcule simple, obţinem, în valoare absolută

$$F_f^* = \frac{2\mu l(d+2\delta)}{k^2}\,\Gamma^* \tag{19}$$

şi prin urmare depasivizarea creşte proporţional direct cu Γ^*.

În conformitate cu [9], se poate pune

$$\Gamma^* \simeq \frac{k^2}{\delta_{2k}}\, v, \tag{20}$$

unde δ_{2k} este grosimea de pierdere de impuls a stratului limită în punctul de abscisă x_k. Prin urmare,

$$F_f^* = \frac{2\mu l[(d + 2\delta)}{\delta_{2k}}\, v \tag{21}$$

şi deci notînd

$$K = \frac{2\mu l[(d + 2\delta)}{\delta_{2k}}, \tag{22}$$

ajungem la expresia mai simplă

$$F_f^* = Kv. \tag{23}$$

Înlăturarea stratului pasivizator este deci direct proporţională cu viteza electrolitului, cu mărimea rugozităţii $l = l(k)$ şi implicit cu densitatea de curent. Se observă că, datorită faptului că $2\delta \ll d$, mărimea interstiţiului adoptat are o foarte mică influenţă în înlăturarea mai mult sau mai puţin rapidă a stratului pasivizator.

Se observă de asemenea că, dacă δ_{2k} scade, forţa de frecare ce favorizează depasivizarea creşte.

Pe măsura ce viteza de circulaţie a electrolitului creşte, grosimea stratului limită din interstiţiul sculă-piesă scade, ceea ce conduce la îmbunătăţirea suprafeţei prelucrate, fapt care a fost de astfel evidenţiat şi în [6].

Printr-un calcul simplu se poate pune în evidenţă valoarea optimă a vitezei; considerînd $\delta = 0{,}2$ mm în cazul curgerii laminare şi elementul de rugozitate drept un con de înălţime k şi diametrul bazei $l' = k$. Din formula

$$\tau = \mu \frac{2\Gamma^*}{\pi k^2}, \tag{24}$$

în care considerăm, pentru înlăturarea stratului pasivizator, o valoare a lui τ de 4×10^7 N/m^2, se obţine valoarea lui Γ^*, vîscozitatea μ fiind aceea a electrolitului.

Dacă mai considerăm $k = 1{,}6 \times 10^{-6}$ m, din (23) rezultă pentru viteză o valoare de circa 32 m/s. Deci, pentru a asigura înlăturarea peliculei pasivizatoare, pentru obţinerea unei rugozităţi de 1,6 μ, la un interstiţiu de 0,2 mm, este necesară o viteză a electrolitului de 32 m/s.

4. SOLUŢII DE OPTIMIZARE

În cele ce urmează, vom prezenta cîteva soluţii pentru optimizare.

4.1. *ELECTROD TRONCONIC.* Datorită formei tronconice a electrodului, ansamblul sculă-piesă capătă aspectul unui ajutaj convergent (Fig. 9).

Ca urmare a variaţiei vitezei apare o forţă care se poate calcula prin aplicarea teoremei impulsului. Găsim astfel:

$$F_h = \rho Q (v_2 - v_1), \tag{25}$$

v_1 fiind viteza medie în secţiunea de intrare şi v_2 viteza medie în secţiunea de ieşire. Această forţă are un efect similar cu acela de frecare F^* determinată anterior.

Dacă notăm cu A_1, respectiv A_2, ariile secțiunilor de intrare în ajutaj și de ieșire din acesta, cu k_r raportul lor și cu Q^* debitul corespunzător spălării unui element de rugozitate k, obținem

$$F_h^{**} = \rho Q^* v_1 (k_r - 1). \tag{26}$$

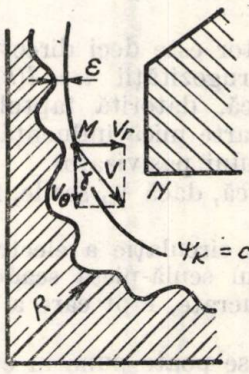


Fig. 9

Mai departe, punem

$$Q^* = v_2 A \tag{27}$$

și introducem forța de frecare

$$F_f^{**} = \tau A \tag{28}$$

echivalentă cu aceea dată de (26). Rezultă astfel

$$\tau = \rho v_1^2 k_r (k_r - 1) \tag{29}$$

dacă ținem seama de faptul că raportul vitezelor este egal cu inversul raportului ariilor secțiunilor. Prin urmare, viteza necesară v_{1nec} are expresia

$$v_{1\,nec} = \sqrt{\frac{\tau_{nec}}{\rho k_r (k_r - 1)}}, \tag{30}$$

și dacă admitem $\rho = 1000$ kg/m^3, $\tau_{nec} = 4 \times 10^7$ N/m^2, și $k_k = 20$, rezultă $v_{1\,nec} = 4{,}5$ m/s.

Dacă se cunoaște viteza de intrare în ajutaj și dimensiunile acestuia, se poate calcula debitul necesare, care este

$$Q_{nec} = v_1 A_1 = v_2 A_2 = k_r v_1 A_2. \tag{31}$$

Deoarece avem

$$A_2 = \pi d \delta_r, \tag{32}$$

δ_r fiind interstiţiul radial, rezultă

$$Q_{nec} = \pi d\, \delta_r k_r v_1. \tag{33}$$

4.2. *CURGERE ELICOIDALĂ.* În situaţiile obişnuite de circulaţie a electrolitului, viteza acestuia în zonele din jurul colţurilor piesei este foarte mică, tinzînd către zero, fapt care favorizează fenomenul de pasivizare a suprafeţei. Pentru înlăturarea acestui neajuns, se poate recurge la soluţia de a imprima electrolitului o curgere elicoidală. Astfel, dacă peste mişcarea uzuală a electrolitului se suprapune o alta similară cu aceea datorită unui vîrtej rectiliniu infinit subţire situat pe axa electrodului, va rezulta o creştere a vitezei în zonele din jurul colţurilor piesei şi prin urmare o ameliorare a depasivizării.

4.3. *CURGERE PRIN PULSAŢII.* Pentru a se realiza în zona din jurul colţului o curgere cu viteza suficient de mare pentru înlăturarea stratului pasivizator precum şi o presiune corespunzătoare, se poate recurge la o curgere pulsatorie. Electrolitul se introduce sub presiune în interstiţiul δ la intervale regulate de timp. În pauzele dintre acestea, deoarece nu există curgere, se va produce numai erodarea. În perioadele de injectare, se elimină cantitatea de metal erodată şi în acest fel posibilitatea de pasivizare a zonei de lucru scade.

Ca urmare a curgerii prin impulsuri, apare o undă de presiune, prin care se realizează o creştere Δp a presiunii precum şi o viteză corespunzătoare, care vor „rupe" pelicula pasivizatoare.

Menţionăm că este util să se lucreze în regim de impulsuri numai în perioada finală, pentru a se ajunge la realizarea muchiei vii.

Viteza de propagare a undei de presiune se determină, în interiorul electrodului, din formula lui Jukovski.

$$c = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\rho} \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{E} \frac{d - 2e}{e}}}, \tag{34}$$

în care E este modulul de elasticitate al materialului electrodului, ε-modul de elasticitate al electrolitului, d-diametrul exterior al electrodului, e-grosimea peretelui acestuia şi ρ-densitatea electrolitului.

Supraîntinderea creată rezultă că se poate calcula din formula

$$\Delta p = \rho c v, \tag{35}$$

în care viteza v poate fi reglată, în funcţie de debit sau de aria secţiunii. În felul acesta, creşterea de presiune, care este o funcţie liniară de viteza v, poate fi stabilită la o valoare optimă, ţinîndu-se seama de considerentele care limitează presiunea în cadrul procesului.

4.4. *VARIAŢIA INTERSTIŢIULUI.* Printr-o analiză simplă, se poate constata că razele de prelucrare la colţuri sînt cu atît mai mici cu cît interstiţiul de lucru este mai redus. Apare deci ideea de a se realiza autoreglarea acestui interstiţiu simultan cu aceea a parametrilor de lucru

(densitate de curent, debit, viteză, presiune), astfel ca în perioada finală a execuţiei, electrodul să avanseze de la interstiţiul δ_1 cu care s-a lucrat la un interstiţiu δ_2 cît mai mic posibil.

Dacă punem

$$\delta_1 = \delta_1(i_1, Q_1, v_1, p_1), \qquad \delta_2 = \delta_2(i_2, Q_2, v_2, p_2), \tag{36}$$

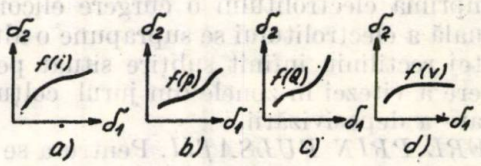


Fig. 10

trecerea de la δ_1 la δ_2 se va face prin intermediul unei funcţii $f(i, Q, v, p)$ astfel

$$\delta_2 = \delta_1 f(i, Q, v, p). \tag{37}$$

În această funcţie, unul dintre argumente poate fi efectiv variabil, celelalte trei păstrînd valori constante (fig. 10)

Modul în care poate fi determinată funcţia f va fi analizat ulterior.

5. CONCLUZII

Consideraţiile şi rezultatele precedente arată în toate cazurile influenţa avantajoasă pe care o are regimul de curgere al electrolitului o poate avea asupra calităţii suprafeţelor în general şi asupra realizării de muchii vii, în special în cazul strunjirii electrochimice.

S-a analizat în acelaţi timp şi influenţa pe care o are sensul de curgere a electrolitului. În cazul în care este necesar să se realizeze suprafeţe netede şi fără raze de curbură la intersecţii, sensul de curgere dinspre piesa de prelucrat spre electrod este mai avantajos, atunci cînd electrodul nu prezintă o astfel de geometrie, a feţelor corespondente. Au fost prezentate şi mai multe variante tehnologice, justificate în general cantitativ.

Interdependenţa parametrilor regimului hidronamic de lucru a naturii electrolitului şi a materialului de prelucrat este exprimată printr-o funcţie care poate conduce la realizarea unui optim pe baza criteriului tehnologic considerat ca principal.

Primită la redacţie la 10 februarie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. W. Degner, *Ein Beitrag zum elektrochemischen Drehen*, Conferinţa naţională de tehnologi neconvenţionale, Timişoara, 1971.
2. R. Dorneanu ş.a., *Prelucrarea chimică şi electrochimică*, I.D.T., SID 5, Bucureşti, 1975.

3. J. Dusek, *Strunjirea electrochimică. Prelucrea prin procedee speciale*, Maşini unelte. Caiet de documentare selectivă, *2* (1969).
4. J. Florea ş.a., *Probleme de mecanica fluidelor*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.
5. M. Ivan ş.a., *O nouă metodă de conducere a prelucrării electrochimice*, Conferinţa naţională de tehnologii neconvenţionale, Timişoara, 1971.
6. M. Minca, *Studiul interstiţiului sculă-piesă în funcţie de parametrii hidrodinamici ai electroliţilor sub presiune şi stratul limită necesar prelucrării electrochimice a materialelor metalice*, St. cerc. mec. apl., **33**, *3* (1974).
7. A. Nanu, *Tehnologia materialelor*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972.
8. M. Nica ş.a., *Influenţa formei electrodului sculă asupra preciziei prelucrării electrochimice*, Conferinţa naţională de tehnologii neconvenţionale, Timişoara, 1971.
9. V. Panaitescu, *Studiul acţiunii rugozităţii suprafeţei asupra tranziţiei stratului limită laminar în strat limită turbulent*, St. cerc. mec. apl., **31**, *5* (1972).
10. V. Popovici, *Cercetări asupra fenomenului electrochimic la prelucrarea prin eroziune complexă*, Conferinţa naţională de tehnologii neconvenţionale, Timişoara, 1971.

INSTALAȚIE PENTRU STUDIUL OSCILAȚIILOR NELINIARE DE RĂSUCIRE ALE ARBORILOR DREPȚI SAU COTIȚI

de P. SIMA
Universitatea Brașov
GR. COSTIN
Liceul „Tractorul", Brașov
DAN D. CĂMĂRĂSCU
I.C.I.M., Brașov

În lucrare se prezintă o instalație de concepție originală utilizabilă la studiul oscilațiilor neliniare de răsucire ale arborilor drepți sau cotiți. Ea permite determinarea experimentală a unghiului de răsucire relativă $\Psi = \theta_1 - \theta_2$ dintre doi volanți montați la extremitățile unui arbore elastic.
Instalația a fost brevetată ca invenție (brevet nr. 85.360 din 30.03.1976).

CONSIDERAȚII GENERALE

Studiul teoretic al oscilațiilor neliniare de răsucire ale arborilor cu doi sau mai mulți volanți se poate efectua înserînd între volanți cuplaje elastice neliniare [6], [7].

Cuplajele trebuie astfel construite, încît, între momentele aplicate și unghiul de deformație să existe o relație neliniară. Practic, neliniaritatea poate fi realizată prin anumite măsuri constructive. O variantă cunoscută de astfel de cuplaj este cuplajul cu arc în serpentină, care constă din două jumătăți, care au la periferie dinți, în care este introdusă o bandă de oțel (un arc în serpentină) [6]. În ipoteza rotirii relative a jumătății de cuplaj, banda se strînge pe dinți și datorită acestui fapt lungimea părții deformate a acestuia se micșorează, în timp ce rigiditatea crește în mod corespunzător.

Prin caracteristica cuplajului se înțelege dependența dintre momentul M transmis și unghiul Ψ de rotație relativă a semi-cuplajelor.

Pentru un arbore prevăzut cu un cuplaj elastic neliniar, relația dintre unghiul de rotire și momentul de răsucire poate fi exprimată sub forma

$$M = (M\,\Psi), \tag{1}$$

unde

$$\Psi = \theta_1 - \theta_2$$

este diferența dintre unghiurile de rotire ale volanților. Funcția (1) poate fi determinată cu condiția să se cunoască caracteristica cuplajului $M(\varphi)$;

pentru aceasta trebuie să se ţină seama de faptul că la unghiurile de răsucire ale cuplajului φ se adaugă unghiurile de răsucire ale arborilor, şi care sînt proporţionale cu momentele de răsucire.

DETERMINAREA EXPERIMENTALĂ A UNGHIULUI DE RĂSUCIRE RELATIVĂ

În vederea determinării exprimentale a deplasării relative Ψ dintre doi volanţi, colectivul de autori a conceput şi realizat o instalaţie pentru studiul oscilaţiilor neliniare de răsucire, care permite măsurarea mărimii :

$$\Psi = \theta_1 - \theta_2$$

pentru regimurile de funcţionare staţionar şi tranzitoriu, a cărei schemă electrică se prezintă în figura 1.

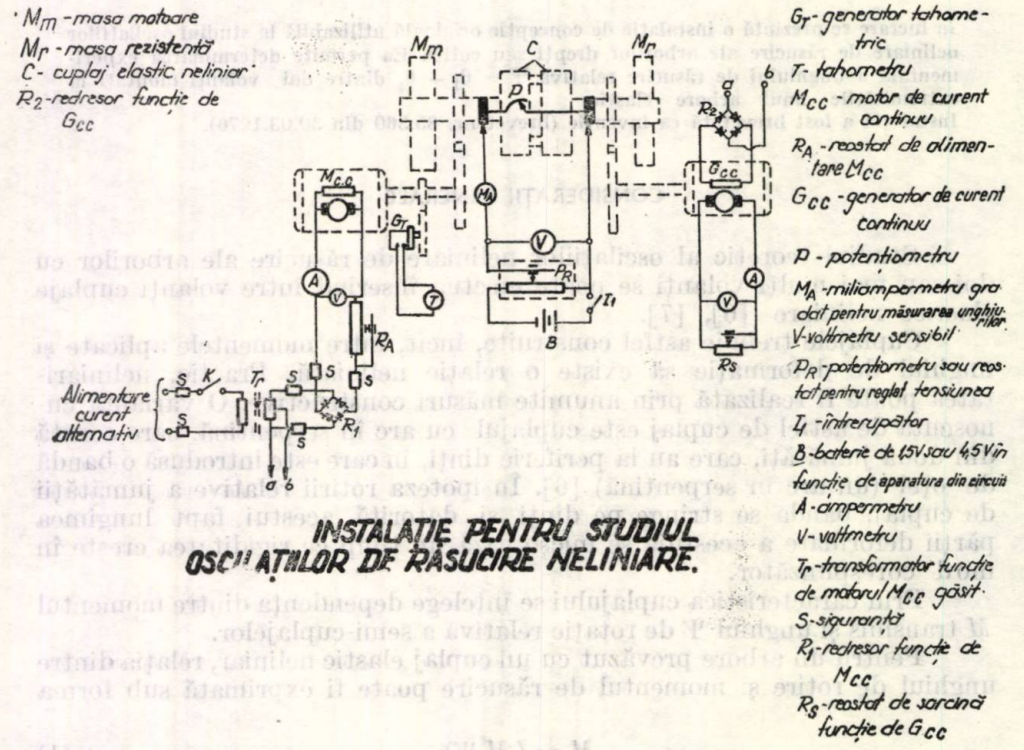


Fig. 1

În scopul reproducerii cît mai exacte a fenomenului real, instalaţia reproduce partea motoare printr-un sistem de antrenare cu un motor de curent continuu $M_{c.c}$ cu turaţia variabilă, iar partea rezistentă cu un generator de curent continu $G_{c.c}$, care debitează pe rezistenţa R_s. Datorită schemei electrice adoptate, instalaţia oferă posibilitatea variaţiei turaţiei

în mod continuu într-un domeniu larg, precum și a cuplului rezistent. Totodată instalația permite schimbarea maselor M_m și M_r, ceea ce oferă posibilitatea studiului pentru mai multe tipuri de arbori.

Determinarea puterii și a cuplului motor și rezistent se realizează prin măsurarea tensiunii și intensității în ambele circuite, precum și a vitezei de rotație prin tahometrul T.

După cum s-a arătat în prima parte a lucrării, cei doi volanți sînt legați printr-un cuplaj elastic cu caracteristică neliniară.

Instalația concepută permite măsurarea unghiului Ψ de rotație relativă dintre cei doi volanți, prin intermediul circuitului alimentat de bateria B, prin sistemul potențiometric P_R.

În circuit se găsește potențiometrul P, care are rol de traductor a variațiilor unghiulare ale curentului electric, măsurat de miliampermetrul M_A, gradat în grade. Pentru stabilirea limitelor de oscilație ale acului miliampermetrului M_A, acesta este prevăzut cu încă două ace indicatoare, acționate de acul indicatorului principal.

Limitarea curentului în circuitul de măsurare este asigurată de rezistența R_L, iar obținerea tensiunii dorite se realizează prin potențiometrul P_R și se verifică prin voltmetrul V_1. Aducerea la zero a acului indicator al miliampermetrului M_A — în stare de repaus a instalației — se face prin potențiometrul P.

Aceste măsuri asigură obținerea unei precizii ridicate de măsurare. În figura 2 se prezintă arborele instalației, cu cei doi volanți, și sistemul de măsurare a deplasării relative dintre cei doi arbori.

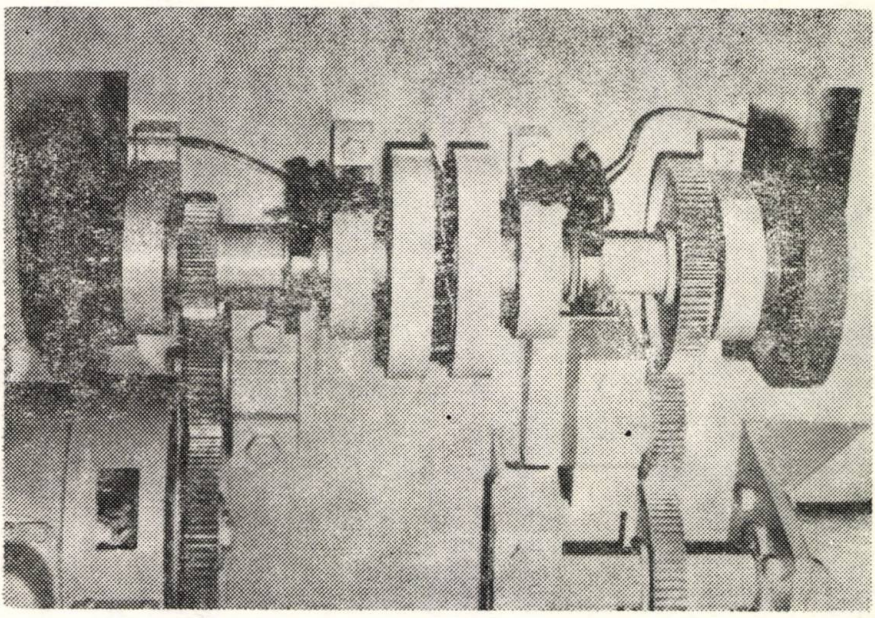


Fig. 2

Primită la redacție la 10 martie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. ANDREI RIPIANU, *Mişcările vibratorii ale arborilor drepți și cotiți*, Editura Academiei Republicii Socialiste România, București, 1969.
2. GH. BUZDUGAN, LUCIA FETCU, M. RADEŞ, *Vibrațiile sistemelor mecanice*, Edit. Academiei Republicii Socialiste România, București, 1975.
3. M. HARRIS CYRIL şi E. CREDE CHARLES, *Şocuri şi vibrații*, Edit. tehnică, București, 1968
4. F. DINCĂ, C. TEODOSIU, *Vibrații neliniare şi aleatoare*, Edit. Academiei Republicii Socialiste România, București, 1969.
5. L. HAMBURGER, GH. BUZDUGAN, *Teoria vibrațiilor şi aplicațiile ei în construcția de mașini*, Edit. tehnică, București, 1958.
6. S. D. PONOMARIOV, ş.a., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. III. Edit. tehnică, București, 1964.
7. D. P. SIMA, *Mecanica teoretică*, Litografia Universității din Braşov, 1972.
8. D. P. SIMA, *Contribuții la studiul vibrațiilor neliniare de răsucire ale arborilor cu doi volanți*. În volumul conferinței de „Vibrații în construcția de mașini", p. 533—539, Timişoara, 1975.
9. V. VÂLCOVICI, ŞT. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanica teoretică*, Edit. tehnică, București, 1963.

RECENZII

C. AVRAM, I. DEUTSCH, Al. POP, A. WEISZ-BIRNHOLZ, *Proiectarea economică a elementelor de construcții din beton armat* (Timișoara, Editura FACLA, 1979, 389 p.)

Lucrarea reprezintă un ghid practic pentru proiectarea economică a elementelor de construcții din beton armat, pe baza normelor semiprobabiliste de calcul la stări limită, în vigoare, la noi în țară, și a cercetărilor efectuate în ultimile două decenii la laboratorul de Beton armat al Institutului politehnic „Traian Vuia" din Timișoara.

Față de alte ghiduri similare din țară sau străinătate, lucrarea are un caracter inedit și original, întrucît folosește concepte moderne de optimizare a proiectării ; modelele matematice elaborate pentru calculul secțiunilor elementelor din beton armat cuprind, pe lîngă obișnuitele criterii tehnice prevăzute în norme, și criterii economice, cum ar fi prețul de cost, consumul de materiale (în special de oțel) sau consumul de energie.

Lucrarea este împărțită în patru părți.

Partea I, intitulată „Principii de proiectare economică a elementelor de construcții din beton armat", tratează într-un prim capitol principiile fundamentale privind calculul unor asemenea elemente și într-un al doilea capitol conceptele mono și multicriteriale de eficiență, cu optimizarea economică a soluțiilor.

Partea a II-a este consacrată proiectării economice la solicitări normale a elementelor supuse la încovoiere (plăci și grinzi — cap. 3), la compresiune centrică și excentrică (cap. 4), respectiv la întindere centrică și excentrică (cap. 5).

Partea a III-a tratează, în mod asemănător, proiectarea economică la solicitări tangente, și anume la forțe tăietoare (cap. 6), respectiv la torsiune și încovoiere cu torsiune (cap. 7).

Partea a IV-a, în fine, cuprinde un număr de exemple specifice de calcul, care ușurează înțelegerea problemelor teoretice și cu caracter constructiv dezvoltate în celelalte trei părți ale lucrării, cum și folosirea operativă a materialului ajutător.

Lucrarea cuprinde, într-adevăr, un bogat material ajutător, care ușurează proiectarea și mărește productivitatea muncii, și anume 104 tabele, 34 abace, 12 scheme logice și 3 programe pentru calculator ; merită a fi subliniate tabelele care minimizează secțiunea de armătură la compresiune excentrică dreaptă (soluție care reprezintă totodată și costul minim), abacele trasate la calculator pentru proiectarea rapidă la aceeași solicitare, programele pentru proiectarea automată a plăcilor și grinzilor pe criterii economice (minimizarea prețului de cost, a consumului de oțel sau a consumului de energie), programul pentru proiectarea automată a stîlpilor supuși la compresiune excentrică oblică (cu optimizarea așezării armăturii în secțiune) etc.

Lucrarea, elaborată la un înalt nivel științific și destinată cercetătorilor, proiectanților, studenților și cadrelor didactice din sectorul construcțiilor, răspunde cerințelor provocate de actuala criză de energie și materii prime și permite totodată de a construi rezistent, durabil și economic.

Ioan Filimon

RECENZII

F2557

6
TOMUL 39
noiembrie — decembrie
1980

1981 MAI 28

STUDII ȘI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Consiliul de conducere

Acad. **E. CARAFOLI**, *redactor şef*

Membri:

Acad. I. ANTON,
Acad. ŞT. BĂLAN,
Acad. D. DUMITRESCU,
Acad. D. MATEESCU,
Acad. R. VOINEA,
Prof. C. AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. R. C. BOGDAN,
Prof. D. PAVELESCU,
Prof. R PRIŞCU,
Dr. ing. V. VISARION,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Ing. I. CRIŞAN.
Prof. CHR. PELECUDI,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*
Dr. ing. C. TEODOSIU, *secretar de redacţie.*

Colegiul de redacţie

Acad. E. CARAFOLI, *redactor şef*

Membri:

Acad. I. ANTON,
Acad. D. MATEESCU,
Ing. I. CRIŞAN,
Dr. ing. D. PANTAZOPOL,
Prof. TR. DEMIAN,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacţie.*
Dr. ing. C. TEODOSIU, *secretar de redacţie.*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R S. România se vor adresa: ILEXIM, Departamentul export-import carte, Departamentul export-import presă (pentru reviste), 79 517, str. 13 Decembrie nr. 3, P. O. Box 136—137, telex 11226, Bucureşti, România. În ţară abonamentele se primesc la oficiile poştale, agenţiile poştale, factorii poştali şi difuzorii de presă din întreprinderi şi instituţii. Revistele se pot procura (direct sau prin poştă) şi prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Manuscrisele cărţile şi revistele pentru schimb, precum şi orice corespondenţă se trimit pe adresa Comitetului de redacţie ale revistei, 70 701,str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79 717, Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, Bucureşti

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 39, nr. 6 noiembrie—decembrie 1980

SUMAR

STUDII

MIHAI POPESCU, Asupra integrării analitice a ecuațiilor de mișcare a vehiculelor spațiale cu coeficienți variabili ai forțelor aerodinamice 797
CONSTANTIN GRASU, Asupra mișcării fluidelor vîscoase la numere Reynolds mici în prezența corpurilor poroase neomogene. 813
N. POSEA, AL. ANGHEL, C. KROMEK, Calculul static al sistemelor de conducte 833
IOAN JELEV, Calculul hidrodinamic al paletajului rotoric al unei turbomașini axiale bulb. II. Aplicarea practică a metodei. Rezultate experimentale 861
AL. D. STAN, S. POPOVICIU, Infiltrațiile gazeifere în imobile generate de defecțiunile conductelor 877
GHEORGHE ZĂTREANU, CONSTANTIN SILVESTRU, Echilibrajul momentelor externe care subzistă în fiecare linie de cilindri la motoarele în H 895
MIRCEA RADEȘ, Influența amortizării lagărelor asupra turațiilor critice ale rotorilor 903
A. PAVEL, Calculul serpentinelor tehnologice elicoidale 913
I. SPULBER, C. SPULBER, Motor pneumatic cu extensie și ajutaje mobile . . . 933

NOTĂ

GH. IORDACHE, M. RENERT, Puterea necesară acționării mașinii de extrudere cu disc 941

INDEX ALFABETIC 947

ASUPRA INTEGRĂRII ANALITICE A ECUAȚIILOR DE MIȘCARE A VEHICULELOR SPAȚIALE CU COEFICIENȚI VARIABILI AI FORȚELOR AERODINAMICE

de MIHAI POPESCU
Institutul național pentru creație științifică și tehnică

În lucrarea de față ne propunem să prezentăm o metodă de determinare a parametrilor de mișcare a unui vehicul spațial în cazul intrării în atmosfera Pămîntului, cînd coeficienții forțelor aerodinamice sînt funcții variabile. Tratarea este pentru cazul tridimensional, urmînd ca prin particularizare să obținem cazul plan.

CONSIDERAȚII ASUPRA DEDUCERII ECUAȚIILOR DE MIȘCARE

În cele de mai jos urmează să facem cîteva precizări asupra deducerii ecuațiilor de mișcare fără însă a le deduce efectiv. Observațiile și mai ales indicarea procedeului necesar obținerii acestora se impun pentru înțelegerea fenomenului dinamic analizat.

Pentru determinarea poziției unui punct material M în spațiu sînt necesari trei parametri, ca de exemplu coordonatele sale carteziene x, y, z. Să presupunem că x, y, z sînt funcții de variabilele independente u, v, w

$$x(u, v, w) = x_1,\ y(u, v, w) = x_2,\ z(u, v, w) = x_3, \tag{1}$$

astfel că dacă u, v, w variază în anumite intervale, punctul M de coordonate x, y, z descrie un volum D. Dacă în formulele (1) fixăm pe v și w și facem să varieze u, obținem o curbă, u = variabil, trecînd prin M. La fel, dacă fixăm pe w și u, obținem o altă curbă, v = variabil, trecînd prin M; în sfîrșit, pentru u și v ficși obținem o a treia curbă w = variabil trecînd tot prin M. Prin fiecare punct al regiunii trece deci o curbă din fiecare familie. Dacă fixăm numai unul din cele trei numere u, v, w, obținem cîte o suprafață reprezentată parametric. Suprafețele u = const., v = const., w = const., se taie, respectiv, de-a lungul curbelor w = variabil, v = variabil, u = variabil, deci au în comun cîte un punct M din regiunea D. Fiecărui sistem de valori ale lui u, v și w îi corespunde un punct M în D și reciproc, dacă transformarea (1) este biunivocă. Vom zice că u, v, w sînt coordonatele curbilinii ale lui M. Fie (u, v, w) vectorul de poziție al

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 6. 1980, P. 797–812

lui M, ale cărui proiecţii pe axe sînt date de (1). Vom putea forma şi aici vectorii

$$\mathrm{d}_1\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\,\mathrm{d}u, \quad \mathrm{d}_2\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}v, \quad \mathrm{d}_3\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\,\mathrm{d}w, \tag{2}$$

situaţi pe tangentele la curbele u = variabil, v = variabil, w = variabil. Dacă facem ca $(u, v, w) = (q_1, q_2, q_3)$ să fie funcţii de un parametru t, q fiind numite coordonate generalizate, punctul M va descrie o curbă în spaţiu, obţinută prin variaţia lui t. Elementul de arc $\mathrm{d}s$ al acestei curbe este mărimea vectorului $\mathrm{d}\vec{r}$ dat de

$$\mathrm{d}\vec{r} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\,\mathrm{d}q_i = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}_i\vec{r}. \tag{3}$$

Deducem de aici

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\vec{r}\,\mathrm{d}\vec{r} = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i\,\partial q_j}\,\mathrm{d}q_i\,\mathrm{d}q_j. \tag{4}$$

Această formă se simplifică dacă sistemul de coordonate curbilinii este un sistem triplu ortogonal. Atunci coeficienţii lui $\mathrm{d}u\mathrm{d}w$, $\mathrm{d}w\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ sînt nuli şi formula elementului de arc devine

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{3} H_i\,\mathrm{d}q_i^2, \tag{5}$$

unde H_1, H_2, H_3 numiţi coeficienţii lui Lamé sînt funcţii pozitive, definite de relaţiile

$$H_1 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_1}\right)^2,$$

$$H_2 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_2}\right)^2, \tag{6}$$

$$H_3 = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_3}\right)^2.$$

Fie vectorul de poziţie al punctului material care reprezintă vehiculul exprimat sub forma

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v, w), \tag{7}$$

unde coordonatele u, v, w sînt funcții de timp. Vom avea

$$V = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\mathrm{d}t}, \tag{8}$$

în care

$$(\vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}) = \vec{\tau}\,(\vec{\tau}_i), \quad i = 1, 2, 3,$$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, sînt versorii axelor triedului ales $Oxyz$, care coincid cu componentele $\vec{\tau}^i$ ale vectorului $\vec{\tau}$.

Rezultă :

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \vec{\tau}_i,$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \vec{\tau}_i, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial w} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial q_3} \vec{\tau}_i,$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_i} \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} \vec{i} + \frac{\partial x_2}{\partial q_i} \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} \vec{j} + \frac{\partial x_3}{\partial q_i} \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} \vec{k} \right). \tag{10}$$

Ridicînd la pătrat și ținînd seama de condițiile de ortogonalitate, obținem

$$V^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(H_i \frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t} \right)^2. \tag{11}$$

Considerăm un sistem de coordonate sferice legate de coordonatele r, φ, λ carteziene x, y, z prin relațiile

$$x = r \cos \varphi \cos \lambda, \; y = r \cos \varphi \sin \lambda, \; z = r \sin \varphi. \tag{12}$$

Mișcarea este definită cînd se cunosc funcțiile

$$q_1 = r(t), \; q_2 = \varphi(t), \; q_3 = \lambda(t). \tag{13}$$

Coordonatele generalizate $q_i \, (i = 1, \ldots 3)$ determină prin fixarea timpului t poziția punctului material. Din relațiile (12) și (13) rezultă

$$H_1 = 1, \; H_2 = r, \; H_3 = r \cos \varphi. \tag{14}$$

Fie ecuația fundamentală a dinamicii

$$m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \bar{F}. \tag{15}$$

După cum se știe, eliminarea coordonatelor carteziene x, y, z și a derivatelor lor din ecuația principiului lucrului mecanic virtual ne conduce la ecuațiile lui Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \tag{16}$$

unde T este energia cinetică dată de expresia

$$T = \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{3}(H_i q_i)^2, \tag{17}$$

Q_i ($i = 1, 2, 3$) sînt forțele generalizate.

Proiecțiile vectorului viteză V în direcțiile considerate vor fi date de

$$V_r = V\sin\theta, \quad V_\varphi = V\cos\theta\sin\eta, \quad V_\lambda = V\cos\theta\cos\eta. \tag{18}$$

Pe de altă parte punînd

$$V^2 = \sum_{i=1}^{3} V_{qi}^2. \tag{19}$$

și identificînd cu expresia pătratului vitezei în coordonatele sferice, avem

$$V_{qi} = H_i\frac{\mathrm{d}q_i}{\mathrm{d}t}. \tag{20}$$

Identificînd (18) cu (20) se obțin expresiile cinematice.

Dacă se notează cu γ unghiul de înclinare laterală sau de ruliu și se ține seama de expresiile forțelor exterioare (aerodinamice, greutate), eucuațiile de mișcare ale unui vehicul spațial în cazul intrării în atmosfera Pămîntului devin

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= -\frac{\rho}{2}SV^2C_R - mg\sin\theta,\\
-mV\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\rho}{2}SV^2C_P\cos\gamma - m\left(g - \frac{V^2}{R_0}\right)\cos\theta,\\
mV\cos\theta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} &= \frac{\rho}{2}SV^2C_P\sin\gamma - m\frac{V^2}{R_0}\operatorname{tg}\varphi\cos^2\theta\cos\eta.
\end{aligned} \tag{21}$$

La acestea se adaugă ecuațiile cinematice

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{V}{R_0} \cos\theta \sin\eta,$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{V}{R_0} \cos\theta \frac{\cos\eta}{\cos\varphi}, \tag{22}$$

$$\frac{dr}{dt} = -V \sin\theta.$$

Analizînd ecuațiile de mișcare (21), se observă că prin particularizarea $\eta = \gamma = \varphi = 0$ se obțin ecuațiile intrării în cazul bidimensional.

INTEGRAREA ANALITICĂ A ECUAȚIILOR DE MIȘCARE

În studiile efectuate anterior s-a considerat că raportul dintre coeficienții forțelor de portanță și rezistență este constant. Aceasta este o ipoteză unanim acceptată care micșorează dificultatea rezolvării problemelor de optimizări. Trebuie să specificăm că un interes deosebit prezintă cazul mai apropiat de fenomenul real în care coeficienții forțelor de portanță și de rezistență sînt funcții de viteză și de altitudinea de zbor.

Ecuațiile care guvernează intrarea vehiculului considerat ca un punct material în atmosfera irotațională, cu coeficenții portanță și rezistență dați arbitrar ca funcții de viteză și altitudine, se rezolvă folosind seriile.

Singura presupunere făcută în acest caz este că variația altitudinii comparativ cu raza planetei este mică.

Din studiile efectuate s-a văzut că pentru portanță și rezistență la înaintare constantă, soluția nu verifică cu exactitate rezultatele numerice. În literatură există numeroase publicații privind aproximarea soluțiilor cu acelea corespunzătoare unor ecuații ce guvernează intrarea vehiculelor cu coeficienți aerodinamici constanți.

Wang și Chu au studiat cazul portanței variabile unde unghiul traiectoriei de zbor este mic și coeficientul de portanță este reprezentat de $C_P = C_{P_E} - \zeta X^n$, unde C_{P_E} este coeficientul de portanță la intrare, și n sînt cei doi parametri de portanță și X este o mărime proporțională cu densitatea atmosferică. Problema integrării se abordează presupunînd că soluția pentru traiectoria de zbor dată de unghiul θ se poate dezvolta în serii de forma

$$\theta = \sum a_{ij} x^i (\log X/X_E)^i. \tag{23}$$

Aceste soluții se obțin folosind următoarele ipoteze:

— unghiul traiectoriei este mic;

— coeficientul de portanță presupus de o formă specială variază numai cu altitudinea;

— se neglijează parametrul de portanță n care ar complica foarte mult problema.

În cele ce urmează ne propunem să integrăm ecuațiile de mișcare ale vehiculelor, care reprezintă ecuațiile intrării în cazul tridimensional, urmînd ca prin particularizare să se obțină soluțiile și pentru cazul bidimensional. Obținerea soluțiilor analitice va fi posibilă folosind dezvoltarea în serie după un parametru mic care va permite neglijarea termenilor de ordin superior.

Așadar, coeficienții forțelor aerodinamice vor fi funcții de variabilele V, r, viteză și altitudinea vehiculelor:

$$C_R = C_R(V, r),$$
$$C_P = C_P(V, r). \tag{24}$$

Vom nota cu $\bar{t}, \bar{V}, \bar{r}$, timpul, viteza și altitudinea de zbor pentru a le deosebi de variabilele adimensionale t, V, r, variabile în funcție de care se scrie sistemul ecuațiilor de mișcare. Reluăm sistemul ecuațiilor de mișcare:

$$m\frac{d\bar{V}}{d\bar{t}} = -\frac{\bar{\rho}}{2} S\bar{V}^2 C_R + mg\sin\theta,$$

$$-m\bar{v}\frac{d\theta}{dt} = \frac{\rho}{2} s\bar{v}^2 C_P\cos\gamma - m\left(g - \frac{\bar{V}^2}{\bar{R}+\bar{r}}\right)\cos\theta,$$

$$\cos\theta\frac{d\eta}{dt} = \frac{\bar{\rho}}{2} S\bar{V}^2 C_P\sin\gamma - \frac{\bar{V}}{\bar{R}+\bar{r}}\operatorname{tg}\varphi\cos^2\theta\cos\eta, \tag{25}$$

$$\frac{d\varphi}{d\bar{t}} = \frac{\bar{V}}{\bar{R}+\bar{r}}\cos\theta\sin\eta,$$

$$\frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} = -\bar{V}\sin\theta,$$

$$\frac{d\lambda}{d\bar{t}} = \frac{\bar{V}}{\bar{R}+\bar{r}}\cos\theta\frac{\cos\eta}{\cos\eta}.$$

Dacă se fac adimensionălizările:

$$r = \frac{\bar{r}}{\bar{R}}, \quad t = \frac{\bar{t}}{\bar{T}}, \quad v = \frac{\bar{T}\bar{V}}{\bar{R}}, \quad \rho = \frac{S\bar{R}\bar{\rho}}{m}, \quad \bar{T} = \left(\frac{R^3}{fM}\right)^{\frac{1}{3}}, \tag{26}$$

și ținînd seama că $g = f\dfrac{M}{\bar{R}+\bar{r}}$, unde f este constanta gravitației universale, M masa Pămîntului, sistemul (25) se scrie sub formă adimensională :

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{2}C_R(V,r)\,\rho V^2 + \frac{\sin\theta}{(1+r)^2},$$

$$-V\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}C_P(V,r)\,\rho V^2\cos\gamma - \frac{\cos\theta}{(1+r)^2} - \frac{V^2\cos\theta}{1+r},$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{2}\rho V C_P(V,r)\frac{\sin\gamma}{\cos\theta} - V\,\mathrm{tg}\,\varphi\cos\theta\cos\eta, \tag{27}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = V\cos\theta\sin\eta,$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = V\cos\theta\frac{\cos\eta}{\cos\varphi},$$

$$\frac{dr}{dt} = -V\sin\theta,$$

sau, trecînd la variabila r,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = -V\sin\theta\frac{dV}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(\frac{V^2}{2}\right)\sin\theta = -\frac{1}{2}\frac{dV^2}{dr}\sin\theta.$$

Ținînd seama de aproximația $1+r\approx 1$, sistemul (27) devine

$$\frac{dV^2}{dr} - \frac{C_R(V,r)}{\sin\theta}\rho V^2 + 2 = 0,$$

$$\frac{d(\cos\theta)}{dr} + \left(1-\frac{1}{V^2}\right)\cos\theta + \frac{1}{2}C_P(V,r)\,\rho\cos\gamma = 0,$$

$$\frac{d\eta}{dr} = -\frac{1}{2}\rho C_P\frac{\sin\gamma}{\cos\theta\sin\theta} + \mathrm{tg}\,\varphi\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\eta, \tag{28}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\eta,$$

$$\frac{d\lambda}{dr} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\cos\eta}{\cos\varphi}.$$

Din legea de variație adoptată pentru densitatea atmosferică

$$\rho = \rho_0 e^{-\beta r},$$

rezultă

$$\log \frac{\rho}{\rho_0} = -(\beta R)\, r.$$

Notînd $\varepsilon = \frac{1}{\beta R}$, care datorită valorii sale foarte mici poate fi luat drept parametru mic, se obține

$$\frac{dV^2}{d\left(\log \frac{\rho}{\rho_0}\right)} - \varepsilon[2 - C_R(V, \rho)\rho V^2 |\sin\theta] = 0,$$

$$\frac{d(\cos\theta)}{d\left(\log \frac{\rho}{\rho_0}\right)} - \varepsilon\left[\left(1 - \frac{1}{V^2}\right)\cos\theta + C_P(V,\rho)\cos\gamma\,\frac{\rho}{2}\right] = 0,$$

$$\frac{d\eta}{d\left(\log \frac{\rho}{\rho_0}\right)} - \varepsilon\left(\frac{\rho}{2}\,\frac{C_P \sin\gamma}{\cos\theta \sin\theta} - \operatorname{tg}\varphi\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cos\eta\right) = 0, \qquad (29)$$

$$\frac{d\varphi}{d\left(\log \frac{\rho}{\rho_0}\right)} - \varepsilon\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\eta = 0,$$

$$\frac{d\lambda}{d\left(\log \frac{\rho}{\rho_0}\right)} - \varepsilon\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\frac{\cos\eta}{\cos\varphi} = 0.$$

Întrucît $d\left(\log \frac{\rho}{\rho_0}\right) = d(\log\rho)$ sistemul (29) poate fi scris sub forma

$$\frac{dV^2}{d\log\rho} - \varepsilon\left[2 - \frac{C_R(V,\rho)\rho V^2}{\sin\theta}\right] = 0,$$

$$\frac{d(\cos\theta)}{d\log\rho} - \varepsilon\left[\left(1 - \frac{1}{V^2}\right)\cos\theta + C_P(V,\rho)\,\frac{\rho}{2}\cos\gamma\right] = 0,$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{\cos\eta}\right)}{d\log\rho} - \varepsilon\sqrt{\left(\frac{1}{\cos\eta}\right)^2 - 1}\left[\frac{\rho}{2}\,\frac{C_P(V,\rho)\sin\gamma}{\sin\theta\cos\theta}\left(\frac{1}{\cos\eta}\right) - \operatorname{tg}\varphi\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right] = 0, \qquad (30)$$

$$\frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{d\log\rho} - \varepsilon\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin\eta\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi) = 0,$$

$$\frac{d\lambda}{d\log\rho} - \varepsilon\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\cos\eta}{\cos\varphi} = 0.$$

Considerăm primele două ecuații ale sistemului pe care le vom scrie sub forma

$$\left(\frac{dV^2}{d\log\rho} - 2\varepsilon\right)\sin\theta = -\varepsilon C_R(V\cdot\rho)\rho v^2$$

sau ridicînd la pătrat

$$\left(\frac{dV^2}{d\log\rho} - 2\varepsilon\right)(1-\cos^2\theta) = \varepsilon^2[C_R(V,\rho)\,\rho V^2]. \tag{31}$$

Cea de-a doua ecuație se scrie sub o formă convenabilă

$$V^2\left[\frac{d(\cos\theta)}{d\log\rho} - \varepsilon\cos\theta - \varepsilon C_P(V,\rho)\frac{\rho}{2}\cos\gamma\right] = -\varepsilon\cos\theta. \tag{32}$$

Întrucît ε este un parametru mic, vom folosi dezvoltarea în serie de soluții sub forma

$$V = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \ldots, \tag{33}$$

$$\cos\theta = g_0 + \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \varepsilon^3 g_3 + \ldots,$$

care vor trebui să satisfacă condițiile inițiale

$$V(\rho_i) = V_i, \tag{34}$$

$$\cos(\rho_i) = \cos\theta_i$$

sau introducînd în (33), se obține

$$\begin{aligned} f_0(\rho_i) &= V_i, \qquad f_n(\rho_i) = 0, \quad n\neq 0, \\ g_0(\rho_i) &= \cos\theta_i, \quad g_n(\rho_i) = 0, \quad n\neq 0, \end{aligned} \tag{35}$$

astfel încît coeficienții aerodinamici devin

$$\begin{aligned} C_R(V,\rho) &= C_R[f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \ldots, \rho], \\ C_P(V,\rho) &= C_P[f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \ldots, \rho] \end{aligned} \tag{36}$$

sau, dezvoltînd în serie Taylor, avem

$$C_R[V, \rho] = C_R(f_0, \rho) + \varepsilon \frac{\partial C_R}{\partial V}(f_0, \rho) f_1 +$$

$$+ \varepsilon^2 \left[\frac{\partial C_R}{\partial V}(f_0, \rho) f_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_R}{\partial V^2}(f_0, \rho) f_1^2 \right] + \dots,$$

$$C_P[V, \rho] = C_P(f_0, \rho) + \varepsilon \frac{\partial C_P}{\partial V}(f_0, \rho) f_1 + \tag{37}$$

$$+ \varepsilon^2 \left[\frac{\partial C_P}{\partial V}(f_0, \rho) f_2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_P}{\partial V^2}(f_0, \rho) f_1^2 \right] + \dots .$$

Folosind ecuația (32) din identificare, rezultă că termenii ce nu conțin pe ε sînt nuli, ceea ce revine la a fi satisfăcute condițiile

$$(1 - g_0^2) \left(\frac{\mathrm{d} f_0^2}{\mathrm{d} \log \rho} \right) = 0,$$

$$f_0 \frac{\mathrm{d} g_0}{\mathrm{d} \log \rho} = 0. \tag{38}$$

Din prima ecuație a lui (30) se deduce

$$-2 \sin \theta_i \left[V \frac{\mathrm{d} f_1}{\mathrm{d} \log \rho} - 1 \right] = C_R(V, \rho) \rho V^2. \tag{39}$$

Dar

$$V = V_i + O(\varepsilon^n), \quad n \geqslant 1,$$

$$\cos \theta = \cos \theta_i + O(\varepsilon^n) \quad n \geqslant 1. \tag{40}$$

Ecuația (39) devine

$$-2 \sin \theta_i \left[V_i \frac{\mathrm{d} f_1}{\mathrm{d} \log \rho} - 1 \right] = C_R(V_i, \rho) \rho V_i^2. \tag{41}$$

Din ecuația (32) se obține

$$V_i^2 \left[\frac{\mathrm{d} g_1}{\mathrm{d} \log \rho} - \cos \theta_i - V_i C_P(i, \rho) \frac{\rho}{2} \cos \gamma \right] = - \cos \theta_i. \tag{42}$$

Efectuînd calculele găsim

$$f_1 = \frac{1}{V_i}\log\frac{\rho}{\rho_i} - \frac{V_i}{2\sin\theta_i}\int_{\rho_i}^{\rho}\rho\, C_R(V_i,\rho)\,d\rho,$$

$$g_1 = \left(1-\frac{1}{V_i^2}\right)\cos\theta_i\log\left(\frac{\rho}{\rho_i}\right)+\frac{1}{2}\int_{\rho_i}^{\rho} C_P(V_i,\rho)\cos\gamma\,d\rho. \tag{43}$$

Din relațiile

$$\frac{df_2}{d\log\rho} = -\frac{1}{2\sin\theta_i}\left[2\sin\theta_i+\frac{\cos\theta_i}{\sin^2\theta_i}C_R\rho V_i^3+\right.$$

$$\left.+\left(C_R\rho V_i^2+\frac{\partial C_R}{\partial v}\rho V_i^3\right)f_1\right], \tag{44}$$

$$\frac{dg_2}{d\log\rho} = g_1+\frac{\partial C_P}{\partial v}\frac{\rho}{2}f_1\cos\gamma-\frac{2}{V_i}f_1\left[\frac{dg_1}{d\log\rho}-\right.$$

$$\left.-\cos\theta_i-\frac{\rho}{2}C_P\cos\gamma\right]-\frac{g_1}{V_i^2},$$

se obțin următoarele expresii:

$$f_2 = -\log\frac{\rho}{\rho_i}-\frac{\cos\theta_i}{\sin^3\theta_i}V_i^3\int_{\rho_i}^{\rho}C_R(V_i,\rho)d\rho+V_i\int_{\rho_i}^{\rho}C_R(V_i,\rho)\log\frac{\rho}{\rho_i}-$$

$$-\frac{V_i^3}{\sin\theta_i}\int_{\rho_i}^{\rho}C_R d\rho\int_{\rho_i}^{\rho}\rho C_R(V_i,\rho)\,d\rho-V_i^2\int_{\rho_i}^{\rho}\frac{\partial C_R}{\partial V}\log\frac{\rho}{\rho_i}d\rho-$$

$$-\frac{V_i^2}{2\sin\theta_i}\int_{\rho_i}^{\rho}\frac{\partial C_R}{\partial V}d\rho\int_{\rho_i}^{\rho}\rho C_R(V_i,\rho)\,d\rho, \tag{45}$$

$$g_2 = \left[\left(1-\frac{1}{V_i^2}\right)\cos\theta_i+\frac{2}{V_i^4}\cos\theta_i\right]\int_{\rho_i}^{\rho}\log\frac{\rho}{\rho_i}d\rho+$$

$$+\frac{\cos\gamma}{2V_i}\int_{\rho_i}^{\rho}\frac{\partial C_P(V_i,\rho)}{\partial V}d\rho+\frac{\cos\gamma}{V_i^2}\int_{\rho_i}^{\rho}C_P(V_i,\rho)\log\frac{\rho}{\rho_i}d\rho+$$

$$+\frac{\cos\gamma}{2}\int_{\rho_i}^{\rho}d\rho\int_{\rho_i}^{\rho}\rho C_P(V_i,\rho)\cos\gamma\,d\rho-$$

$$-\frac{V_i\cos\gamma}{2\sin\theta_i}\int_{\rho_i}^{\rho}\frac{\partial C_P}{\partial V}d\rho\int_{\rho_i}^{\rho}\rho C_P(V_i,\rho)\,d\rho-\frac{1}{\sin\theta_i}\left(\frac{\cos\theta_i}{V_i^2}-\cos\gamma\right)\int_{\rho_i}^{\rho}\rho C_P\,d\rho.$$

Analizînd sistemul (30) se observă că pentru valori mici ale lui φ și valori mari apropiate de $\frac{\pi}{2}$ ale lui η termenul $\operatorname{tg}\varphi\cos\eta$ poate fi neglijat în comparație cu $\frac{\rho}{2}C_P(V,\rho)\sin\gamma\left(\frac{1}{\cos\eta}\right)$ astfel încît ridicînd la pătrat ambii membri ai sistemului se va obține următorul sistem, care, de asemenea, va fi rezolvat prin dezvoltări în serie după parametrul mic ε

$$4\sin^2\theta\cos^2\theta\left[\frac{d\left(\frac{1}{\cos\eta}\right)}{d\log\rho}\right]^2=\varepsilon^2\left[\left(\frac{1}{\cos\eta}\right)^2-1\right]\rho^2C_P^2(V,\rho)\left(\frac{1}{\cos\eta}\right)^2\sin^2\gamma,$$

$$\left(\frac{1}{\cos\eta}\right)^2\sin^2\theta\left[\frac{d(\operatorname{tg}\varphi)}{d\log\rho}\right]^2=\varepsilon^2\cos^2\theta\left[\left(\frac{1}{\cos\eta}\right)^2-1\right](1+\operatorname{tg}^2\varphi)^2, \tag{46}$$

$$\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos\eta}\right)^2\left[\frac{d\lambda}{d\log\rho}\right]^2=\varepsilon^2\cos^2\theta\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi).$$

Fie funcțiile necunoscute date de expresiile

$$\frac{1}{\cos\eta}=h_0+\varepsilon h_1+\varepsilon^2h_2+\ldots,$$

$$\operatorname{tg}\varphi=p_0+\varepsilon p_1+\varepsilon^2p_2+\ldots, \tag{47}$$

$$\lambda=q_0+\varepsilon q_1+\varepsilon^2q_2+\ldots.$$

Impunînd condițiile inițiale

$$\left(\frac{1}{\cos\eta}\right)(\rho_i)=\frac{1}{\cos\eta_i},$$

$$(\operatorname{tg}\varphi)(\rho_i)=\operatorname{tg}\varphi_i, \tag{48}$$

$$\lambda(\rho_i)=\lambda_i,$$

rezultă, efectuînd calculele,

$$h_0=\frac{1}{\cos\eta_i},$$

$$p_0=\operatorname{tg}\varphi_i \tag{49}$$

$$q_0=\lambda_i$$

sau scriind

$$4\sin^2\theta\cos^2\theta\left[\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{\cos\eta}\right)}{\mathrm{d}\log\rho}\right]=E_0+\varepsilon E_1+\varepsilon^2E_2+\ldots,$$

unde

$$E_0=4\sin^2\theta_i\cos^2\theta_i\left(\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}\log\rho}\right)^2,$$

$$E_1=-8g_1\frac{\operatorname{ctg}\theta_i}{\sin 2\theta_i}\frac{\operatorname{tg}^2\eta_i}{\cos^2\eta_i}C_P^2\rho^2\sin\gamma+2\sin 2\theta_i\frac{\operatorname{tg}\eta_i}{\cos\eta_i}C_P\rho\sin\gamma\left(\frac{\mathrm{d}h_2}{\mathrm{d}\log\rho}\right), \tag{50}$$

rezultă, indendificînd,

$$\rho^2\left[\left(\frac{1}{\cos\eta}\right)^2-1\right]C_P^2\left(\frac{1}{\cos\eta}\right)^2\sin^2\gamma=M_0+\varepsilon M_1+\varepsilon^2M_2+\ldots,$$

M_i fiind dați de expresiile

$$M_0=\operatorname{tg}^2\eta_i\frac{1}{\cos^2\eta_i}C_P^2\rho^2\sin^2\gamma,$$

$$M_1=\left[\operatorname{tg}^2\eta_i\frac{1}{\cos^2\eta_i}\left(2C_P\frac{\partial C_P}{\partial V}\right)+\left(\operatorname{tg}^2\eta_i\frac{2h_1}{\cos\eta_i}+\right.\right. \tag{51}$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\cos_2\eta_i\cos\eta_i}\frac{2h_1}{\cos\eta_i}\right)C_P^2\right]\rho^2\sin^2\gamma.$$

Prin identificare găsim

$$h_1=\frac{\sin\gamma}{\sin 2\theta_i}\frac{\operatorname{tg}\eta_i}{\cos\eta_i}\int_{\rho_i}^{\rho}C_P(V_i,\rho)\,\mathrm{d}\rho,$$

$$h_2=\frac{\cos\eta_i\sin\gamma}{\operatorname{tg}\eta_i\sin^2 2\theta_i}[\sin\gamma(1+2\operatorname{tg}^2\eta_i)(1+\operatorname{tg}^2\eta_i)+ \tag{52}$$

$$+2\operatorname{ctg}\theta_i\operatorname{tg}^2\eta_i(1+\operatorname{tg}^2\eta_i)\cos\gamma]\int_{\rho_i}^{\rho}\left(\int_{\rho_i}^{\rho}C_P\mathrm{d}\rho\right)C_P\mathrm{d}\rho+$$

$$+2\frac{\cos\theta_i\operatorname{ctg}\theta_i}{\sin 2\theta_i}\operatorname{tg}^2\eta_i(1+\operatorname{tg}^2\eta_i)\left(1-\frac{1}{V_i^2}\right)\left(\log\frac{\rho}{\rho_i}\right)^2+$$

$$+\sin\gamma\operatorname{tg}^2\eta_i(1+\operatorname{tg}^2\eta_i)\int_{\rho_i}^{\rho}\frac{\partial C_P}{\partial V}(V_i,\rho)\,\mathrm{d}\rho.$$

De asemenea, se obține

$$\left(\frac{1}{\cos\ \eta}\right)^2 \sin^2\theta\left[\frac{\mathrm{d}(\mathrm{tg}\,\varphi)}{\mathrm{d}\log\rho}\right]^2 = N_0 + \varepsilon N_1 + \varepsilon^2 N_2 + \ldots, \tag{53}$$

unde

$$N_0 = \frac{1}{\cos^2\eta_i}\sin^2\theta_i\frac{\mathrm{d}p_1}{\mathrm{d}\log\rho},$$

$$N_1 = 2\,\frac{\sin^2\theta_i\,\mathrm{ctg}^2\,\theta_i\,\mathrm{tg}^2\,\eta_i}{\cos^4\varphi_i}\left(\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}\log\rho}\right) +$$

$$+ 2\left(h_1\frac{\sin^2\theta_i}{\cos\eta_i} - g_1\frac{\cos\theta_i}{\cos^2\eta_i}\right)\frac{\mathrm{ctg}^2\,\theta_i\sin^2\eta_i}{\cos^4\varphi_i}.$$

Celălalt termen al ecuației a 2-a a sistemului considerat se scrie

$$\cos^2\theta\left[\left(\frac{1}{\cos\ \eta}\right)^2 - 1\right](1 + \mathrm{tg}^2\,\varphi) = T_0 + \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 + \ldots,$$

cu T_i având expresiile

$$T_0 = \cos^2\theta_i\,\mathrm{tg}^2\,\eta_i\frac{1}{\cos^4\varphi_i},$$

$$T_1 = \frac{2\sin^2\theta_i\,\mathrm{ctg}^2\,\theta_i\,\mathrm{tg}\,\eta_i}{\cos^4\varphi_i}\left(\frac{\mathrm{d}p_2}{\mathrm{d}\log\rho}\right) + \frac{2}{\cos^4\varphi_i}\left(h_1\frac{\cos^2\theta_i\sin^2\theta_i}{\cos\eta_i} - \right. \tag{54}$$

$$\left. - g_1\cos\theta_i\,\mathrm{tg}^2\eta_i\,\mathrm{ctg}^2\,\theta_i\right)$$

Identificînd și înlocuind expresiile cunoscute h_1, g_1, vor rezulta valorile

$$p_1 = \frac{\mathrm{ctg}^2\,\theta_i\sin^2\eta_i}{\cos^4\varphi_i}\log\frac{\rho}{\rho_i},$$

$$p_2 = \frac{1}{\sin\theta_i\,\sin 2\theta_i}(\sin\theta_i\sin\gamma + \mathrm{tg}^2\,\eta_i\cos\gamma)\int_{\rho_i}^{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\int_{\rho_i}^{\rho}C_P(V_i,\rho)\,\mathrm{d}\rho + \tag{55}$$

$$+\frac{1}{2\sin^2\theta_i}\left[2\cos\theta_i\sin^2\eta_i\,\mathrm{tg}\,\varphi_i(1 + \mathrm{tg}\,\varphi_i)\left(1 - \frac{1}{V_i^2}\right)\right]\left(\log\frac{\rho}{\rho_i}\right)^2.$$

Din ultima ecuație se deduce

$$\sin^2\theta\left(\frac{1}{\cos\eta}\right)^2\left[\frac{d\lambda}{d\log\rho}\right]^2 = U_0 + \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \ldots,$$

unde

$$U_0 = \frac{1}{\cos^2\eta_i}\sin^2\theta_i\left(\frac{dg_1}{d\log\rho}\right)^2,$$

$$u_1 = \frac{\sin 2\theta_i}{\cos\eta_i\cos\varphi_i}\left(\frac{dg_2}{d\log\rho}\right) + \frac{2}{\cos^2\varphi_i}\left(\cos^2\theta_i\cos\eta_i h_1 - \frac{\cos^3\eta_i}{\sin^2\theta_i}g_1\right). \tag{56}$$

Al doilea termen al ultimei ecuații devine

$$\cos^2\theta\,(1+\operatorname{tg}^2\varphi) = w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \ldots,$$

cu w_i avînd expresiile

$$w_0 = \frac{\cos^2\theta_i}{\cos^2\varphi_i},$$

$$w_1 = 2\cos^2\theta_i p_1 \operatorname{tg}\varphi_i + \frac{2\cos\theta_i g_1}{\cos^2\varphi_i}. \tag{57}$$

Înlocuind în (56) și (57) termenii cunoscuți cu expresiile lor, se obține prin identificare

$$q_1 = \operatorname{ctg}\theta_i\frac{\cos\eta_i}{\cos\varphi_i}\log\frac{\rho}{\rho_i},$$

$$q_2 = \frac{\cos\eta_i\operatorname{ctg}\theta_i}{2}\left[\frac{1}{\sin^2\theta_i\cos^2\varphi_i}\left(1-\frac{1}{V_i}\right) + \cos\varphi_i\operatorname{tg}\varphi_i\operatorname{ctg}^2\theta_i\sin^2\eta_i\right],$$

$$\left(\log\frac{\rho}{\rho_i}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\gamma}{\sin^2\theta_i\cos^2\varphi_i} - \frac{\operatorname{tg}\eta_i}{2\sin\theta_i\cos^2\varphi_i}\right)\int_{\rho_i}^{\rho}\frac{d\rho}{\rho}\int_{\rho_i}^{\rho}C_P(V_i,\rho)d\rho. \tag{58}$$

Expresiile obținute pentru f_i, g_i, p_i, q_i $(i = 0, 1, 2\ldots)$ ne permit obținerea soluțiilor sistemului de ecuații ale mișcării vehiculelor spațiale la intrarea în atmosferă, presupunînd că avem dată legea de variație a coeficienților aerodinamici. Deși metoda de integrare este laborioasă, rezultatele obținute sînt dintre cele mai bune, permițînd o aproximare bună a soluției exacte a sistemului de ecuații, obținută prin integrarea numerică și avînd avantajul unor expresii analitice care dau soluția funcție de variația coeficienților aerodinamici, observație făcută mai sus. Anali-

zînd sistemul de ecuaţii, se observă că termenii sistemului nu depind de raportul portanţă-rezistenţă, ceea ce determină faptul că soluţiile sistemului nu depind de C_P/C_R. Rezultatele obţinute sînt pentru cazul general tridimensional, soluţiile mişcării plane fiind obţinute prin particularizările specificate la deducerea ecuaţiilor de mişcare în cazul tratării tridimensionale.

Primită la redacţie la 16 februarie 1980

BIBLIOGRAFIE

M. POPESCU, *Contribuţii la optimizarea intrării vehiculelor spaţiale în atmosferă* (Teză de doctorat, Facultatea de matematică, 1978).

ASUPRA MIȘCĂRII FLUIDELOR VÎSCOASE LA NUMERE REYNOLDS MICI ÎN PREZENȚA CORPURILOR POROASE NEOMOGENE

de CONSTANTIN GRASU

Institutul de învățămînt superior Constanța

1. INTRODUCERE

În lucrare se studiază problema unei sfere poroase neomogene cu permeabilitate constantă în fiecare mediu poros. Se presupune că în exteriorul sferei este valabilă ecuația lui Stokes, în apropierea primei frontiere legea generalizată a lui Darcy, iar în primul și în cel de-al doilea mediu poros legea lui Darcy.
Studiul efectuat arată că în cel de-al doilea mediu poros curgerea este guvernată de legea lui Darcy, iar condiția la limită corectă pe frontiera de separație a celor două medii poroase este cea propusă de Șt. I. Gheorghiță.
Soluția obținută în întregul domeniu de curgere este exactă.
Drept cazuri limită se obține soluția în cazul unei singure sfere poroase, soluția în cazul sferei cu cavitate și soluția în cazul sferei cu nucleu impermeabil.

Mișcarea fluidelor în prezența mediilor poroase a fost abordată pentru prima dată în mod sistematic de către Șt. I. Gheorghiță [8] în anul 1955. Abia după 1965 au început să apară lucrări în acest domeniu ca preocupări și ale altor cercetători.

În lucrările prof. Șt. I. Gheorghiță condițiile de racordare a mișcărilor pe frontierele de separare sînt :

i) continuitatea presiunii ;

ii) continuitatea vitezei normale, iar viteza tangențială nulă.

În 1971 K. Yamamoto [1], arată că aceste condiții pentru medii poroase cu permeabilitatea apropiată de 1 sînt violate. Din această cauză, pentru medii omogene introduce un strat intermediar de tip asimptotic în care este valabilă ecuația lui Brinkmann în imediata vecinătate a frontierei de separare, în mediul poros.

Condițiile de racordare impuse în lucrările [1, 2] sînt :

i) continuitatea presiunii ;

ii) continuitatea tensiunilor tangențiale și normale.

În aceste condiții K. Yamamoto studiază mișcarea în prezența sferei omogene și a cilindrului circular omogen la numere Reynolds mici folosind o metodă aproximativă de rezolvare, dezvoltînd soluția după puterile unui parametru adimensional mare [1, 2]. În aceste lucrări se demonstrează că în domeniul propriu-zis ocupat de mediul poros este valabilă ecuația lui Darcy.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 6, 1980, P. 813–831

În 1973 [7], Thérèse Lévy studiază problema cavității cilindrice folosind metoda lui Kaplun, în care parametrul mic după care dezvoltă soluțiile conține termeni logaritmici.

În această lucrare reluăm problema mișcării fluidului vîscos în prezența sferei neomogene [4] pentru care determinăm soluția exactă cu acceptarea unui strat intermediar de tip asimptotic și apoi printr-un procedeu la limită obținem și sfera cu cavitate.

2. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Să considerăm un fluid vîscos animat de o mișcare de translație la mari distanțe de viteză $\vec{V}_0$, $\vec{V}_0 \| OX$, axa OX fiind axa de simetrie a mișcării. În acest fluid considerăm scufundată o sferă neomogenă. Fie D_0, D_1 și D_2 domeniile de mișcare definite astfel:

$$D_0 = \{(r;\theta) \mid r > 1;\ \theta \in [0, 2\pi]\}, \tag{1}$$

$$D_1 = \{(r;\theta) \mid \sigma < r < 1;\ \theta \in [0, 2\pi]\} \text{ cu permeabilitatea } k_1,$$

$$D_2 = \{(r;\theta) \mid r < \sigma;\ \theta \in [0, 2\pi]\} \text{ cu permeabilitatea } k_2.$$

Ecuațiile de mișcare și condițiile de racordare sînt date sub formă adimensionalizată. Într-un plan meridian, ce conține axa de simetrie a mișcării vom avea:

— în D_0 ecuația lui Stokes:

$$\operatorname{grad} p_0 = \Delta \vec{q}_0,\ r > 1, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \vec{q}_0 = 0, \tag{2}$$

cu condițiile la mari distanțe:

$$\lim_{r\to\infty} q_{01} = 1;\ \lim_{r\to\infty} q_{02} = \lim_{r\to\infty} q_{03} = 0, \tag{3}$$

$$p_0(\infty) = 0, \tag{4}$$

— în D_1 adoptăm ecuația lui Darcy:

$$\operatorname{grad} p_1 = -S_1^2 \vec{q}_1,\ \sigma < r < 1, \tag{5}$$

$$\operatorname{div} \vec{q}_1 = 0,\ \sigma = R_2/R_1, \tag{6}$$

$$\text{cu } S_1^2 = \frac{R_1^2}{k_1}, \tag{7}$$

R_1 = raza sferei exterioare, R_2 = raza sferei interioare,

— în D_2 adoptăm ecuaţia lui Darcy :

$$\text{grad } p_2 = -S_2^2 \vec{q}_2, \qquad r < \sigma, \tag{8}$$

$$\text{div } \vec{q}_2 = 0, \tag{9}$$

$$\text{cu } S_2^2 = \frac{R_1^2}{k_2}. \tag{10}$$

În conformitate cu ideile lui K. Yamamoto, vom adopta în imediata apropiere a frontierei Γ_0, în D_1, un strat intermediar a cărui grosime o considerăm de ordinul lui S_1^{-1}, în care adoptăm ecuaţia lui Brinkmann [1 ; 2 ; 3] :

$$\text{grad } \pi_1 = \Delta \vec{v}_1 - S_1^2 \vec{v}_1, \tag{11}$$

$$\text{div } \vec{v}_1 = 0. \tag{12}$$

Acest sistem de ecuaţii descrie foarte bine mişcarea în medii poroase a căror porozitate este foarte apropiată de 1, adică pentru medii care se apropie foarte mult de un fluid liber.

Vom face ipoteza existenţei unui strat intermediar şi în apropierea frontierei Γ_1, în D_2, în care este valabilă ecuaţia lui Brinkmann :

$$\text{grad } \pi_2 = \Delta \vec{v}_2 - S_2^2 \vec{v}_2, \tag{13}$$

$$\text{div } \vec{v}_2 = 0. \tag{14}$$

Admitem grosimea celui de-al doilea strat intermediar ca fiind de ordinul lui S_2^{-1}. În primul strat intermediar introducem coordonata :

$$\eta_1 = S_1 r, \; r \in [\sigma, 1] \tag{15}$$

iar în al doilea strat intermediar :

$$\eta_2 = S_2 r, \qquad r \in [0, \sigma], \tag{16}$$

r se măsoară de la centrul sferei spre exterior.

Orice soluţie a ecuaţiei Brinkmann pentru $\eta_1 \to S_1 \sigma$ sau pentru $\eta_2 \to 0$, trebuie să tindă la soluţia ecuaţiilor Darcy respective. Deci, într-un punct oarecare din D_1 viteza va avea o expresie de forma :

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{q}_1,$$

$$\vec{v}_1 \to 0 \text{ pentru } \eta_1 \to S_1 \sigma, \tag{17}$$

iar în D_2:

$$\vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \vec{q}_2, \tag{18}$$

$$\vec{v}_2 \to 0 \text{ pentru } \eta_2 \to 0.$$

Deoarece presiunea în straturile intermediare nu are variații bruște vom adopta ecuațiile:

$$\pi_i = p_i, \qquad i = 1, 2 \tag{19}$$

Condițiile de racordare pe frontiera Γ_0 și Γ_1 vor fi [1, 2]:

$$\vec{q}_0 = \vec{u}_1, \tag{20}$$

$$\frac{\partial q_{03}}{\partial x_1} = \frac{\partial u_{13}}{\partial x_1} \qquad \text{pe } \Gamma_0, \tag{21}$$

$$\frac{\partial q_{02}}{\partial x_1} = \frac{\partial u_{12}}{\partial x_1} \qquad \eta_1 = S_1 \quad (r=1), \tag{22}$$

$$p_0 = \pi_1, \tag{23}$$

unde q_{02}; q_{03}, u_{12} și u_{13} sînt componentele vitezelor în planul tangent la Γ_0, în punctul respectiv, iar x_1 direcția normalei la planul tangent în acest punct.

Pe frontiera Γ_1 vom avea:

$$\vec{q}_1 = \vec{u}_2, \tag{24}$$

$$\frac{\partial q_{13}}{\partial x_1} = \frac{\partial u_{23}}{\partial x_1}, \qquad \eta_2 = S_2\sigma, \tag{25}$$

$$\frac{\partial q_{12}}{\partial x_1} = \frac{\partial u_{22}}{x_1}, \tag{26}$$

$$p_1 = \pi_2, \tag{27}$$

unde q_{12}, q_{13}, u_{22}, u_{23} și x_1 au aceeași semnificație ca pentru Γ_0.

În coordonate sferice, într-un plan meridian de referință care conține axa de simetrie, ecuațiile se scriu:

— în D_0:

$$\frac{\partial p_0}{\partial r} = \frac{\partial^2 q_{0r}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 q_{0r}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial q_{0r}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial q_{0r}}{\partial \theta}\operatorname{ctg}\theta - \tag{28}$$

$$- \frac{2}{r^2}\frac{\partial q_{0\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2}\, q_{0r} - \frac{2}{r^2}\, q_{0\theta}\operatorname{ctg}\theta,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p_0}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 q_{0\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 q_{0\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial q_{0\theta}}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2} \times$$

$$\times \frac{\partial q_{0\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial q_{0r}}{\partial \theta} - \frac{q_{0\theta}}{r^2 \sin^2 \theta}, \tag{29}$$

cu ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial q_{0r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial q_{0\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} q_{0r} + \frac{q_{0\theta}}{r} \operatorname{ctg} \theta = 0 \tag{30}$$

și condițiile la mari distanțe:

$$\lim_{r\to\infty} q_{0r} = \cos\theta; \quad \lim_{r\to\infty} q_{0\theta} = -\sin\theta, \tag{31}$$

$$p_0(\infty) = 0. \tag{32}$$

Ecuațiile stratului intermediar din D_1 devin:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial r} = \frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1r}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_{1r}}{\partial \theta} -$$

$$- \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_{1\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_{1r} - 2\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2} v_{1\theta} - S_1^2 v_{1r}, \tag{33}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \pi_1}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 v_{1\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{1\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_{1\theta}}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_{1\theta}}{\partial \theta} +$$

$$+ \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_{1r}}{\partial \theta} - \frac{v_{1\theta}}{r^2 \sin^2\theta} - S_1^2 v_{1\theta}, \tag{34}$$

cu ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial v_{1r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_{1\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} v_{1r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} v_{1\theta} = 0. \tag{35}$$

În domeniul D_1:

$$\frac{\partial p_1}{\partial r} = -S_1^2 q_{1r}, \tag{36}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p_1}{\partial \theta} = -S_1^2 q_{1\theta}, \tag{37}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁR KÖZPONTI

cu ecuaţia de continuitate :

$$\frac{\partial q_{1r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial q_{1\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} q_{1r} + q_{1\theta}\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} = 0, \tag{38}$$

şi condiţiile de racordare pe Γ_0 $(r = 1)$

$$q_{0r} = u_{1r}\,, \tag{39}$$

$$q_{0\theta} = u_{1\theta}\,, \tag{40}$$

$$\frac{\partial q_{0\theta}}{\partial r} = \frac{\partial u_{1\theta}}{\partial r}\,, \tag{41}$$

$$p_0 = \pi_1. \tag{42}$$

În al doilea strat intermediar avem :

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial r} = \frac{\partial^2 v_{2r}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{2r}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_{2r}}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v_{2r}}{\partial \theta} - \tag{43}$$

$$- \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_{2\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} v_{2r} - 2\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2} v_2\theta - S_2^2\, v_{2r}\,,$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \pi_2}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 v_{2\theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_{2\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v_{2\theta}}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg}\,\theta}{r^2}\frac{\partial v_{2\theta}}{\partial \theta} + \tag{44}$$

$$+ \frac{2}{r}\frac{\partial v_{2r}}{\partial \theta} - \frac{v_{2\theta}}{r^2 \sin^2\theta} - S_2^2\, v_{2\theta},$$

cu ecuaţia de continuitate :

$$\frac{\partial v_{2r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_{2\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} v_{2r} + v_{2\theta}\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} = 0. \tag{45}$$

În D_2 avem ecuaţiile :

$$\frac{\partial p_2}{\partial r} = - S_2^2\, q_{2r}\,, \tag{46}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p_2}{\partial \theta} = - S_2^2\, q_{2\theta}\,, \tag{47}$$

cu ecuația de continuitate :

$$\frac{\partial q_{2r}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial q_{2\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} q_{2r} + q_{2\theta}\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r} = 0, \tag{48}$$

și condițiile de racordare pe Γ_1 $(r = \sigma)$

$$q_{1r} = u_{2r}\,, \tag{49}$$

$$q_{1\theta} = u_{2\theta}\,. \tag{50}$$

$$\frac{\partial q_{1\theta}}{\partial r} = \frac{\partial u_{2\theta}}{\partial r}\,, \tag{51}$$

$$p_1 = \pi_2. \tag{52}$$

Acestea fiind ecuațiile de mișcare adoptate și condițiile de racordare pe cele două frontiere, vom încerca în continuare să găsim soluția exactă a problemei.

3. REZOLVAREA PROBLEMEI

Să căutăm pentru problema propusă soluții de forma : În D_0 :

$$q_{0r}(r\,;\,\theta) = f_0(r)\cos\theta, \tag{53}$$

$$q_{0\theta}(r\,;\,\theta) = g_0(r)\sin\theta, \tag{54}$$

$$p_0(r\,;\,\theta) = h_0(r)\cos\theta, \tag{55}$$

care, introduse în (28)—(30), ne dau :

$$h_0' = f_0'' + \frac{2}{r} f_0' - \frac{4}{r^2}\,(f_0 + g_0), \tag{56}$$

$$\frac{h_0}{r} = -\,g_0'' - \frac{2}{r} g_0' + \frac{2}{r^2}\,(f_0 + g_0), \tag{57}$$

$$f_0' + \frac{2}{r}(f_0 + g_0) = 0 \tag{58}$$

şi în urma rezolvării sistemului obţinem :

$$f_0(r) = \frac{A_0}{r^3} + \frac{B_0}{r^3} + C_0 + D_0 r^2, \tag{59}$$

$$g_0(r) = \frac{A_0}{2r^3} - \frac{B_0}{2r} - C_0 - 2D_0 r^2, \tag{60}$$

$$h_0(r) = \frac{B_0}{r^2} + 10 D_0 r. \tag{61}$$

Avînd în vedere condiţiile (31) şi (32), obţinem :

$$D_0 = 0 ; \; C_0 = 1 \tag{62}$$

şi deci

$$f_0(r) = \frac{A_0}{r^3} + \frac{B_0}{r} + 1, \tag{63}$$

$$g_0(r) = -\frac{A_0}{2r^3} - \frac{B_0}{2r} - 1, \qquad r > 1, \tag{64}$$

$$h_0(r) = \frac{B_0}{r^2}, \tag{65}$$

rămînînd nedeterminate constantele A_0 şi B_0.

În D_1 căutăm pentru q_{1r}, $q_{1\theta}$ şi p_1 soluţii de forma :

$$q_{1r}(r ; \theta) = f_1(r) \cos \theta, \tag{66}$$

$$q_{1\theta}(r ; \theta) = g_1(r) \sin \theta, \qquad \sigma < r < 1, \tag{67}$$

$$p_1(r ; \theta) = h_1(r) \cos \theta, \tag{68}$$

care introduse în ecuaţiile (36)—(38) obţinem :

$$h_1' = - S_1^2 f_1, \tag{69}$$

$$\frac{h_1}{r} = S_1^2 g_1, \tag{70}$$

$$f_1' + \frac{2}{r}(f_1 + g_1) = 0, \tag{71}$$

cu soluțiile:

$$f_1(r) = \frac{2A_1}{r^3 S_1^2} - \frac{B_1}{S_1^2}, \tag{72}$$

$$g_1(r) = \frac{A_1}{S_1^2 r^3} + \frac{B_1}{S_1^2}, \tag{73}$$

$$h_1(r) = \frac{A_1}{r^2} + B_1 r. \tag{74}$$

În D_2 vom căuta soluțiile de forma:

$$q_{2r}(r\,;\,\theta) = f_2(r)\cos\theta, \tag{75}$$

$$q_{2\theta}(r\,;\,\theta) = g_2(r)\sin\theta, \tag{76}$$

$$p_2(r\,;\,\theta) = h_2(r)\cos\theta \tag{77}$$

și introduse în ecuațiile (46)—(48) ne conduc la ecuațiile:

$$h_2' = -S_2^2 f_2, \tag{78}$$

$$\frac{h_2}{r} = S_2^2 g_2, \tag{79}$$

$$f_2' + \frac{2}{r}(f_2 + g_2) = 0, \tag{80}$$

cu soluțiile:

$$f_2(r) = \frac{2A_2}{S_2^2 r^3} - \frac{B_2}{S_2^2}, \tag{81}$$

$$g_2(r) = \frac{A_2}{S_2^2 r^3} + \frac{B_2}{S_2^2}, \tag{82}$$

$$h_2(r) = \frac{A_2}{r^2} + B_2 r; \tag{83}$$

cum presiunea trebuie să aibă valori finite în interiorul sferei, rezultă că $A_2 = 0$ și deci

$$f_2(r) = \frac{-B_2}{S_2^2}, \tag{84}$$

$$g_2(r) = \frac{B_2}{S_2^2}, \tag{85}$$

$$h_2(r) = B_2 r \tag{86}$$

SOLUȚIA IN PRIMUL STRAT INTERMEDIAR

Vom căuta pentru v_{1r} și $v_{1\theta}$ expresii de forma :

$$v_{1r}(r\,;\,\theta) = F_1(r)\cos\theta, \qquad \sigma < r < 1, \tag{87}$$

$$v_{1\theta}(r\,;\,\theta) = G_1(r)\sin\theta, \tag{88}$$

și avînd în vedere că presiunea nu are variații bruște în D_1, vom lua pentru π_1 expresia :

$$\pi_1(r\,;\,\theta) = H_1(r)\cos\theta = \left(\frac{A_1}{r^2} + B_1\, r\right)\cos\theta. \tag{89}$$

Aceste expresii introduse în (33)—(35), obținem :

$$F_1'' + \frac{2}{r}F_1' - \frac{4}{r^2}(F_1 + G_1) - S_1^2 F_1 = -2\frac{A_1}{r^3} + B_1, \tag{90}$$

$$-G_1'' - \frac{2}{r}G_1' + \frac{2}{r^2}(F_1 + G_1) + S_1^2 G_1 = \frac{A_1}{r^3} + B_1, \tag{91}$$

$$F_1' + \frac{2}{r}(F_1 + G_1) = 0, \tag{92}$$

din care deducem ecuația diferențială :

$$r^3 F_1''' + 4r^2 F_1'' - (4 + S_1^2 r^2)\, rF_1' = \frac{6A_1}{r}, \tag{93}$$

cu $\eta_1 = S_1 r$ ecuația devine :

$$\eta_1^3 F_1''' + 4\eta_1^2 F_1'' - (4 + \eta_1^2)\,\eta_1 F_1' = \frac{6A_1}{r}. \tag{94}$$

Căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma :

$$F_{1p}(\eta_1) = \alpha\eta_1^m, \tag{95}$$

și care introdusă în (94) ne dă :

$$\alpha\eta_1^m(m + 4)(m - 1) - \alpha\eta_1^{m+2} - 6A_1 S_1\,\eta_1^{-2} = 0 \tag{96}$$

şi observăm imediat soluţia:

$$m = -4,$$
$$\alpha = -6A_1 S_1. \tag{97}$$

Deci, avem o soluţie particulară a ecuaţiei (94):

$$F_{1p}(\eta_1) = -\frac{6A_1 S_1}{\eta_1^4}. \tag{98}$$

Să găsim acum soluţia generală a ecuaţiei omogene:

$$\eta_1^3 F_1''' + 4\eta_1^2 F_1'' - (4 + \eta_1^2)\,\eta_1 F_1' = 0. \tag{99}$$

Vom căuta pentru ecuaţia (99) o soluţie de forma:

$$F_1(\eta_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, \eta_1^{k+\rho} \tag{100}$$

şi obţinem:

$$F_{11}(\eta_1) = \frac{1}{\eta_1^2}\,\mathrm{Ch}\eta_1 - \frac{1}{\eta_1^3}\,\mathrm{Sh}\eta_1, \tag{101}$$

$$F_{12}(\eta_1) = \frac{1}{\eta_1^2}\,\mathrm{Sh}\eta_1 - \frac{1}{\eta_1^3}\,\mathrm{Ch}\eta_1, \tag{102}$$

$$F_{13}(\eta_1) = 1. \tag{103}$$

Deci soluţia generală a ecuaţiei (99) este

$$F_1(\eta_1) = A_1^* F_{11}(\eta_1) + B_1^* F_{12}(\eta_1) + C_1^* F_{13}(\eta_1), \tag{104}$$

iar soluţia generală în primul strat intermediar este:

$$F_1(\eta_1) = A_1^* F_{11}(\eta_1) + B_1^* F_{12}(\eta_1) + C_1^* F_{13}(\eta_1) - \frac{6S_1}{\eta_1^4} A_1, \tag{105}$$

$$G_1(\eta_1) = \frac{1}{2} A_1^* G_{11}(\eta_1) - \frac{1}{2} B_1^* G_{12}(\eta_1) - \frac{1}{2} C_1^* G_{13}(\eta_1) - \frac{6\,S_1}{\eta_1^4} A_1, \tag{106}$$

cu

$$G_{11}(\eta_1) = \left(-\frac{1}{\eta_1} - \frac{1}{\eta_1^3}\right) \operatorname{Sh} \eta_1 + \frac{1}{\eta_1^2} \operatorname{Ch} \eta_1, \tag{107}$$

$$G_{12}(\eta_1) = +\left(\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_1^3}\right) \operatorname{Ch} \eta_1 - \frac{1}{\eta_1^2} \operatorname{Sh} \eta_1, \tag{108}$$

$$G_{13}(\eta_1) = 2. \tag{109}$$

SOLUȚIA ÎN AL DOILEA STRAT INTERMEDIAR

Căutăm pentru v_{2r}, $v_{2\theta}$ și π_2 expresii de forma :

$$v_{2r}(r\,;\,\theta) = F_2(r) \cos \theta, \tag{110}$$

$$v_{2\theta}(r\,;\,\theta) = G_2(r) \sin \theta, \tag{111}$$

$$\pi_2(r\,;\,\theta) = h_2(r) \cos \theta = B_2 r \cos \theta, \tag{112}$$

și care introduse în ecuațiile (43)—(45) obținem :

$$F_2'' + \frac{2}{r} F_2' - \frac{4}{r^2} (F_2 + G_2) - S_2^2 F_2 = B_2, \tag{113}$$

$$-G_2'' - \frac{2}{r} G_2^1 + \frac{2}{r^2} (F_2 + G_2) + S_2^2 G_2 = B_2, \tag{114}$$

$$F_2' + \frac{2}{r} (F_2 + G_2) = 0 \tag{115}$$

și notînd $\eta_2 = S_2 r$ ecuația devine :

$$\eta_2^3 F_2''' + 4\eta_2^2 F_2'' - (4 + \eta_2^2)\, \eta_2 F_2' = 0. \tag{116}$$

Soluția generală a acestei ecuații este :

$$F_2(\eta_2) = A_2^* F_{11}(\eta_2) + B_2^* F_{12}(\eta_2) + C_2^* F_{13}(\eta_2), \tag{117}$$

$$G_2(\eta_2) = \frac{1}{2} A_2^* G_{11}(\eta_2) - \frac{1}{2} B_2^* G_{12}(\eta_2) - \frac{1}{2} C_2^* G_{13}(\eta_2). \tag{118}$$

COMENTARIU ASUPRA SOLUȚIEI

Rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale care descriu mișcarea fluidului vîscos în D_0, D_1, primul strat intermediar, D_2 și al doilea strat intermediar, au condus la determinarea în total a treisprezece funcții care depind liniar de unsprezece constante arbitrare. Pentru determinarea acestor constante este necesar să impunem niște condiții care să reflecte mișcarea în prezența sferei neomogene.

Pe frontiera Γ_0 avem un strat intermediar [1, 2] și condițiile corespunzătoare de racordare.

Pe frontiera Γ_1 dacă am încerca să impunem un strat intermediar sau condițiile de racordare ca cele folosite în [2, 3], am obține soluție banală, ceea ce ar conduce la inexistența mișcării în mediul poros, absurd. Deci, singurele condiții de racordare corecte pe Γ_1 sînt cele propuse de St. I. Gheorghiță [4 ; 8], și anume continuitatea presiunilor și a vitezelor normale. De altfel, aceasta a fost demonstrată pentru cazul unui model periodic de mediu poros de către H.I. Ene și E. Sanchez-Palencia [6].

În acest fel sîntem conduși la rezolvarea următorului sistem :

— pe frontiera $\Gamma_0(r = 1,\ \eta_1 = S_1)$:

$$A_0 + B_0 + 1 = \frac{2A_1}{S_1^2} - \frac{B_1}{S_1^2} + A_1^* F_{11}(S_1) + B_1^* F_{12}(S_1) + C_1^* F_{13}(S_1) - \frac{6A_1}{S_1^3}, \tag{119}$$

$$A_0 - B_0 - 2 = \frac{2A_1}{S_1^2} + 2\frac{B_1}{S_1^2} + A_1^* G_{11}(S_1) - B_1^* G_{12}(S_1) - C_1^* G_{13}(S_1) - \frac{12A_1}{S_1^3}, \tag{120}$$

$$-3A_0 + B_0 = -6\frac{A_1}{S_1^2} + S_1 A_1^* G'_{11}(S_1) - S_1 B_1^* G'_{12}(S_1) - \tag{121}$$

$$- S_1 C_1^* G'_{13}(S_1) + \frac{48 A_1}{S_1^3},$$

$$B_0 = A_1 + B_1, \tag{122}$$

$$A_1^* F_{11}(S_1 - 1) + B_1^* F_{12}(S_1 - 1) + C_1^* F_{13}(S_1 - 1) - \frac{6S_1}{(S_1 - 1)^4} A_1 = 0, \tag{123}$$

$$A_1^* G_{11}(S_1 - 1) - B_1^* G_{12}(S_1 - 1) - C_1^* G_{13}(S_1 - 1) - \frac{12S_1}{(S_1 - 1)^4} A_1 = 0, \tag{124}$$

— pe frontiera $\Gamma_1(r = \sigma)$ avem :

$$\frac{2A_1}{\sigma^3 S_2^1} - \frac{B_1}{S_1^2} = -\frac{B_2}{S_2^2}, \tag{125}$$

$$\frac{A_1}{\sigma^3} + B_1 = B_2. \tag{126}$$

Avem în total opt condiţii de racordare şi opt constante de determinat.

Din ecuaţiile (122), (125) şi (126) deducem :

$$B_2 = \frac{3S_2^2}{\sigma^3(S_2^2 - S_1^2)} A_1 ; \; B_1 = \frac{S_1^2 + 2S_2^2}{\sigma^3(S_2^2 - S_1^2)} A_1 ; B_0 = \frac{S_2^2(2+\sigma^3) + S_1^2(1-\sigma^3)}{\sigma^3(S_2^2 - S_1^2)} A_1. \tag{127}$$

Aceste expresii înlocuite în restul de ecuaţii, vom obţine :

$$A_1^* \widetilde{F}_{11} + B_1^* \widetilde{F}_{12} + C_1^* \widetilde{F}_{13} = a_1 A_1, \tag{128}$$

$$A_1^* \widetilde{G}_{11} - B_1^* \widetilde{G}_{12} - C_1^* \widetilde{G}_{13} = 2a_1 A_1, \tag{129}$$

$$A_1^* G'_{11} - B_1^* G'_{12} - C_1^* G'_{13} = a_3 A_1 - \frac{3}{S_1} A_0, \tag{130}$$

$$A_1^* G_{11} - B_1^* G_{12} - C_1^* G_{13} = a_4 A_1 + A_0 - 2, \tag{131}$$

$$A_1^* F_{11} + B_1^* F_{12} + C_1^* F_{13} = a_5 A_1 + A_0 + 1, \tag{132}$$

în care am notat :

$$G_{1j} = G_{1j}(S_1) ; \; \widetilde{G}_{1j} = G_{1j}(S_1 - 1) ; \; F_{1j} = F_{1j}(s_1) ; \; \widetilde{F}_{1j} = F_{1j}(S_1 - 1) ; \tag{133}$$

$$a_1 = \frac{6S_1}{(S_1 - 1)^4},$$

$$a_3 = \frac{6}{S_1^3} - \frac{48}{S_1^4} + \frac{S_2^2(2 + \sigma^3) + S_1^2(1 - \sigma^3)}{\sigma^3 S_1(S_2^2 - S_1^2)},$$

$$a_4 = \frac{12}{S_1^3} - \frac{2}{S_1^2} - \frac{2(S_1^2 + 2S_2^2)}{\sigma^3 S_1^2(S_2^2 - S_1^2)} - \frac{S_2^2(2 + \sigma^3) + S_1^2(1 - \sigma^3)}{\sigma^3(S_2^2 - S_1^2)}, \tag{134}$$

$$a_5 = \frac{6}{S_1^3} - \frac{2}{S_1^2} + \frac{S_1^2 + 2S_2^2}{\sigma^3 S_1^2(S_2^2 - S_1^2)} + \frac{S_2^2(2 + \sigma^3) + S_1^2(1 - \sigma^3)}{\sigma^3(S_2^2 - S_1^2)}.$$

Eliminînd A_0 între ecuațiile (130)—(132) și considerînd și ecuațiile (128) și (129), obținem sistemul :

$$A_1^* \widetilde{G}_{11} - B_1^* \widetilde{G}_{12} - C_1^* \widetilde{G}_{13} = 2a_1 A_1, \tag{135}$$

$$A_1^* \widetilde{F}_{11} + B_1^* \widetilde{F}_{12} + C_1^* \widetilde{F}_{13} = a_1 A_1, \tag{136}$$

$$A_1^* (2F_{11} + S_1 G'_{11} + G_{11}) - B_1^* (-2F_{12} + S_1 G'_{12} + G_{12}) -$$

$$- C_1^* (-2F_{13} + S_1 G'_{13} + G_{13}) = (a_3 + a_4 + 2a_5) A_1, \tag{137}$$

din care deducem :

$$A_1^* = \frac{D_1}{D} A_1 ; \; B_1^* = \frac{D_2}{D} A_1 ; \; C_1^* = \frac{D_3}{D} A_1,$$

$$A_0 = 2 + (G_{11} D_1 - G_{12} D_2 - G_{13} D_3 - a_4 D) \frac{A_1}{D}, \tag{138}$$

$$A_1 = 3D \{(F_{11} - G_{11}) D_1 + (F_{12} + G_{12}) D_2 + (F_{13} + G_{13}) D_3 + (a_4 - a_5) D\}^{-1}.$$

Am notat cu D, determinatul format cu coeficienții necunoscutelor A_1^*, B_1^* și C_1^* din sistemul (135)—(137) și cu $D_j (j = 1, 2, 3)$ determinantul obținut prin înlocuirea coloanei j cu coloana coeficienților lui A_1^*, B_1^* C_1^*. Relațile (127) și (138) determină constantele și obținem astfel soluția problemei puse. Am demonstrat astfel că mișcarea în D_2 este guvernată de legea lui Darcy, iar fluidul vîscos se comportă ca un fluid perfect și condițiile de racordare pe frontiera Γ_1 folosite de către Șt. I. Gheorghiță [4, 8] sînt singurele acceptabile.

Din soluția generală pentru sfera neomogenă putem deduce acum următoarele trei cazuri particulare :

i) sfera omogenă ($\sigma = 0$),

ii) cavitatea sferică ($S_2 = 0$),

iii) sfera cu miez impermeabil ($S_2 = \infty$).

MIȘCAREA FLUIDULUI VÎSCOS LA NUMERE REYNOLDS MICI IN PREZENȚA SFEREI OMOGENE

Pentru a obține mișcarea în prezența sferei omogene din soluția pentru mișcarea în prezența sferei neomogene va trebui să luăm $\sigma = 0$. Ținînd seama de relațiile (127), această implică $A_1 = 0$ și vom avea de rezolvat următorul sistem :

$$A_0 + B_0 + \frac{B_1}{S_1^2} + 1 = A_1^* F_{11} + B_1^* F_{12} + C_1^* F_{13}, \tag{139}$$

$$\frac{1}{2}A_0-\frac{1}{2}B_0-\frac{B_1}{S_1^2}-1=\frac{1}{2}A_1^*G_{11}-\frac{1}{2}B_1^*G_{12}-\frac{1}{2}C_1^*G_{13}, \tag{140}$$

$$-\frac{3}{2}A_0+\frac{1}{2}B_0=\frac{S_1}{2}A_1^*G'_{11}-\frac{S_1}{2}B_1^*G'_{12}-\frac{S_1}{2}C_1^*G'_{13}, \tag{141}$$

$$B_0=B_1, \tag{142}$$

$$A_1^*\widetilde{F}_{11}-B_1^*\widetilde{F}_{12}-C_1^*\widetilde{F}_{13}=0, \tag{143}$$

$$A_1^*\widetilde{G}_{11}-B_1^*\widetilde{G}_{12}-C_1^*\widetilde{G}_{13}=0. \tag{144}$$

Avem șase condiții de racordare și șase constante nedeterminate. Înlocuind B_1 din (142) în ecuațiile (139)—(141) și eliminînd pe A_0 obținem următorul sistem :

$$A_1^*\widetilde{F}_{11}+B_1^*\widetilde{F}_{12}+C_1^*\widetilde{F}_{13}=0, \tag{145}$$

$$A_1^*\widetilde{G}_{11}-B_1^*\widetilde{G}_{12}-C_1^*\widetilde{G}_{13}=0, \tag{146}$$

$$A_1^*\left(F_{11}+\frac{1}{2}G_{11}+S_1G'_{11}\right)+B_1^*\left(F_{12}-\frac{1}{2}G_{12}-\frac{S_1}{2}G'_{12}\right)+C_1^*\left(F_{13}-\frac{1}{2}G_{13}-\right. \tag{147}$$

$$\left.-\frac{S_1}{2}G'_{13}\right)=B_0,$$

din care obținem :

$$A_1^*=\frac{D_1}{D}B_0\,;\ B_1^*=\frac{D_2}{D}B_0\,;\ C_1^*=\frac{D_3}{D}B_0\,;\ B_1=B_0, \tag{148}$$

$$A_0=\frac{B_0}{3D}\left[D+S_1(-G'_{11}D_1+G'_{12}D_2+G'_{13}D_3)\right], \tag{149}$$

$$B_0=-3DS_1^2\{4DS_1^2+3D-S_1^3(G'_{11}D_1-G'_{12}D_2-G'_{13}D_3)- \tag{150}$$

$$-3S_1^2(F_{11}D_1+F_{12}D_2+F_{13}D_3)\}^{-1}$$

cu notațiile :

$$D=\begin{vmatrix} & \widetilde{F}_{11} & \widetilde{F}_{12} & \widetilde{F}_{13} \\ & \widetilde{G}_{11} & -\widetilde{G}_{12} & -\widetilde{G}_{13} \\ F_{11}+\frac{1}{2}G_{11}+S_1G'_{11} & F_{12}-\frac{1}{2}G_{12}+\frac{S_1}{2}G'_{12} & F_{13}-\frac{1}{2}G_{13}-\frac{S_1}{2}G'_{13} & \end{vmatrix}, \tag{151}$$

$$D_1 = \widetilde{F}_{13}\widetilde{G}_{12} - \widetilde{F}_{12}\widetilde{G}_{13};\ D_2 = F_{11}\widetilde{G}_{13} + \widetilde{G}_{11}\widetilde{F}_{13},$$

$$D_3 = -\widetilde{F}_{11}\widetilde{G}_{12} - \widetilde{G}_{11}\widetilde{F}_{12}. \tag{152}$$

Cu expresiile constantelor date de relațiile (148)—(152) avem complet determinată soluția pentru sfera omogenă.

MIȘCAREA FLUIDULUI VÎSCOS LA NUMERE REYNOLDS MICI ÎN PREZENȚA SFEREI CU CAVITATE

Dacă în soluția generală pentru sfera neomogenă luăm $S_2 = 0$ vom obține mișcarea în prezența sferei cu cavitate. Expresiile constantelor care intervin în soluție se modifică astfel:

$$a_1 = \frac{6S_1}{(S_1-1)^4};\ a_3 = \frac{6}{S_1^3} - \frac{48}{S_1^4} - \frac{1-\sigma^3}{\sigma^3 S_1}. \tag{153}$$

$$a_4 = \frac{6}{S_1^3} - \frac{2}{S_1^2} + \frac{2}{\sigma^3 S_1^2} + \frac{1-\sigma^3}{\sigma^3}, \tag{154}$$

$$a_5 = \frac{6}{S_1^3} - \frac{2}{S_1^2} - \frac{1}{\sigma^3 S_1^2} - \frac{1-\sigma^3}{\sigma^3}, \tag{155}$$

$$\frac{B_2}{S_2^2} = -\frac{3}{S_1^2} A_1;\ B_1 = -\frac{1}{\sigma^3} A_1, \tag{156}$$

$$B_0 = -\frac{1-\sigma^3}{\sigma^3} A_1;\ B_2 = 0,$$

$$A_1^* = \frac{D_1}{D} A_1;\ B_1^* = \frac{D_2}{D} A_1;\ C_1^* = \frac{D_3}{D} A_1, \tag{157}$$

$$A_0 = 2 + (G_{11}D_1 - G_{12}D_2 - G_{13}D_3 - a_4 D)\frac{A_1}{D}, \tag{158}$$

$$A_1 = 3D\{(F_{11} + G_{11})D_1 + (F_{12} + G_{12})D_2 + (F_{13} + G_{13})D_3 + (a_4 - a_5)D\}^{-1} \tag{159}$$

în care $D_j (j = 1, 2, 3)$ se modifică în mod corespunzător.

MIȘCAREA FLUIDULUI VÎSCOS ÎN NUMERE REYNOLDS MICI ÎN PREZENȚA SFEREI CU MIEZ IMPERMEABIL

Dacă în soluția generală pentru sfera neomogenă îl facem pe $S_2 \to \infty$ vom obține mișcarea în prezența sferei poroase cu incluziune impermeabilă. În acest caz expresiile constantelor se modifică astfel

$$a_1 = \frac{6S_1}{(S_1-1)^4};\quad a_3 = \frac{6}{S_1^3} - \frac{48}{S_1^4} + \frac{2+\sigma^3}{\sigma^3 S_1},$$

$$a_4 = \frac{12}{S_1^3} - \frac{2}{S_1^2} - \frac{4}{\sigma^3 S_1^2} - \frac{2+\sigma^3}{\sigma^3}, \tag{160}$$

$$a_5 = \frac{6}{S_1^3} - \frac{2}{S_1^2} + \frac{2}{\sigma^3 S_1^2} + \frac{2+\sigma^3}{\sigma^3};$$

$$\frac{B_2}{S_2^2} = 0;\quad B_3 = \frac{3}{\sigma^3} A_1;\quad B_1 = \frac{2}{\sigma^3} A_1;\quad B_0 = \frac{2+\sigma^3}{\sigma^3} A_1, \tag{161}$$

$$B_2 = \frac{3}{\sigma^3} A_1,$$

$$A_1^* = \frac{D_1}{D} A_1;\quad B_1^* = \frac{D_2}{D} A_1;\quad C_1^* = \frac{D_3}{D} A_1, \tag{162}$$

$$A_0 = 2 + (G_{11}D_1 - G_{12}D_2 - G_{13}D_3 - a_4 D)\frac{A_1}{D},$$

$$A_1 = 3D\{(F_{11} - G_{11})D_1 + (F_{12} + G_{12})D_2 +$$

$$+ (F_{13} + G_{13})D_3 + (a_4 - a_5)D\}^{-1},$$

cu observația că în expresiile pentru D_j se înlocuiesc a_1, a_3, a_4 și a_5 cu expresiile corespunzătoare pentru $S_2 \to \infty$. Remarcăm din (161) că $B_2 \neq 0$ și ar însemna că în D_2 avem o valoare pentru presiune. Presiunea respectivă va fi presiunea pe care ar avea-o fluidul de filtrație din D_2. Cum în D_2 nu avem fluid, aceasta nu mai are nici o semnificație fizică.

CONCLUZII

Analizînd soluția problemei pusă putem trage următoarele concluzii :

— expresiile vitezelor pe direcția razei vectoare și normale la raza vectoare precum și a presiunilor au aceeași formă ca cele obținute de către Șt. I. Gheorghiță [4], cu observația că expresiile constantelor vor diferi

din cauza stratului intermediar adoptat pe frontiera Γ_0;

— pe frontiera Γ_1 nu poate fi acceptat un strat intermediar de tipul celui adoptat pe Γ_0;

— mișcarea fluidului vîscos în domeniul D_2 este guvernată de legea lui Darcy;

— condițiile de racordare pe frontiera Γ_1 de separare dintre D_1 și D_2 sînt cele pentru fluidul perfect așa cum au fost ele propuse în [4] și pentru medii poroase periodice în [6].

Din soluția generală pentru sfera neomogenă prin trecere la limită pentru $\sigma \to 0$ am obținut cazul sferei omogene care coincide cu soluția obținută în [3]. De remarcat că pentru $S_2 \to 0$ am obținut cazul sferei cu cavitate și soluția diferă de cea obținută în [7] prin faptul că nu conține termeni logaritmici. De asemenea, pentru $S_2 \to \infty$ s-a obținut mișcarea în prezența sferei cu miez impermeabil.

Primită la redacție la 29 noiembrie 1979

BIBLIOGRAFIE

1. K. Yamamoto, *Flow af viscous fluid at Small Reynolds Numbers past a Porous Sphere.* Journal af the Physical Society af Japan, 31, 5, nov (1971).
2. K. Yamamoto ,*Flow of viscous fluid at Small Reynolds Numbers past a Porous Bady.* Journal af the Physical Society of Japan, **34**, *3*, march (1973).
3. C. Grasu, *Asupra mișcării fluidelor viscoase la numere Reynolds mici în prezența corpurilor poroase omogene.* St. cerc. mat. (sub tipar).
4. Șt. I. Gheorghiță, *Introducere în hidrodinamica corpurilor poroase,* Edit. Academiei, București, 1969.
5. Horia I. Ene, *Asupra fenomenelor de suprafață în cazul mișcării fluidelor vîscoase în prezența unor medii poroase.* St. cerc. mat, *6* **30**, (1978).
6. H. I. Ene și E. Sanchez-Palencia, *Equations et phénomènes de surface pour l'écoulement dans un modèle de milieu poreux,* Journal de Mécanique, **14**, *1*, (1975), 73—108.
7. Thérèse Lévy, *Écoulement d'un fluide visqueux, autour d'une enveloppe cylindrique poreuse,* C.R. Acad. Sc. Paris, 277 (19 novembre 1973).
8. St. I. Gheorghiță, *Contribuții la studiul mișcărilor în medii poroase,* St. cerc. mat., **6**, *3—4*, (1955).

CALCULUL STATIC AL SISTEMELOR DE CONDUCTE

de N. POSEA, AL. ANGHEL şi C. KROMEK
Institutul de petrol şi gaze, Ploieşti

Lucrarea prezintă un algoritm general pentru calculul static al sistemelor de conducte cu ramificaţii multiple şi diferite tipuri de rezemări. Bazat pe metoda deplasărilor, algoritmul elaborat cuprinde atît aspectele teoretice, cît şi cele practice privind matricele de rigiditate ale elementelor şi ale structurii, alcătuirea sistemului de ecuaţii şi rezolvarea lui pentru diferite ipoteze de încărcare.
Programul în limbaj Fortran în care a fost transpus algoritmul permite obţinerea eforturilor şi deplasărilor pentru orice combinaţii de încărcări prevăzute, inclusiv variaţii de temperatură şi cedări de reazeme.
Se precizează că acest program, care poate fi folosit pentru orice structură spaţială din bare (drepte şi curbe circulare), constituie prima parte a unui program mai general denumit Calculul static şi dinamic al sistemelor de conducte (CSDC). Partea a doua se va prezenta într-o lucrare ulterioară.

Sistemele de conducte au o foarte mare răspîndire în combinatele chimice, petrochimice, rafinării, întreprinderi termoenergetice, întreprinderi de transport pentru produse petroliere — în general, în toate ramurile industriale.

În prezent, calculul şi proiectarea de rezistenţă a sistemelor de conducte se face în mod simplificat, aproximativ, de multe ori neacoperitor, cu implicaţii nedorite privind buna lor funcţionare.

Aceste deziderate ne-au determinat să elaborăm algoritme privind calculul de rezistenţă, static şi dinamic, bazat pe ipoteze cît mai apropiate de realitate. Ele au fost transpuse în programe pentru calculatoarele electronice şi astfel pot fi aplicate cu uşurinţă în practică.

În lucrarea de faţă se prezintă algoritmul şi programul privind calculul static de rezistenţă al sistemelor de conducte.

1. CONSIDERAŢII PRIVIND CALCULUL STATIC AL SISTEMELOR DE CONDUCTE

Din punct de vedere static, sistemele de conducte cu ramificaţii sînt structuri spaţiale complexe, alcătuite din elemente de tip bară, avînd legături rigide şi elastice cu terenul şi ca încărcări forţe uniform distribuite şi forţe concentrate din greutăţi proprii, sarcini din variaţia de temperatură şi din erori de montaj. Pentru rezolvarea lor, se va prefera metoda deplasărilor, care se pretează la o mecanizare mai uşoară a calculelor.

În această metodă se aleg ca necunoscute deplasările (translaţiile şi rotirile) unor secţiuni, ceea ce conduce la o formă de bază în care toate elementele structurii sînt bare cu capetele încastrate.

ST .CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 6, 1980, P. 833–859

Determinînd matricele de rigiditate ale elementelor structurii, prin care se exprimă relaţiile între eforturile şi deplasările capetelor, se obţin matricele de rigiditate ale nodurilor, matricea de rigiditate a întregii structuri ($\underset{\sim}{R}$) şi sistemul de ecuaţii

$$\underset{\sim}{R}\,\underset{\sim}{z} = \underset{\sim}{F}, \tag{1.1}$$

din care, cunoscînd vectorul forţelor exterioare de la noduri, ($\underset{\sim}{F}$), se obţine vectorul deplasărilor nodurilor ($\underset{\sim}{z}$). Avînd determinate deplasările capetelor fiecărui element ($\underset{\sim}{z}^e$) se obţin eforturile de la capetele barelor prin relaţia matriceală

$$\underset{\sim}{Q}^e = \underset{\sim}{r}^e\,\underset{\sim}{z}^e, \tag{1.2}$$

în care $\underset{\sim}{Q}^e$ reprezintă vectorul eforturilor de la capetele elementului (e) iar $\underset{\sim}{r}^e$ matricea de rigiditate a elementului respectiv.

În consecinţă, algoritmul metodei deplasărilor pentru calculul static al oricărei structuri, oricît de complexă ar fi, se reduce la : stabilirea matricelor $\underset{\sim}{r}^{(e)}$; asamblarea acestora pentru obţinerea matricei $\underset{\sim}{R}$; rezolvarea sistemului (1.1) şi calculul eforturilor cu relaţia (1.2).

2. ALGORITM PENTRU CALCULUL STATIC AL SISTEMELOR DE CONDUCTE CU RAMIFICAŢII ŞI REZEMĂRI MULTIPLE

Se notează cu h, i, j,... nodurile elastice ale sistemului spaţial de conducte (fig. 2.1), adică intersecţiile dintre două sau mai multe bare (drepte sau curbe) şi cu s nodurile corespunzătoare punctelor de rezemare.

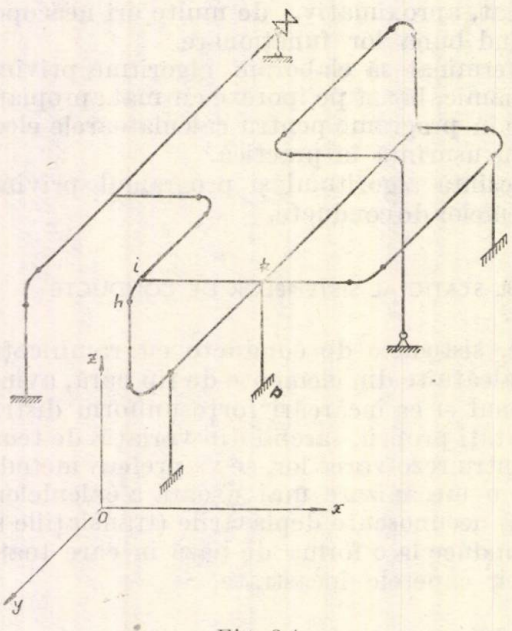


Fig. 2.1.

Se alege un sistem general de axe $xoyz$ (fig. 2.1), faţă de care se precizează coordonatele tuturor nodurilor.

Pentru fiecare element (e) dintre două noduri se precizează un sistem propriu de axe $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, avînd axa $\bar{x}$ după axa elementului şi $\bar{y}$, $\bar{z}$ axele centrale principale de inerţie ale secţiunii transversale a elementului respectiv. Orientarea axelor se alege astfel încît să formeze un sistem stîng. Deplasările unui nod (i) se notează cu vectorul coloană :

$$\underset{\sim}{z}_i = [u\ v\ w\ \varphi^x\ \varphi^y\ \varphi^z]_i^t = \\ = [z_i^1\ z_i^2\ z_i^3\ z_i^4\ z_i^5\ z_i^6]^t, \tag{2.1}$$

unde t indică operaţia de transpunere.

Dacă se grupează translațiile în vectorul $\underset{\sim}{\Delta}_i$ și rotațiile în vectorul $\underset{\sim}{\varphi}_i$, atunci vectorul $\underset{\sim}{z}_i$ se scrie sub forma :

$$\underset{\sim}{z}_i = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\Delta}_i \\ \underset{\sim}{\varphi}_i \end{bmatrix} = [\underset{\sim}{\Delta}_i \; \underset{\sim}{\varphi}_i]^t. \tag{2.1'}$$

Rotațiile se produc în sensul acelor de ceas atunci cînd vectorii corespunzători sînt dirijați în sensul pozitiv al axelor.

Eforturile de la capetele unei bare se aranjează sub forma unor vectori coloană :

— pentru capătul i al elementului (e) :

$$\underset{\sim}{Q}_i^{(e)} = [N_i \; T_i^y \; T_i^z \; M_i^x \; M_i^y \; M_i^z]^t, \tag{2.2}$$

— pentru capătul j al elementului (e) :

$$\underset{\sim}{Q}_j^{(e)} = [N_j T_j^y \; T_j^z \; M_j^x \; M_j^y \; M_j^z]^t. \tag{2.3}$$

Componentele eforturilor $\underset{\sim}{Q}_i^{(e)}$, $\underset{\sim}{Q}_j^{(e)}$ sînt pozitive atunci cînd vectorii corespunzători sînt dirijați în sensurile pozitive ale axelor.

2.1. MATRICEA DE RIGIDITATE A UNEI BARE DREPTE SPAȚIALE ÎN SISTEMUL LOCAL DE AXE

Se consideră o bară dreaptă oarecari ij, raportată la sistemul local de axe $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. Față de sistemul local de axe $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ eforturile de la capetele elementului (e) se aranjează sub forma :

$$\underset{\sim}{\bar{Q}}^{(e)} = [\underset{\sim}{\bar{Q}}_i^{(e)} \; \underset{\sim}{\bar{Q}}_j^{(e)}]^t, \tag{2.4}$$

iar deplasările în vectorul :

$$\underset{\sim}{\bar{z}}^{(e)} = [\underset{\sim}{\bar{z}}_i \; \underset{\sim}{\bar{z}}_j]^t. \tag{2.5}$$

Legătura dintre acești doi vectori se scrie sub forma :

$$\underset{\sim}{\bar{Q}}^{(e)} = \underset{\sim}{\bar{r}}^{(e)} \; \underset{\sim}{\bar{z}}^{(e)}, \tag{2.6}$$

unde $\underset{\sim}{\bar{r}}^{(e)}$ reprezintă matricea de rigiditate a barei i—j în sistemul local de axe $\overline{x\,y\,z}$; are dimensiuni 12×12 și este simetrică.

Prin partiționarea vectorilor $\underset{\sim}{\bar{Q}}_e$, $\underset{\sim}{\bar{z}}_e$, arătată de expresiile (2.4), (2.5), matricea $\underset{\sim}{\bar{r}}_e$ se scrie în forma :

$$\underset{\sim}{\bar{r}}^{(e)} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\bar{r}}_{ii}^{(e)} & \underset{\sim}{\bar{r}}_{ij}^{(e)} \\ \underset{\sim}{\bar{r}}_{ji}^{(e)} & \underset{\sim}{\bar{r}}_{ij}^{(e)} \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

din care rezultă că submatricele $\underset{\sim}{\bar{r}}_{ii}^{(e)}$, $\underset{\sim}{\bar{r}}_{ij}^{(e)}$, $\underset{\sim}{\bar{r}}_{ji}^{(e)}$, $\underset{\sim}{\bar{r}}_{jj}^{(e)}$ au dimensiuni 6×6.

Tabelul 2.1.

$\bar{\mathcal{L}}_{ii}$ $\bar{\mathcal{L}}_{ij}$

$$
\begin{bmatrix} N_i \\ T_i^y \\ T_i^z \\ M_i^x \\ M_i^y \\ M_i^z \\ \hline N_j \\ T_j^y \\ T_j^z \\ M_j^x \\ M_j^y \\ M_j^z \end{bmatrix} =
\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{GI_t}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\
\hline
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\
0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GI_t}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GI}{l} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 \\
0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l}
\end{array}\right]
\begin{bmatrix} v_i \\ v_i \\ w_i \\ \varphi_i^x \\ \varphi_i^y \\ \varphi_i^z \\ \hline v_j \\ v_j \\ w_j \\ \varphi_j^x \\ \varphi_j^y \\ \varphi_j^z \end{bmatrix}
$$

$\bar{\mathcal{L}}_{ji}$ $\bar{\mathcal{L}}_{jj}$

Relația (2.6) se prezintă dezvoltat în tabelul 2.1.

Folosind descompunerile precizate de formulele (2.4), (2.5) și (2.7) relația (2.6) devine :

$$\begin{bmatrix} \bar{Q}_i^{(e)} \\ \bar{Q}_j^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{r}_{ii}^{(e)} & \bar{r}_{ij}^{(e)} \\ \bar{r}_{ji}^{(e)} & \bar{r}_{jj}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{z}_i \\ \bar{z}_j \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

2.2. MATRICEA DE ROTAȚIE A UNUI ELEMENT

Pentru structura în ansamblu este necesar ca necunoscutele **deplasări de noduri** să fie considerate într-un sistem unic, general de axe ***xOyz***. În acest scop deplasările $\bar{z}_i$, $\bar{z}_j$ și eforturile $\bar{Q}_i^{(e)}$, $\bar{Q}_j^{(e)}$, în sistemul **local de axe** al elementului (e), trebuie exprimate în funcție de deplasările z_i, z_j și eforturile $Q_i^{(e)}$, $Q_j^{(e)}$, definite în sistemul general de axe $O\,x\,y\,z$).

Între axele $\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$ și $x\,y\,z$ se stabilește matricea cosinușilor directori sub forma

$$L_0 = \begin{bmatrix} \cos(\bar{x}x) & \cos(\bar{x}y) & \cos(\bar{x}z) \\ \cos(\bar{y}x) & \cos(\bar{y}y) & \cos(\bar{x}z) \\ \cos(\bar{z}x) & \cos(\bar{z}y) & \cos(\bar{z}z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}. \tag{2.9}$$

Întrucît vectorul $\bar{\Delta}_i$ nu depinde de vectorul $\bar{\varphi}_i$ și nici φ_i de Δ_i, relația care exprimă vectorul $\bar{z}_i$ funcție de z_i este

$$\bar{z}_i = L_1 z, \tag{2.10}$$

unde

$$L_1 = \begin{bmatrix} L_0 & O \\ O & L_0 \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

În mod similar deplasărilor, eforturile $\bar{Q}_i^{(e)}$ în sistemul local de axe se exprimă în funcție de eforturile $Q_i^{(e)}$ în sistemul general de axe prin relația

$$\bar{Q}_i^{(e)} = L_1 Q_i^{(e)}, \tag{2.12}$$

Vectorii $\bar{Q}^{(e)}$, $\bar{z}^{(e)}$ se exprimă față de vectorii corespunzători din sistemul general de axe prin

$$\bar{Q}^{(e)} = L\,Q^{(e)}\,;\quad \bar{z}^{(e)} = L\,z^{(e)}, \tag{2.13}$$

în care

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & O \\ O & L_1 \end{bmatrix} = L^{(e)} \tag{2.14}$$

este matricea de rotaţie pentru toate necunoscutele de pe un element oarecare (e), avînd dimensiunile 12×12 şi îndeplineşte condiţia

$$\underset{\sim}{L}^t = \underset{\sim}{L}^{-1}, \text{ la fel ca şi } \underset{\sim}{L}_0^t = \underset{\sim}{T}_0^{-1} \text{ sau } \underset{\sim}{L}_0^t = \underset{\sim}{L}_1^{-1}. \tag{2.15}$$

Pentru definirea matricei $\underset{\sim}{L}$ este deci suficientă cunoaşterea matricei $\underset{\sim}{L}_0$.

În cazul unei bare drepte (fig. 2.2) se consideră drept axă $\overline{Ox}$ a sistemului local, dreapta determinată de capetele barei i—j orientată de la i la j, iar $\overline{Oy}$ şi $\overline{Oz}$ axele centrale principale de inerţie ale secţiunii transversale a elementului (e). În cazul unui cot circular (fig. 2.3), axa $\overline{Ox}$ este dreapta orientată i—j, iar axa locală $\overline{Oy}$ este perpendiculara pe $\overline{Ox}$ din planul cotului, avînd sensul către interiorul curburii cotului şi axa $\overline{Oz}$ perpendiculară pe planul cotului astfel încît sistemul $\overline{Oxyz}$ să fie stîng.

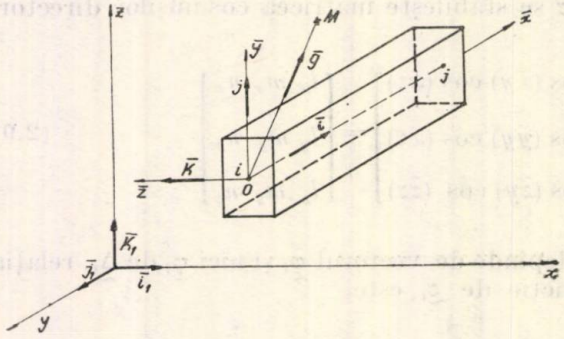


Fig. 2.2.

Stabilirea sistemului local $\overline{Oxyz}$ atît în cazul unui element drept (fig. 2.2), cît şi a unui element curb (fig. 2.3), se face precizînd un punct M în planul axelor locale $\overline{Oxy}$, avînd coordonatele x_M, y_M, z_M faţă de sistemul de axe generale $Oxyz$ (fig. 2.2).

Versorul $\bar{i}$ al axei $\overline{Ox}$ şi versorul $\bar{g}$ al dreptei orientate $\overrightarrow{OM}$ se exprimă în funcţie de versorii sistemului general de axe prin relaţiile

$$\begin{aligned} \bar{i} &= l_x \bar{i}_1 + m_x \bar{j}_1 + n_x \bar{k}_1, \\ \bar{g} &= g_x \bar{i}_1 + g_y \bar{j}_1 + g_z \bar{k}_1, \end{aligned} \tag{2.16}$$

în care

$$l_x = \frac{L_x}{L} \; ; \; m_x = \frac{L_y}{L} \; ; \; n_x = \frac{L_z}{L}, \tag{2.17}$$

$$g_x = \frac{G_x}{G} \; ; \; g_y = \frac{G_y}{G} \; ; \; g = \frac{G_z}{G}$$

se calculează cu ajutorul mărimilor :

$$\begin{aligned} &L_x = x_j - x_i \; ; \; L_y = y_j - y_i \; ; \; L_z = z_j - z_i \; ; \; L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}, \\ &G_x = x_M - x_i \; ; \; G_y = y_M - y_i \; ; \; G_z = z_M - z_i \; ; \; G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Rezultă versorul $\bar{K}$ al axei locale $\overline{Oz}$ din relaţia

$$\bar{K} = \frac{\bar{i} \times \bar{g}}{|\bar{i} \times \bar{g}|}. \tag{2.19}$$

Dacă se exprimă acest vector sub forma

$$\bar{K} = l_z \bar{i}_1 + m_z \bar{j}_1 + n_z \bar{k}_1,$$

şi se identifică cu (2.19), rezultă l_z, m_z, n_z.

Versorul axei locale $\overline{Oy}$ se obţine apoi din relaţia

$$\bar{j} = \bar{k} \times \bar{i}, \tag{2.20}$$

care conduce la determinarea cosinuşilor directori ai axei locale $\overline{Oy}$, l_y, m_y, n_y.

Dacă elementul este drept şi are secţiune circulară (cazul conductelor), deoarece oricare două direcţii ortogonale pot fi luate drept axe $\overline{Oy}$ şi $\overline{Oz}$ locale, punctul M poate fi reprezentat de orice punct ales arbitrar.

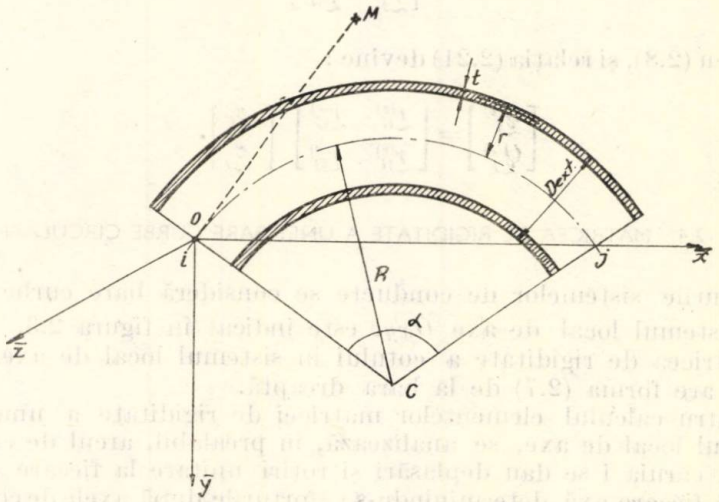


Fig. 2.3.

Dacă elementul este cot cu secţiune circulară, punctul M trebuie ales în planul cotului în afara centrului de curbură al acestuia pentru a rezulta axa locală $\bar{y}$ cu sensul în interiorul curburii (fig. 2.3).

2.3. MATRICEA DE RIGIDITATE A UNEI BARE DREPTE SPAŢIALE, ÎN SISTEMUL GENERAL DE AXE

Pornind de la relaţia (2.6) şi exprimînd vectorii $\underset{\sim}{\bar{Q}}^{(e)}$ şi $\underset{\sim}{\bar{z}}^{(e)}$ prin expresiile (2.13), se obţine relaţia

$$\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{Q}^{(e)} = \underset{\sim}{\bar{r}}^{(e)}\,\underset{\sim}{L}\,\underset{\sim}{z}^{(e)},$$

care, multiplicată la stînga cu $\underset{\sim}{L}^{-1}$ şi ţinînd seama de (2.15), conduce la expresia

$$\underset{\sim}{Q}^{(e)} = \underset{\sim}{L}^t \, \underset{\sim}{\bar{r}}^{(e)} \, \underset{\sim}{L} \, \underset{\sim}{z}^{(e)} = \underset{\sim}{r}^{(e)} \, \underset{\sim}{z}^{(e)}, \tag{2.21}$$

în care

$$\underset{\sim}{r}^{(e)} = \underset{\sim}{L}^t \, \underset{\sim}{\bar{r}}^{(e)} \, \underset{\sim}{L} \tag{2.22}$$

este matricea de rigiditate a elementului (e) faţă de sistemul general de axe $Oxyz$. Această matrice se obţine din matricea de rigiditate a elementului în sistemul local de axe, multiplicată la dreapta cu matricea $\underset{\sim}{L}$ şi la stînga cu $\underset{\sim}{L}^t$.

Folosind componentele

$$\underset{\sim}{Q}^{(e)} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{Q}_i^{(e)} \\ \underset{\sim}{Q}_j^{(e)} \end{bmatrix}; \quad \underset{\sim}{z}^{(e)} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{z}_i \\ \underset{\sim}{z}_j \end{bmatrix},$$

matricea $\underset{\sim}{r}^{(e)}$ se scrie sub forma

$$\underset{\sim}{r}^{(e)} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{r}_{ii}^{(e)} & \underset{\sim}{r}_{ij}^{(e)} \\ \underset{\sim}{r}_{ji}^{(e)} & \underset{\sim}{r}_{jj}^{(e)} \end{bmatrix}, \tag{2.23}$$

similară cu (2.8), şi relaţia (2.21) devine :

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{Q}_i^{(e)} \\ \underset{\sim}{Q}_j^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{r}_{ii}^{(e)} & \underset{\sim}{r}_{ij}^{(e)} \\ \underset{\sim}{r}_{ji}^{(e)} & \underset{\sim}{r}_{jj}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{z}_i \\ \underset{\sim}{z}_j \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

2.4. MATRICEA DE RIGIDITATE A UNEI BARE CURBE CIRCULARE

Coturile sistemelor de conducte se consideră bare curbe circulare plane. Sistemul local de axe $\bar{O}xyz$ este indicat în figura 2.3.

Matricea de rigiditate a cotului în sistemul local de axe, precizat mai sus, are forma (2.7) de la bara dreaptă.

Pentru calculul elementelor matricei de rigiditate a unui cot $\bar{r}^c$, în sistemul local de axe, se analizează, în prealabil, arcul de cerc dublu încastrat, căruia i se dau deplasări şi rotiri unitare la fiecare capăt, pe rînd după fiecare axă, determinîndu-se eforturile după axele de coordonate la ambele capete.

Pentru submatricea $\underset{\sim}{\bar{r}}_{ii}$, scrisă dezvoltat astfel :

$$\underset{\sim}{\bar{r}}_{ii}^{c} = \begin{vmatrix} r_{ii}^{11} & r_{ii}^{12} & r_{ii}^{13} & r_{ii}^{14} & r_{ii}^{15} & r_{ii}^{16} \\ r_{ii}^{21} & r_{ii}^{22} & r_{ii}^{23} & r_{ii}^{24} & r_{ii}^{25} & r_{ii}^{26} \\ r_{ii}^{31} & r_{ii}^{32} & r_{ii}^{33} & r_{ii}^{34} & r_{ii}^{35} & r_{ii}^{36} \\ r_{ii}^{41} & r_{ii}^{42} & r_{ii}^{43} & r_{ii}^{44} & r_{ii}^{45} & r_{ii}^{46} \\ r_{ii}^{51} & r_{ii}^{52} & r_{ii}^{53} & r_{ii}^{54} & r_{ii}^{55} & r_{ii}^{56} \\ r_{ii}^{61} & r_{ii}^{62} & r_{ii}^{63} & r_{ii}^{64} & r_{ii}^{65} & r_{ii}^{66} \end{vmatrix}, \tag{2.25}$$

coeficienții se determină cu relațiile :

$$r_{ii}^{11} = \frac{EI}{R^3}\frac{\delta_{22}\delta_{66} - \delta_{26}^2}{\Delta}\ ;\ r_{ii}^{16} = r_{ii}^{61} = \frac{EI}{R^2}\frac{\delta_{12}\delta_{26} - \delta_{22}\delta_{16}}{\Delta},$$

$$r_{ii}^{22} = \frac{EI}{R^3}\frac{\delta_{11}\delta_{66} - \delta_{16}^2}{\Delta}\ ;\ r_{ii}^{62} = r_{ii}^{26} = \frac{EI}{R^2}\frac{\delta_{12}\delta_{61} - \delta_{11}\delta_{26}}{\Delta},$$

$$r_{ii}^{33} = \frac{EI}{R^3}\frac{\delta_{44}\delta_{55}}{\Delta^*}\ ;\ r_{ii}^{43} = r_{ii}^{34} = \frac{EI}{R^2}\frac{-\delta_{34}\delta_{55}}{\Delta^*}, \tag{2.26}$$

$$r_{ii}^{35} = r_{ii}^{53} = \frac{EI}{R^2}\frac{-\delta_{44}\delta_{53}}{\Delta^*}\ ;\ r_{ii}^{44} = \frac{EI}{R}\frac{\delta_{33}\delta_{55} - \delta_{35}^2}{\Delta^*},$$

$$r_{ii}^{45} = r_{ii}^{54} = \frac{EI}{R}\frac{\delta_{34}\delta_{35}}{\Delta^*}\ ;\ r_{ii}^{55} = \frac{EI}{R}\frac{\delta_{33}\delta_{44} - \delta^2{}_{34}}{\Delta^*},$$

$$r_{ii}^{66} = \frac{EI}{R}\frac{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2}{\Delta}\ ;$$

$$r_{ii}^{12} = r_{ii}^{21} = r_{ii}^{13} = r_{ii}^{31} = r_{ii}^{14} = r_{ii}^{41} = r_{ii}^{15} = r_{ii}^{51} = r_{ri}^{23} = r_{ii}^{32} = r_{ii}^{24} = r_{ii}^{42} =$$

$$= r_{ii}^{43} = r_{ii}^{34} = r_{ii}^{25} = r_{ii}^{52} = r_{ii}^{36} = r_{ii}^{63} = r_{ii}^{46} = r_{ii}^{64} = r_{ii}^{56} = r_{ii}^{65} = 0.$$

Coeficienții δ_{ij} $(i, j = 1, 2 \ldots 6)$ reprezintă deplasările elastice convenționale după direcțiile necunoscutelor X_i $(i = 1, 2, \ldots 6)$ din capătul i al arcului atunci cînd capătul j este încastrat. Expresiile acestora sînt :

$$\delta_{11} = \frac{r^2}{4R^2}\left(\alpha + \sin\alpha\right) + K(0{,}5\alpha - 1{,}5\sin\alpha + \alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\delta_{12} = -K\left(2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 0{,}5\,\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$\delta_{22} = \frac{r^2}{4R^2}(\alpha - \sin\alpha) + K\left(\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2} + 0{,}5\alpha - 0{,}5\sin\alpha\right), \tag{2.27}$$

$$\delta_{26} = -K\,\alpha\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\delta_{33} = (1 + \mu)\,(1{,}5\alpha - 2\sin\alpha + 0{,}25\sin 2\alpha) + K(0{,}5\alpha - 0{,}25\sin 2\alpha),$$

$$\delta_{34} = (1 + \mu)\left(1{,}75 \sin\frac{\alpha}{2} - 0{,}5\alpha\cos\frac{\alpha}{2} - 0{,}25 \sin\frac{3\alpha}{2}\right) +$$

$$+ K\left(0{,}25 \sin\frac{\alpha}{2} - 0{,}5\cos\frac{\alpha}{2} + 0{,}25 \sin\frac{3\alpha}{2}\right),$$

$$\delta_{35} = -(1 + \mu)\left(-0{,}5\alpha \sin\frac{\alpha}{2} + 0{,}25\cos\frac{\alpha}{2} - 0{,}25\cos\frac{3\alpha}{2}\right) +$$

$$+ K\left(0{,}25\cos\frac{\alpha}{2} + 0{,}5 \sin\frac{\alpha}{2} - 0{,}25\cos\frac{3\alpha}{2}\right),$$

$$\delta_{44} = 0{,}5(1 + \mu)(\alpha + \sin\alpha) + 0{,}5\,K(\alpha - \sin\alpha),$$

$$\delta_{55} = 0{,}5\,(1 + \mu)(\alpha - \sin\alpha) + 0{,}5\,K(\alpha + \sin\alpha);\ \delta_{66} = K\alpha,$$

$$\Delta = \delta_{11}(\delta_{22}\,\delta_{66} - \delta_{26}^2)\delta_{16} + (\delta_{12}\,\delta_{26} - \delta_{22}\delta_{16});\ \Delta^* = \delta_{33}\delta_{44}\delta_{55} -$$

$$- \delta_{55}\delta_{34}^2 - \delta_{44}\delta_{35}^2.$$

În relaţiile (2.27) K reprezintă coeficientul de flexibilitate al cotului, definit de expresia

$$K = \frac{1{,}65\,r^2}{tR}, \tag{2.28}$$

precizată în lucrarea [9].

În relaţiile (2.26), (2.27) şi (2.28) simbolurile care intervin au semnificaţiile: E — modulul de elasticitate longitudinală al materialului; R — raza de curbură a axei cotului ; I — momentul de inerţie axial al secţiunii transversale a cotului, r — raza mediană a secţiunii transversale a cotului; α — unghiul la centru al cotului, în radiani; μ — coeficientul lui Poisson; t — grosimea peretelui cotului.

Se notează cu t_{ij} matricea de transmitere de la capătul i la capătul j al cotului, a cărui expresie este

$$\underset{\sim}{t}_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -l & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{2.29}$$

unde l reprezintă distanţa $i-j$:

$$l = 2R \sin\frac{\alpha}{2}. \tag{2.30}$$

Submatricea $\bar{\underset{\sim}{r}}_{ij}^{(c)}$ se determină astfel cu expresia

$$\bar{\underset{\sim}{r}}_{ji}^{(c)} = - \underset{\sim}{t}_{ij}\, \bar{\underset{\sim}{r}}_{ii}. \tag{2.31}$$

Submatricea $\bar{\underset{\sim}{r}}_{ij}^{(c)}$, fiind simetrică cu $\bar{\underset{\sim}{r}}_{ji}$, față de diagonala matricei de rigiditate $\bar{\underset{\sim}{r}}^{(c)}$, există relația $\bar{\underset{\sim}{r}}_{ij}^{(c)} = \bar{\underset{\sim}{r}}_{ji}^{(c)t}$ și folosind (2.31), se obține

$$\bar{\underset{\sim}{r}}_{ij}^{(c)} = - (\underset{\sim}{t}_{ij}\, \bar{\underset{\sim}{r}}_{ii})^t. \tag{2.32}$$

Iar submatricea $\bar{\underset{\sim}{r}}_{jj}^{(c)}$, rezultă conform relației:

$$\bar{\underset{\sim}{r}}_{jj}^{(c)} = - \underset{\sim}{t}_{ij}\, \bar{\underset{\sim}{r}}_{ij}^{(c)} = \underset{\sim}{t}_{ij}\, (\underset{\sim}{t}_{ii}^{(c)} \bar{\underset{\sim}{r}}_{ii}^{(c)})^t. \tag{2.34}$$

2.5. MATRICEA DE RIGIDITATE A COTULUI ÎN SISTEMUL GENERAL DE AXE

La fel ca la o bară dreaptă, pentru calculul rigidității cotului $\underset{\sim}{r}^{(c)}$ în sistemul general de axe se folosește o relație similară cu (2.22):

$$\underset{\sim}{r}^{(c)} = \underset{\sim}{L}_c^t\, \bar{\underset{\sim}{r}}^{(c)}\, \underset{\sim}{L}_c, \tag{2.35}$$

în care $\underset{\sim}{L}_c$ reprezintă matricea de rotație de la sistemul de axe local $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ al cotului la sistemul de axe general al structurii.

Forțele de legătură de la capetele cotului, în sistemul general de axe se exprimă funcție de deplasările $\underset{\sim}{z}_i$, $\underset{\sim}{z}_j$ ale capetelor, de asemenea în sistemul general de axe și de matricea de rigiditate $\underset{\sim}{r}^{(c)}$, astfel:

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{Q}_i^{(c)} \\ \underset{\sim}{Q}_j^{(c)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{r}_{ii}^{(c)} & \underset{\sim}{r}_{ij}^{(c)} \\ \underset{\sim}{r}_{ji}^{(c)} & \underset{\sim}{r}_{jj}^{(c)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{z}_i \\ \underset{\sim}{z}_j \end{bmatrix}. \tag{2.36}$$

2.6. EFORTURI DE ÎNCASTRARE PERFECTĂ ÎN CAZUL BARELOR DREPTE

2.6.1. Încărcări cu sarcini uniform distribuite și forțe concentrate

Se consideră o bară dreaptă încastrată la capetele i și j, acționată de forțe uniform distribuite pe toată lungimea de intensități q_x, q_y, q_z și de forțe concentrate $F_k^{(x)}$, $F_k^{(y)}$ și $F_k^{(z)}$ date în sistemul general de axe al structurii $Oxyz$. Se determină intensitățile forțelor uniform distribuite și forțele concentrate în sistemul local de axe al barei $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ notate cu $\bar{q}_x$, $\bar{q}_y$, $\bar{q}_z$ și, respectiv, $\bar{F}_k^{(x)}$, $\bar{F}_k^{(y)}$, $\bar{F}_k^{(z)}$ (fig. 2.4), cu relațiile:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix}}_{\underset{\sim}{L}_0} \cdot [q_x\, q_y\, q_z] = [\bar{q}_x\, \bar{q}_y\, \bar{q}_z], \tag{2.37}$$

$$\underset{\sim}{L}_0 \cdot [F_k^{(x)}\, F_k^{(y)}\, F_k^{(z)}] = [\bar{F}_k^{(x)}\, \bar{F}_k^{(y)}\, \bar{F}_k^{(z)}].$$

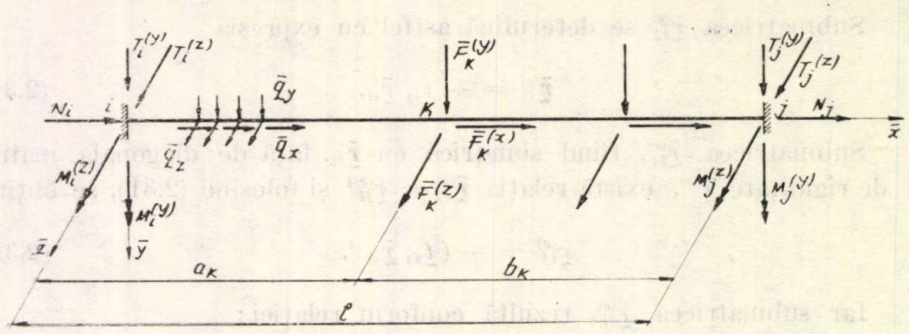


Fig. 2.4

Eforturile de încastrare perfectă în sistemul local de axe, figurate cu sensurile lor pozitive în figura 2.4, sînt date de relaţiile :

$$N_i^{(x)} = -\frac{\bar{q}_x \cdot l}{2} + \sum_k \frac{-\bar{F}_k^{(x)} b_k}{l},$$

$$N_j^{(x)} = -\frac{\bar{q}_x \cdot l}{2} + \sum_k \left(\frac{\bar{F}_k^{(x)} b_k}{l}\right),$$

$$T_i^{(y)} = \frac{\bar{q}_y \cdot l}{2} + \frac{1}{l^3} \sum_k \bar{F}_k^{(y)} a_k b_k (a_k - b_k) + \frac{1}{l} \sum_k (-\bar{F}_k^{(y)} \cdot b_k),$$

$$T_j^{(y)} = -\frac{\bar{q}_y \cdot l}{2} - \frac{1}{l^3} \sum_k \bar{F}_k^{(y)} a_k b_k (a - b_k) + \frac{1}{l} \sum_k (-\bar{F}_k^{(y)} \cdot a_k),$$

$$T_i^{(z)} = -\frac{\bar{q}_z \cdot l}{2} - \frac{1}{l^3} \sum_k \bar{F}_k^{(z)} a_k b_k (b_k - a_k) + \frac{1}{l} \sum_k (-\bar{F}_k^{(z)} b_k), \tag{2.38}$$

$$T_j^{(z)} = -\frac{\bar{q}_z \cdot l}{2} + \frac{1}{l^3} \sum_k \bar{F}_k^{(z)} a_k b_k (b_k - a_k) + \frac{1}{l} \sum_k (-\bar{F}_k^{(z)} a_k),$$

$$M_i^{(x)} = M_j^{(x)} = 0,$$

$$M_i^{(y)} = \frac{\bar{q}_z \cdot l^2}{12} + \frac{1}{l_2} \sum_k \bar{F}_k^{(z)} a_k b_k^2,$$

$$M_j^{(y)} = -\frac{\bar{q}_z \cdot l^2}{12} + \frac{1}{l^2} \sum_k (-\bar{F}_k^{(z)} a_k^2 b_k),$$

$$M_i^{(z)} = -\frac{\bar{q}_y \cdot l^2}{12} + \frac{1}{l^2} \sum_k (-\bar{F}_k^{(y)} a_k b_k^2),$$

$$M_j^{(z)} = \frac{\bar{q}_y \cdot l^2}{12} + \frac{1}{l^2} \sum_k (\bar{F}_k^{(y)} a_k^2 b_k).$$

Se determină apoi eforturile de încastrare perfectă în sistemul general de axe pentru capătul i notate cu $F_i^1 \dots F_i^6$ și, respectiv, pentru capătul j notate cu $F_j^1 \dots F_j^6$. Vectorul eforturilor de încastrare perfectă în sistemul general se notează cu $\underset{\sim}{\bar{F}}^{(e)}$, are 12 componente și este dat de relația

$$\underset{\sim}{F}^{(e)} = L^{-1}\,\underset{\sim}{\bar{F}}^{(e)}, \tag{2.39}$$

unde cu $\underset{\sim}{F}^{(e)}$ s-a notat vectorul eforturilor în sistemul local dat de relațiile (2.38).

2.6.2. Eforturi produse de variații de temperatură

Se notează cu $t_{1y}^0, t_{2y}^0, t_{1z}^0, t_{2z}^0$ variațiile de temperatură față de situația de montaj ale fețelor secțiunii, y și z fiind direcțiile principale de inerție (fig. 2.5).

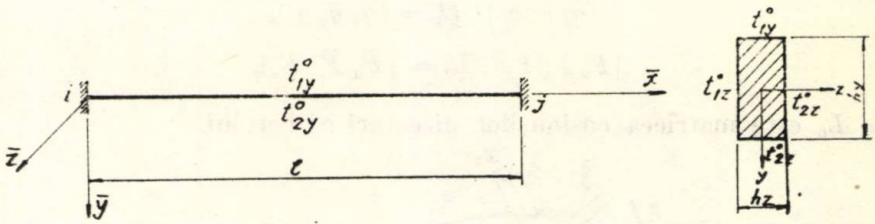


Fig. 2.5

Eforturile de încastrare perfectă în sistemul local de axe al barei se determină cu relațiile:

$$N_i^{(x)} = EA\,\alpha t_y^0 \quad ; \quad N_j^{(x)} = -N_i^{(x)},$$

$$M_i^{(z)} = -\frac{\alpha t_y'^0 EI_z}{h_z} \; ; \quad M_j^{(y)} = -M_i^{(y)}, \tag{2.40}$$

$$M_i^{(y)} = \frac{\alpha t_z'^0 EI}{h_z} \quad ; \quad M_j^{(y)} = -M_i^{(y)},$$

în care

$$t_y^0 = \frac{t_{1y}^0 + t_{2y}^0}{2} \; ; \; t_z^0 = \frac{t_{1z}^0 + t_{2z}^0}{2} \text{ și condiția } t_z^0 = t_y^0,$$

$$t_y'^0 = t_{2y}^0 - t_{1y}^0 ; \; t_z'^0 = t_{2z}^0 - t_{1z}^0,$$

α reprezintă coeficientul de dilatare termică liniară; A — aria secțiunii transversale; I_z, I_y — momentele de inerție ale secțiunii față de axele principale de inerție.

În cazul variațiilor de temperatură numai în ax cu $t°C$ eforturile de încastrare perfectă sînt:

$$N_i^{(x)} = EA\,\alpha t^0 ; \; N_j^{(x)} = -N_i^{(x)}. \tag{2.41}$$

Eforturile de încastrare perfectă date de (2.40) se constituie în vectorul $\widetilde{F}^{(e)}$ după care se determină eforturile de încastrare perfectă din variaţii de temperatură faţă de sistemul general de axe $\underset{\sim}{F}^{(e)}$ conform relaţiei (2.39).

2.7. EFORTURI DE ÎNCASTRARE PERFECTĂ ÎN CAZUL COTURILOR

2.7.1. Încărcări cu sarcini uniform distribuite şi forţe concentrate

Pe un cot încastrat la capetele i şi j, se consideră că acţionează forţele uniform distribuite de intensităţi q_x, q_y, q_z pe toată lungimea cotului şi forţele concentrate F_x, F_y, F_z avînd acelaşi punct de aplicaţie date în sistemul general de axe al structurii $Oxyz$. Se determină în sistemul local de axe al cotului $Oxyz$, forţele uniform distribuite $\bar{q}_x$, $\bar{q}_y$, $\bar{q}_z$ şi forţele concentrate $\bar{F}_x$, $\bar{F}_y$ şi $\bar{F}_z$ avînd acelaşi punct de aplicaţie (fig. 2.6) cu relaţiile:

$$[q_x\, q_y\, q_z] \cdot \underset{\sim}{L}_0^t = [\bar{q}_x\, \bar{q}_y\, \bar{q}_z],$$

$$[F_x\, F_y\, F_z] \cdot \underset{\sim}{L}_0^t = [\bar{F}_x\, \bar{F}_y\, \bar{F}_z], \tag{2.42}$$

unde L_0 este matricea cosinuşilor directori ai cotului.

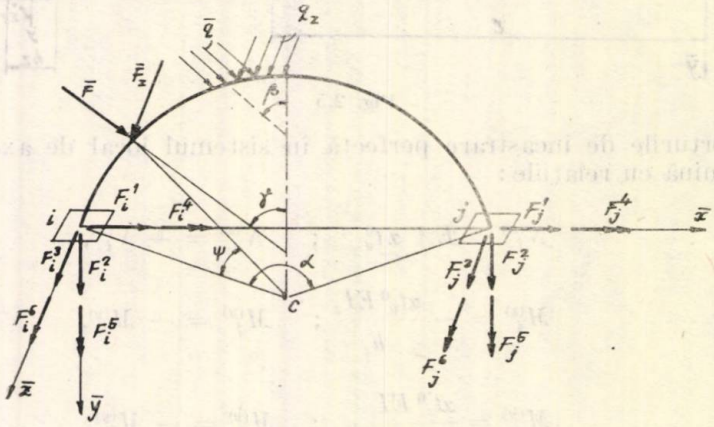


Fig. 2.6

Rezultanta componentelor $\bar{q}_x$, $\bar{q}_y$ se va găsi deci în planul cotului şi este definită de:

$$\bar{q} = \sqrt{\bar{q}_x^2 + \bar{q}_y^2} \quad ; \quad \sin\beta = \frac{\bar{q}_x}{\bar{q}} \; ; \; \cos\beta = \frac{\bar{q}_y}{\bar{q}} . \tag{2.43}$$

De asemenea, rezultanta componentelor $\bar{F}_x$, $\bar{F}_y$ este în planul cotului (fig. 2.6) şi este definită de:

$$\bar{F} = \sqrt{\bar{F}_x^2 + \bar{F}_y^2} \; ; \; \sin\gamma = \frac{\bar{F}_x}{\bar{F}} \; ; \; \cos\gamma = \frac{\bar{F}_y}{\bar{F}} . \tag{2.44}$$

Punctul de aplicaţie al forţelor $\bar{F}$ şi $\bar{F}_z$ este definit de unghiul ψ.

Eforturile de încastrare perfectă, în sistemul local de axe, sînt precizate în figura 2.6 cu sensurile pozitive. Acestea se constituie în vectorul coloană

$$\underset{\sim}{\bar{F}}^{(c)} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{\bar{F}}_i \\ \\ \underset{\sim}{\bar{F}}_j \end{bmatrix}, \tag{2.45}$$

avînd 12 componente.

Suprimînd încastrarea i, necunoscutele $F_i^1 \ldots F_i^6$ rezultă din sistemul de ecuații:

$$\sum_{h=1}^{6} \bar{F}_i^h \delta_{gh} + \Delta_{g0} = 0, \text{ unde } g = 1 \ldots 6. \tag{2.46}$$

Coeficienții δ_{gh} au fost precizați în § 2.4, iar coeficienții Δ_{g0} reprezentînd translații sau rotații după axele de coordonate ale capătului liber i al cotului, produse de sarcinile precizate în figura 2.6, se determină cu formula Maxwell-Mohr și sînt calculați în lucrarea [2]. După aflarea necunoscutelor $\bar{F}_i^h$ $(h = 1 \ldots 6)$ se determină necunoscutele $\bar{F}_j^h$ $(h = 1 \ldots 6)$ prin reducerea forțelor de la capătul liber i. În lucrarea [2] sînt calculate cele 12 componente $\bar{F}_i^h$ și $\bar{F}_j^h$ $(h = 1 \ldots 6)$.

Vectorul eforturilor de încastrare perfectă $\underset{\sim}{F}^{(c)}$, față de sistemul general, se determină cu relația:

$$\underset{\sim}{F}^{(c)} = \underset{\sim}{L}^{-1} \underset{\sim}{\bar{F}}^{(c)}. \tag{2.47}$$

2.7.2. Eforturi din variații de temperatură

Se notează cu t_1^b, t_2^b, t_1^n, t_2^n variațiile de temperatură față de situația de montaj ale fețelor secțiunii transversale a cotului (fig. 2.7), unde On este axa din planul cotului avînd sensul către centrul de curbură, iar Ob, perpendiculară pe planul cotului (sistemul de axe $otnb$ este un sistem stîng, axa Ot fiind tangentă la axa cotului cu sensul pozitiv de la i la j).

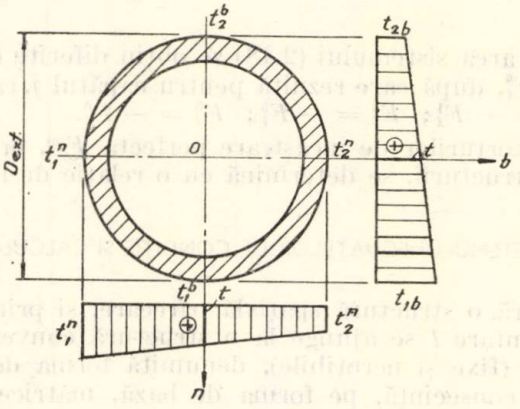


Fig. 2.7

Astfel, pe un cot încastrat la capetele i şi j, supus la aceste variaţii de temperatură, eforturile la capete sînt $\bar{F}_i^1 \ldots \bar{F}_i^6, \bar{F}_j^1 \ldots \bar{F}_j^6$ (fig. 2.6).

Suprimînd încastrarea i, necunoscutele $\bar{F}_i^1 \ldots \bar{F}_i^6$ rezultă din sistemul:

$$\sum_{h=1}^{n} \bar{F}_i^h \, \delta_{gh} + \Delta_{gt} = 0, \text{ unde } g = 1 \ldots 6. \tag{2.48}$$

Coeficienţii Δ_{gt} se determină cu formula Maxwell-Mohr şi au expresiile:

$$\Delta_{1t} = \alpha R \left[-2t \sin \frac{\alpha_c}{2} - \frac{R}{D_{ext}} t'^b \left(2 \sin \frac{\alpha_c}{2} - \alpha_c \cos \frac{\alpha_c}{2} \right) \right],$$

$$\Delta_{2t} = \alpha R \left(- \frac{R}{D_{ext}} t'^b \, \alpha_c \sin \frac{\alpha_c}{2} \right),$$

$$\Delta_{3t} = \alpha R \left(\frac{R}{D_{ext}} t'^n (1 - \cos \alpha_c) \right), \tag{2.49}$$

$$\Delta_{4t} = 0,$$

$$\Delta_{5t} = \alpha \left(2 \frac{R}{D_{ext}} t'^n \sin \frac{\alpha_c}{2} \right),$$

$$\Delta_{6t} = \alpha \left(\frac{R}{D_{ext}} t'^b \, \alpha_c \right),$$

unde α reprezintă coeficientul de dilatare termică liniară; α_c — unghiul la centru al cotului; R — raza de curbură a cotului;

$$t'^b = t_1^b - t_2^b; \; t'^n = t_1^n - t_2^n; \; t^0 = \frac{t_1^n + t_2^n}{2} = \frac{t_1^b + t_2^b}{2}.$$

Prin rezolvarea sistemului (2.48) se obţin diferite de zero doar eforturile F_i^1, F_i^5 şi F_i^6, după care rezultă pentru capătul j, ca diferite de zero, eforturile: $F_j^1 = -F_i^1$; $F_j^5 = -F_i^5$; $F_j^6 = -F_i^6$.

Vectorul eforturilor de încastrare perfectă $\underset{\sim}{F}^{(c)}$, faţă de sistemul de axe general al structurii, se determină cu o relaţie de forma (2.47).

2.8. STABILIREA SISTEMULUI ECUAŢIILOR DE CONDIŢIE ŞI CALCULUL DEPLASĂRILOR

Se consideră o structură spaţială oarecare, şi prin introducerea de legături suplimentare l se ajunge la o structură convenţională cu toate nodurile blocate (fixe şi nerotibile), denumită forma de bază a metodei deplasărilor. În consecinţă, pe forma de bază, matricea de rigiditate a oricărei bare are forma (2.23).

Eforturile de la capetele oricărei bare se determină cu (2.24).

Totalul legăturilor formei de bază se grupează în vectorul

$$\underset{\sim}{R} = [\underset{\sim}{R}_l \; \underset{\sim}{R}_s]^t, \tag{2.50}$$

în care $\underset{\sim}{R}_l$ reprezintă toate legăturile suplimentare introduse structurii reale, iar $\underset{\sim}{R}_s$ toate forțele de legătură din reazeme. $\underset{\sim}{R}_l$ cuprinde toți vectorii-reacțiuni din nodurile $l = 1, 2, \ldots r$ și fiecare din ei poate avea pînă la șase componente.

Folosind scrierea

$$\underset{\sim}{R}_l = [\underset{\sim}{R}_1^b, \underset{\sim}{R}_2^b \ldots \underset{\sim}{R}_l^b, \ldots]^t, \tag{2.51}$$

fiecare componentă va fi:

$$\underset{\sim}{R}_l^b = [R_l^1 \; R_l^2 \; R_l^3 \; R_l^4 \; R_l^5 \; R_l^6]^t. \tag{2.52}$$

Forțele exterioare din nodurile blocate prin legături suplimentare l se notează prin vectorii:

$$\underset{\sim}{F}_l = [F_1^b F_2^b \ldots F_l^b]^t. \tag{2.53}$$

Evident, fiecare din acești vectori-coloană,

$$\underset{\sim}{F}_l^b = [F_l^1 F_l^2 F_l^3 F_l^4 F_l^5 F_l^6], \tag{2.54}$$

reprezintă forțe după x, y, z pentru $b = 1, 2, 3$ și cupluri cu vectorii după x, y, z pentru $b = 4, 5, 6$.

Aceste încărcări exterioare sînt pozitive cînd au vectorii în sensurile pozitive ale axelor generale xyz.

Izolînd toate nodurile formei de bază și scriind echilibrul acestora se obțin ecuațiile necesare pentru determinarea deplasărilor necunoscute și a reacțiunilor din suporți. Echilibrul unui nod i al structurii (fig. 2.8), furnizează șase ecuații pentru cazul spațial și trei ecuații pentru o structură plană.

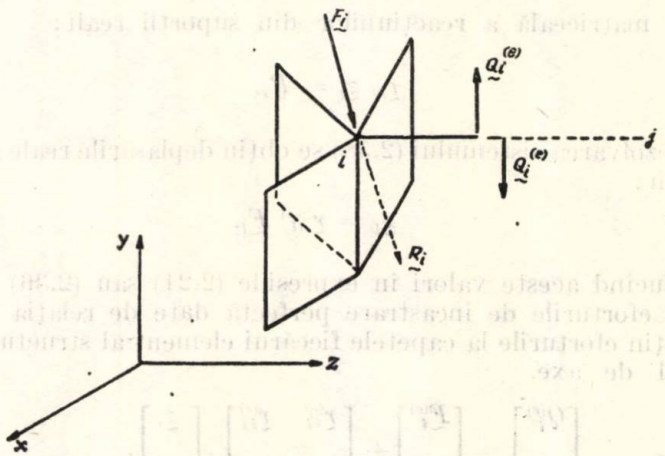


Fig. 2.8

Ţinînd seama că eforturile de la capetele barelor au sensuri contrarii pe noduri, ecuaţia matriceală pentru echilibrul nodului i (fig. 2.8) este

$$\underset{\sim}{R}_i + \underset{\sim}{F}_i - \sum_{(e)} \underset{\sim}{Q}_i^{(e)} = 0. \tag{2.55}$$

în care $\sum_{(e)}$ se referă la toate barele care pleacă din nodul i. Evident, ecuaţia matriceală (2.55) are şase ecuaţii pentru un nod spaţial.

Notînd vectorul deplasărilor

$$\underset{\sim}{z} = [\underset{\sim}{z}_l \; \underset{\sim}{z}_s]^t \tag{2.56}$$

şi folosind expresiile (2.27) sau (2.36) precum şi (2.50), (2.53), echilibrul tuturor nodurilor conduce la sistemul:

$$\underset{\underset{\sim}{r}}{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{r}_{ll} & \underset{\sim}{r}_{ls} \\ \underset{\sim}{r}_{sl} & \underset{\sim}{r}_{ss} \end{bmatrix}} \underset{\underset{\sim}{z}}{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{z}_l \\ \underset{\sim}{z}_s \end{bmatrix}} = \underset{\underset{\sim}{F}}{\begin{bmatrix} \underset{\sim}{F}_l \\ \underset{\sim}{F}_s \end{bmatrix}}, \tag{2.57}$$

în care $\underset{\sim}{r}$ reprezintă matricea generală a întregii structuri, care însumează într-o aranjare impusă de ordinea vectorilor $\underset{\sim}{z}_l$, $\underset{\sim}{z}_s$ matricele tuturor barelor structurii.

Întrucît matricea $\underset{\sim}{r}$ conţine şi elemente corespunzătoare deplasărilor nule $\underset{\sim}{z}_s$, ceea ce ar corespunde structurii libere în spaţiu, rezultă că matricea $\underset{\sim}{r}$ este singulară şi deci nu poate fi inversată.

Pentru $\underset{\sim}{z}_s = 0$, (2.57) se descompune în două:

— sistemul ecuaţiilor de condiţie al metodei deplasărilor:

$$\underset{\sim}{r}_{ll} \cdot \underset{\sim}{z}_l = \underset{\sim}{F}_l; \tag{2.58}$$

— expresia matriceală a reacţiunilor din suporţii reali:

$$\underset{\sim}{r}_{sl} \; \underset{\sim}{z}_l = \underset{\sim}{R}_s. \tag{2.59}$$

Prin rezolvarea sistemului (2.58) se obţin deplasările reale ale nodurilor structurii:

$$\underset{\sim}{z}_l = \underset{\sim}{r} \, \bar{n}^1 \, \underset{\sim}{F}_l. \tag{2.60}$$

Introducînd aceste valori în expresiile (2.24) sau (2.36) la care se suprapun şi eforturile de încastrare perfectă date de relaţia (2.39) sau (2.47), se obţin eforturile la capetele fiecărui element al structurii în sistemul general de axe.

$$\begin{bmatrix} \underset{\sim}{Q}_i^{(e)} \\ \\ \underset{\sim}{Q}_j^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{\sim}{F}_i^{(e)} \\ \\ \underset{\sim}{F}_j^{(e)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underset{\sim}{r}_{ii}^{(e)} & \underset{\sim}{r}_{ij}^{(e)} \\ \\ \underset{\sim}{r}_{ji}^{(e)} & \underset{\sim}{r}_{jj}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underset{\sim}{z}_i \\ \\ \underset{\sim}{z}_j \end{bmatrix}. \tag{2.61}$$

În sistemul de ecuații (2.57), eforturile de încastrare perfectă ale barelor intervin în termenul liber $\underset{\sim}{F}_l$, care se calculează cu expresia:

$$\underset{\sim}{F}_l = \underset{\sim}{F}_{l,n} - \sum_k \underset{\sim}{F}_k^{(e)}, \tag{2.62}$$

în care $\underset{\sim}{F}_{l,n}$ reprezintă vectorul forțelor exterioare (putînd avea șase componente: trei forțe și trei cupluri) aplicate direct în nodul l, iar $\sum_k \underset{\sim}{F}_k^{(e)}$ reprezintă vectorul rezultant al tuturor eforturilor de încastrare perfectă ale capetelor barelor legate în nodul l.

Eforturile și deplasările capetelor barelor în sistemul local de axe se determină din eforturile și deplasările pentru sistemul general de axe, folosind relațiile (2.13).

2.9. INFLUENȚA REAZEMELOR ELASTICE

Se presupune că o legătură oarecare a structurii căreia îi corespunde reacțiunea R_s^b, unde $s = 1,2,\ldots,6$, poate fi oricare dintre reazeme, iar $b = 1,2,\ldots 6$, oricare dintre cele șase legături ale unui reazem spațial este o legătură elastică. Aceasta înseamnă că reacțiunea R_s^b poate fi exprimată în funcție de deplasarea reazemului respectiv prin relația

$$R_s^b = K_s^b z_s^b \tag{2.63}$$

în care K_s^b reprezintă constanta elastică a reazemului respectiv s pe direcția b.

Se vor considera drept necunoscute și deplasările după direcțiile legăturilor elastice, notate cu z_s'. Astfel, numărul necunoscutelor va fi:

$$\underset{\sim}{z}_l' = [\underset{\sim}{z}_l\ ,\ z_s']^t. \tag{2.64}$$

iar numărul reazemelor fără cedări va fi numai $z_s'' = z_s - z_s'$.

Ecuația de echilibru pentru o necunoscută $z_s' = z_h$, folosind (2.55), va fi

$$\sum_{(e)} \underset{\sim}{Q}_h^{(e)} + \underset{\sim}{K}_h \underset{\sim}{z}_h = \underset{\sim}{F}_h \tag{2.65}$$

sau

$$\left(\sum_{(e)} \underset{\sim}{r}_{hh}^{(e)} + \underset{\sim}{K}_h\right) z_h + \sum_e \underset{\sim}{r}_{hj}^{(e)} \cdot \underset{\sim}{z}_j = \underset{\sim}{F}_h. \tag{2.65'}$$

Scriind ecuațiile (2.65') pentru toate nodurile z_l' se obține sistemul:

$$\underset{\sim}{r}_{ll}' \underset{\sim}{z}_l' = \underset{\sim}{F}_l', \tag{2.66}$$

din rezolvarea căruia se obțin necunoscutele z_l' și apoi eforturile prin aplicarea relațiilor (2.61).

Faţă de matricea $\underset{\sim}{r}_{ll}$, matricea $\underset{\sim}{r}'_{ll}$ are dimensiunea $z'_l \times z'_l$ şi conţine pe diagonala principală, şi numai în ecuaţiile corespunzătoare cedările elastice, pe lîngă termenii matricei $\underset{\sim}{r}_{ll}$, constantele elastice ale reazemelor respective.

Existenţa unor tronsoane elastice intercalate (cum ar fi existenţa unor compensatori etc.), alegînd noduri la marginile acestor tronsoane, nu ridică nici o problemă specială pentru calculul eforturilor în algoritmul prezentat mai sus. Astfel, cunoscînd constantele elastice ale acestor tronsoane, se constituie matricea de rigiditate a tronsonului şi acesta se tratează în cadrul algoritmului prezentat ca oricare altă bară.

2.10. INFLUENŢA CEDĂRILOR INIŢIALE DE REAZEME

În cazul unor cedări de reazeme, înseamnă că vectorul $\underset{\sim}{z}_s$ are anumite valori cunoscute $\underset{\sim}{z}_s = \underset{\sim}{z}_s^0$, care constituie o încărcare exterioară pentru structura reală.

Se calculează eforturile de încastrare perfectă pentru fiecare element;

$$\underset{\sim}{F}^{(e)} = \underset{\sim}{r}^{(e)} \cdot \underset{\sim}{z}_s^0 \tag{2.67}$$

şi se determină în nodurile formei de bază a structurii forţele rezultante. Astfel, pentru nodul h se obţine vectorul

$$\underset{\sim}{C}'_h = -\sum_e \underset{\sim}{F}_h^{(e)}, \tag{2.68}$$

care devine termen liber al sistemului (2.66).

Prin rezolvarea sistemului

$$\underset{\sim}{r}'_{ll} \cdot \underset{\sim}{z}'_l = \underset{\sim}{C}'_l \tag{2.69}$$

rezultă necunoscutele $\underset{\sim}{z}'_l$ cu ajutorul cărora, aplicînd (2.61) se determină eforturile produse de cedările de reazeme iniţiale.

2.10. INFLUENŢA VARIAŢIEI DE TEMPERATURĂ

Se notează $\underset{\sim}{F}_{h,t^0}^{(e)}$, vectorul eforturilor de încastrare perfectă din variaţia de temperatură la capătul h al elementului e (determinate aşa cum se arată în § 2.6.2, în cazul elementului drept şi conform § 2.7.2, în cazul unui cot).

Se calculează în nodurile formei de bază a structurii forţele rezultante. Astfel, pentru nodul h se obţine vectorul:

$$\mathcal{F}_{h,t^0} = -\sum_e F_{h,t^0}^{(e)} \tag{2.70}$$

ce se introduce ca încărcare exterioară în sistemul (2.66), care devine:

$$\underset{\sim}{z}'_{ll} \cdot \underset{\sim}{r}'_l = \underset{\sim}{\mathcal{F}}'_{l,t^0}. \tag{2.71}$$

Din rezolvarea sistemului (2.71), se determină deplasările z_i' produse de variația de temperatură și apoi cu relațiile (2.61) se obțin eforturile finale.

3. TRANSPUNEREA ALGORITMULUI ÎN PROGRAM PEMTRU CALCULATOARE NUMERICE

Algoritmele pentru calculul static și calculul la vibrații al sistemelor de conducte au fost transpuse în două lanțuri de programe, asamblate într-un program general denumit prescurtat CSDC, în limbaj Fortran IV.

În continuare se prezintă pe scurt lanțul de programe pentru calculul static în care s-a transpus algoritmul elaborat în capitolul 2. Acest lanț de programe conține următoarele „job-uri" a căror succesiune este: job-ul ELEM, job-ul NOD; job-ul REG; job-ul RG_2, job-ul STATIC.

Sistemul de conducte este considerat ca o înlănțuire de elemente drepte și coturi circulare, cu ramificații, avînd legături rigide și elastice cu terenul. Se iau drept noduri punctele de legătură ale sistemului cu terenul, ale elementelor între ele, precum și cele de ramificații. Codificarea elementelor se face cu numere întregi consecutive începînd cu cifra 1.

În același mod se efectuează și codificarea nodurilor.

Se adoptă un sistem general de axe, ortogonal stîng, față de care se precizează coordonatele nodurilor structurii, coordonatele punctelor M, cîte unul în planul local $\overline{xy}$ al fiecărui element, tipurile de legături, forțele concentrate din noduri precum și forțele uniform distribuite și concentrate de pe elemente.

Cu informațiile referitoare la topologia structurii, datele privind atît caracteristicile geometrice ale secțiunilor elementelor, cît și a caracteristicilor mecanice ale materialelor, a coeficienților de rigiditate a legăturilor elastice, precum și a forțelor concentrate din noduri și a cedărilor inițiale se constituie două fișiere permanente denumite „NODURI" și „ELEM" în cadrul job-urilor „NOD" și respectiv „ELEM".

Job-ul REG folosind datele stocate în fișierele „ELEM" și „NODURI" calculează pentru fiecare element al structurii matricea cosinușilor directori $\underset{\sim}{L}_0$, matricea de rigiditate în sistemul local $\underset{\sim}{r}^{(e)}$ și apoi în sistemul general de axe $\bar{\underset{\sim}{r}}^{(e)}$. Matricea $\underset{\sim}{L}_0$ este păstrată într-un fișier „COS D", iar matricea $\bar{\underset{\sim}{r}}^{(e)}$ în fișierul „REG".

Job-ul RG2, folosind fișierul „REG", alcătuiește matricea de rigiditate a întregii structuri, pe care apoi o rearanjează într-o nouă ordine, impusă de componentele deplasărilor libere ale nodurilor (cu codul 1), componentele cu cedări elastice (cod 2) și componentele blocate (cod O). Noua matrice este depusă în fișierul RG 2. Aici se citesc forțele și variațiile de temperatură pe elemente și se formează termenii liberi ai sistemelor ecuațiilor de condiție pentru următoarele probleme: structura are numai rezemări rigide și este acționată de forțe concentrate și forțe uniform distribuite (problema 1); structura are rezemări rigide și elastice și este acționată de cedări inițiale (problema 2) sau de forțe concentrate și uniform distribuite (problema 3); structura are rezemări rigide și elastice și are drept încărcări variații de temperatură pe fețe sau în ax (problema 4).

În job-ul STATIC se formează mai întîi termenul liber pentru sistemul ecuațiilor de condiție al problemei 2.

Se rezolvă sistemele ecuaţiilor de condiţie pentru oricare din cele patru probleme şi se determină necunoscutele deplasări şi rotiri de noduri, după care se calculează pentru capetele fiecărui element eforturile în sistemul general şi local de axe. Se pot determina deplasările şi eforturile pentru orice combinaţie a celor patru tipuri de probleme.

În figura 3.1, este prezentată schema logică de principiu a job-ului STATIC, din care rezultă datele de ieşire ce sînt tipărite la imprimantă. În lucrarea [2] se dau schemele logice pentru toate joburile precum şi machetele cu modul de introducere a datelor de intrare în program.

Se remarcă faptul că atît algoritmul elaborat, cît şi programul pentru calculator permit calculul static al oricărei structuri spaţiale din bare drepte (elemente de tipul 1) avînd secţiuni transversale diferite de cele circulare.

Prin aceasta programul CSDC poate fi considerat un program general de calcul al structurilor din bare (într-o lucrare viitoare va fi prezentată şi partea de calcul dinamic).

4. APLICAREA PROGRAMULUI CSDC PENTRU UN SISTEM DE CONDUCTE

Se consideră sistemul de conducte din figura 4.1, cu o largă aplicabilitate în rafinării, avînd:

— Diametrul exterior $D_{ext} = 323{,}8$ mm;

— Raza coturilor $R = 457$ mm;

— Grosimea peretelui $t = 9{,}52$ mm;

— Greutatea specifică a fluidului din interior $\gamma_f = 0{,}8$ daN/dm^3

— Greutatea izolaţiei conductei pe un metru liniar

$$G_{iz} = 30{,}8 \text{ daN/m};$$

— Cedarea iniţială a nodului 1, $\Delta x = 0{,}17$ cm;

— Variaţia de temperatură în ax $t^0 = 91°C$ şi coeficientul de dilatare termică al materialului $\alpha = 1{,}1 \cdot 10^{-5}$ cm/cm, °C.

În figura 4.1, s-a făcut numerotarea nodurilor şi a elementelor precizîndu-se şi sistemul general de axe faţă de care se dau, în tabelul 4.1, coordonatele nodurilor şi cedările iniţiale.

Se determină greutatea unui metru liniar de conductă prin însumarea greutăţii proprii a materialului conductei cu a fluidului şi a izolaţiei (162,5 daN/m), care se introduce ca sarcină uniform distribuită pe elemente în cazul problemei 1 sau 3.

Prin rularea părţii de calcul static a programului CSDC se obţin deplasările nodurilor în sistemul general de axe şi eforturile la capetele fiecărui element în sistemul general şi local de axe, separat pentru problema 1 (din forţele uniform distribuite), pentru problema 2 (din cedarea

SCHEMA DE PRINCIPIU A JOB-ULUI STATIC

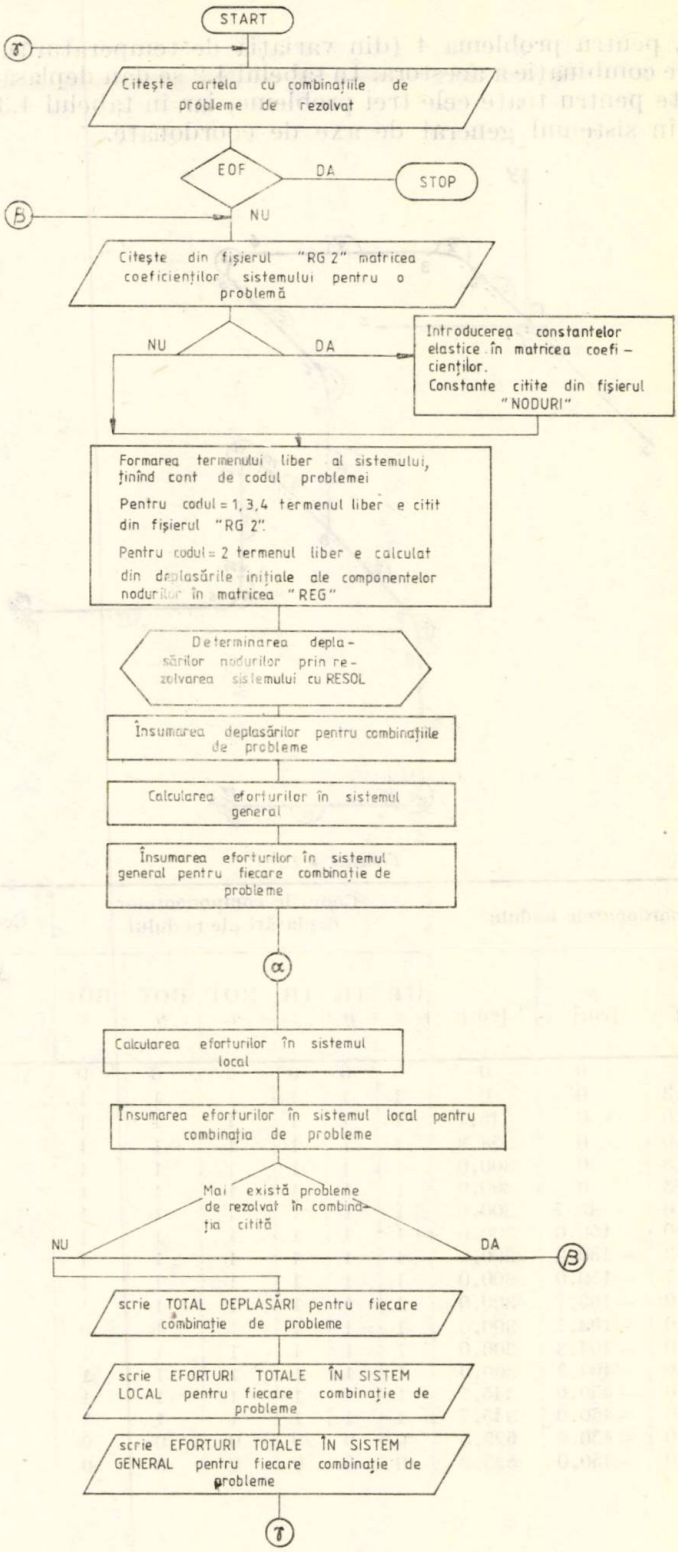


Fig. 3.1

nodului 1), pentru problema 4 (din variaţia de temperatură), precum şi pentru orice combinaţie a acestora. În tabelul 4.2 se dau deplasările nodurilor însumate pentru toate cele trei probleme, iar în tabelul 4.3, eforturile însumate, în sistemul general de axe de coordonate.

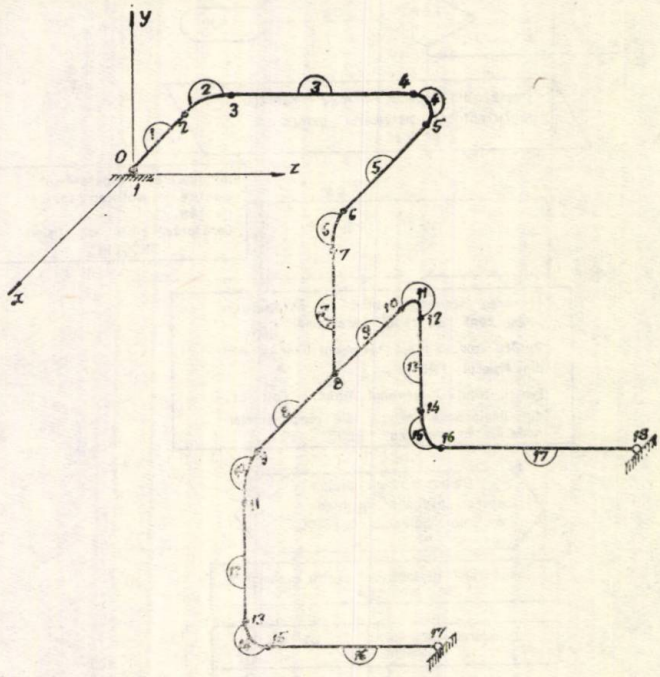


Fig. 4.1

Tabelul 4.1

COD NOD	Coordonatele nodului			Codurile componentelor deplasări ale nodului						Cedări iniţiale
	x [cm]	y [cm]	z [cm]	TR x	TR y	TR z	ROT x	ROT y	ROT z	Δ_x, Δ_y, Δ_z [cm] φ_x, φ_y, φ_z [rad]
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\Delta x = -0,17$
2	−104,3	0	0	1	1	1	1	1	1	—
3	−150,0	0	45,7	1	1	1	1	1	1	—
4	−150,0	0	254,3	1	1	1	1	1	1	—
5	−104,3	0	300,0	1	1	1	1	1	1	—
6	124,3	0	300,0	1	1	1	1	1	1	—
7	170,0	− 45,7	300,0	1	1	1	1	1	1	—
8	170,0	−150,0	300,0	1	1	1	1	1	1	—
9	274,3	−150,0	300,0	1	1	1	1	1	1	—
10	65,7	−150,0	300,0	1	1	1	1	1	1	—
11	320,0	−195,7	300,0	1	1	1	1	1	1	—
12	20,0	−195,7	300,0	1	1	1	1	1	0	—
13	320,0	−404,3	300,0	1	1	1	1	1	1	—
14	20,0	−404,3	300,0	1	1	1	1	1	1	—
15	320,0	−450,0	345,7	1	1	1	1	1	1	—
16	20,0	−450,0	345,7	1	1	1	1	1	1	—
17	320,0	−450,0	525,0	0	0	0	0	0	0	—
18	20,0	−450,0	525,0	0	0	0	0	0	0	—

Tabelul 4.2

COD NOD	Δ_x [cm]	Δ_y [cm]	Δ_z [cm]	φ_x [rad]	φ_y [rad]	φ_z [rad]
1	−0,170	0	0	0	0	0
2	−0,274	−0,014	−0,007	−0,0001	−0,0001	0,0002
3	−0,323	−0,065	−0,033	0,0007	0	0,0011
4	−0,290	−0,215	0,241	0,0007	0,0003	0,0015
5	−0,208	−0,173	0,235	0,0007	0,0015	0,0019
6	0,021	0,275	−0,131	0,0009	0,0015	0,0019
7	0,105	0,289	−0,213	0,0006	0,0007	0,0002
8	0,111	0,185	−0,272	0,0005	0,0003	−0,0001
9	0,215	0,180	−0,303	0,0004	0,0003	−0,0001
10	0,006	0,204	−0,248	0,0004	0,0002	−0,0002
11	0,236	0,120	−0,312	−0,0002	−0,0001	−0,0008
12	−0,045	0,167	−0,259	0,0002	0,0001	0,0001
13	0,056	−0,088	−0,255	−0,0004	−0,0003	−0,0008
14	−0,025	−0,041	−0,244	−0,0004	0,0001	0,0001
15	0,020	−0,098	−0,179	−0,0008	−0,0002	−0,0004
16	−0,014	−0,066	−0,179	−0,0004	0,0001	0,0001
17	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0

5. CONCLUZII

1. Algoritmul pentru calculul sistemelor de conducte elaborat în această lucrare se poate aplica pentru orice configurație geometrică a unei rețele de conducte și pentru orice dispoziție a reazemelor rigide sau elastice. Este necesar însă, ca tronsoanele de conducte, drepte sau curbe, să aibă dimensiuni corespunzătoare pentru a se încadra în teoria barelor drepte sau curbe. Pentru aceasta trebuie îndeplinită condiția $L/D \geqslant 2$.

2. Matricele de rigiditate ale coturilor s-au stabilit prin luarea în considerație a ovalizării secțiunii transversale, ceea ce a condus la o evaluare corectă a conlucrării spațiale a elementelor.

Dacă însă coeficientul k prin care se mărește deformabilitatea unui cot la încovoiere se ia egal cu 1, atunci matricele obținute sînt identice cu ale barelor curbe circulare cu secțiune plină.

În consecință, algoritmul poate fi aplicat pentru orice structură spațială din bare drepte și bare curbe circulare.

3. Prin programul întocmit, deplasările și eforturile se pot obține atît pentru orice ipoteză de încărcare, sarcini (la noduri sau pe bare), variații de temperatură, cedări de reazeme, cît și pentru combinații ale acestora, ceea ce permite obținerea direct de la calculator, a eforturilor maxime pentru verificările de rezistență.

Prin aceasta, activitatea de calcul este mult ușurată, iar proiectantul are mijlocul adecvat pentru optimizarea soluțiilor.

Primită la redacție la 25 martie 1980

Tabelul 4.3

COD element		*Qx* [daN]	*Qy* [daN]	*Qz* [daN]	*Mx* [daNm]	*My* [daN m]	*Mz* [daNm]
1	1	146,93	350,15	375,69	−211,40	466,36	−740,79
	2	−147,00	−180,66	−375,69	211,40	− 74,51	464,15
2	2	147,00	180,91	375,57	−211,40	74,51	−464,15
	3	−147,10	−180,91	−375,57	128,72	164,36	381,47
3	3	147,01	180,13	375,58	−128,72	−164,37	−381,47
	4	−147,01	158,84	−375,61	106,52	471,05	381,47
4	4	146,84	−158,39	375,67	−106,53	−471,05	−381,48
	5	−146,94	158,39	−375,77	178,91	366,47	309,09
5	5	146,62	−158,83	375,72	−178,91	−366,47	−309,09
	6	−146,64	530,31	−375,72	178,91	−492,44	−478,60
6	6	146,58	−530,41	376,25	−178,92	492,44	478,62
	7	−146,70	646,94	−376,25	6,96	−664,40	−673,36
7	7	147,02	−646,71	376,35	− 6,96	664,39	673,36
	8	−147,02	816,14	−376,05	−385,57	−664,39	−520,04
8	8	267,80	−286,26	19,76	258,97	114,26	−207,19
	9	−267,80	455,74	− 19,76	−258,97	−134,86	−179,74
9	8	−120,67	−529,81	356,34	126,59	550,09	727,20
	10	120,65	699,29	−356,34	−126,59	−178,42	− 86,20
10	9	267,81	−455,47	20,17	258,96	134,85	179,73
	11	−267,95	571,97	− 20,17	−268,18	−144,07	−284,77
11	10	−120,85	−699,35	357,18	126,60	178,42	86,20
	12	120,76	815,92	−357,18	−289,83	−151,83	197,55
12	11	268,09	−571,68	20,73	261,18	144,07	284,77
	13	−268,09	910,57	− 20,73	−311,43	−144,07	274,46
13	12	−120,55	−815,40	357,49	289,83	15,18	−197,55
	14	120,55	1154,27	−357,50	−1035,58	− 15,18	− 53,90
14	13	268,10	−910,76	20,88	311,42	144,07	−274,46
	15	−268,10	1027,73	− 20,98	129,14	− 21,54	396,98
15	14	−120,61	−1151,71	355,25	1035,33	15,17	53,89
	16	120,50	1266,45	−357,25	−638,39	− 70,27	−108,98
16	15	268,10	−1027,30	20,93	−129,14	21,55	−396,98
	17	−268,10	1318,67	− 20,95	2232,31	459,15	396,98
17	16	−120,62	−1269,03	357,59	637,98	70,25	108,97
	18	120,62	1560,39	−357,60	1898,86	−286,52	−108,97

BIBLIOGRAFIE

1. N. Posea, C. Kromek, E. Tocaci, Al. Popa, *Cercetări teoretice și elaborarea algoritmilor pentru calculul la vibrații a sistemelor de conducte cu ramificații*, Lucrare de contract de cercetare, *10* (1977), etapa 1978, I.P.C., Ploiești.
2. N. Posea, Al. Anghel, C. Kromek, E. Tocaci, Doina Tudor, *Cercetări teoretice și elaborarea algoritmilor pentru calculul la vibrații a sistemelor de conducte cu ramificații*. Lucrare de contract cu I.C.I.T.P.R., etapa 1979. I.P.G., Ploiești.
3. Dan Căpățînă, *Calculatorul în ajutorul proiectării construcțiilor*, Edit. tehnică, București.
4. Al. Gheorghiu, *Concepții moderne în calculul structurilor*, Edit. tehnică, București.
5. N. Posea, *Rezistența materialelor*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1979.
6. Ch. Massonnet, *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Edit. tehnică, București.
7. Petre Dima, *Programarea în Fortran*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971.
8. Edward L. Wilson, *A static analysis program for three dimensional solid structures*, Denver Mining Research Center, U.S. Department of the Interior Bureau of Miner, September, 1971.
9. * * * *Petroleum refinery piping*, American national standard, Published by engineers, 1973.

CALCULUL HIDRODINAMIC AL PALETAJULUI ROTORIC AL UNEI TURBOMAŞINI AXIALE BULB

II. APLICAREA PRACTICĂ A METODEI. REZULTATE EXPERIMENTALE

de IOAN JELEV

nstitutul de cercetări hidrotehnice — Bucureşti

Cu ajutorul metodei de calcul prezentate în prima parte a lucrării s-au calculat şi proiectat aproximativ 20 de variante de rotoare de turbină, pompă sau turbină-pompă. Pentru ilustrarea posibilităţilor concrete de aplicare a modelului matematic s-au ales două rotoare de turbină-pompă bulb, destinate echipării unor centrale hidroelectrice de pe rîurile Olt şi Mostiştea (cele două rotoare vor fi notate în continuare cu A respectiv B). Ambele rotoare au fost încercate atît în regim de pompare, cît şi de turbinare pe standul de probă al laboratorului de maşini hidraulice din Reşiţa, determinîndu-se caracteristicile energetice şi cavitaţionale ale acestora.

1. ROTORUL A

Pentru calculul rotorului A s-au adoptat următoarele valori ale parametrilor hidraulici:

Regim de turbinare	*Regim de pompare*
$H_t = 10{,}75$ m,	$H_p = 11{,}50$ m,
$Q_t = 52{,}00$ m^3/s,	$Q_p = 48{,}00$ m^3/s,
$n_t = 136{,}36$ rot./min., (1.1)	$n_p = 136{,}36$ rot./min., (1.2)
$Q_{11t} = 1{,}24$,	$Q_{11p} = 1{,}10$,
$n_{11t} = 149$,	$n_{11p} = 143{,}5$,
$D_b/D_1 = 0{,}502$,	$D_b/D_1 = 0{,}502$.

Numărul palelor rotorice este de 4, iar sensul de rotaţie în cele două regimuri este diferit. Pentru ca poziţia palelor în regimul de turbinare şi de pompare să fie aceeaşi sau să necesite o modificare mică, alegerea parametrilor de funcţionare în regim de turbinare şi pompare s-a făcut astfel încît unghiurile β la intrare şi ieşire pentru cele două regimuri să fie cît mai apropiate. Datele adoptate pentru calcule reprezintă valorile medii ale parametrilor hidraulici (1.1) şi (1.2) în regim de pompare şi turbinare. Metoda de calcul utilizată presupune cunoscută forma muchiei de intrare sau de ieşire a palei. În acest scop, pentru muchia de intrare în regim de pompare s-a ales o formă asemănătoare cu cea a muchiei de intrare a palelor unui rotor de pompă existent şi care în timpul încercărilor a dat rezultate bune. Pe butucul rotorului şi pe carcasa exterioară, ca şi la o

distanţă suficient de mare înainte şi după rotor, funcţia de perturbaţie $\varphi(r, z)$ este nulă. Legea de variaţie a cuplului hidraulic este reprezentată în figura 1. Forma ei e apropiată de cea a unei drepte.

Suprafaţa de curent medie dintre pale Θ (r, z), rezultată prin integrarea numerică a ecuaţiilor de mişcare, a fost îmbrăcată cu profile cu o comportare cavitaţională optimă, alese din catalogul de profile. Bordul de atac al profilului s-a aşezat pe muchia de intrare a palei în regim de

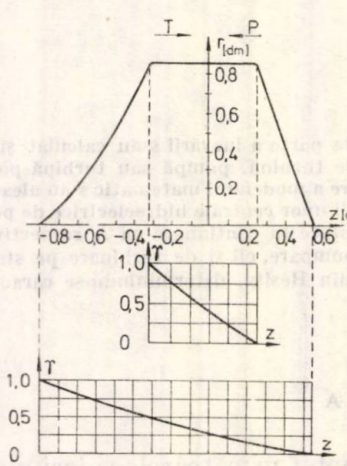


Fig. 1

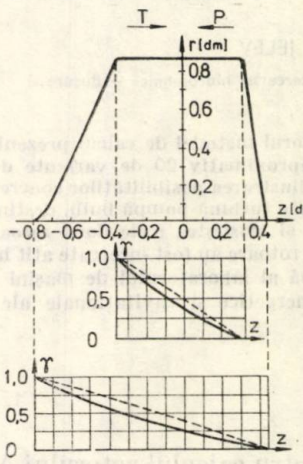


Fig. 2

pompare. Pentru a nu dezavantaja regimul de turbinare, ieşirea palei ca pompă a fost îngroşată şi rotunjită pentru a se apropia de forma unui bord de atac corespunzător funcţionării în regim de turbinare. În figurile 3 şi 4 se prezintă profilele calculate şi vederea palei în plan paralel şi tangenţial. Pentru obţinerea randamentului maxim la pompare, pala trebuie rotită cu 3° în sens invers acelor de ceasornic. Rotunjirea palei la periferie în plan paralel s-a făcut pentru obţinerea unei comportări cavitaţionale mai bune. Pe proiecţiile în plan paralel atît ale palelor rotorului A, cît şi celor ale rotorului B (fig. 4 şi 6) sînt trasate curbele topografice de pe intradosul şi extradosul acestora.

2. ROTORUL B

Scopul urmărit la proiectarea rotorului B a fost obţinerea unei variante îmbunătăţite a rotorului A, printr-o mai bună alegere a parametrilor de calcul. În acest sens, regimurile de funcţionare ca pompă şi turbină s-au ales astfel încît să conducă la valori mai apropiate ale unghiurilor relative β pe muchia de intrare şi ieşire în regim de pompă şi turbină. Ca şi pentru rotorul A, regimul de calcul s-a stabilit ca o medie a regimuri-

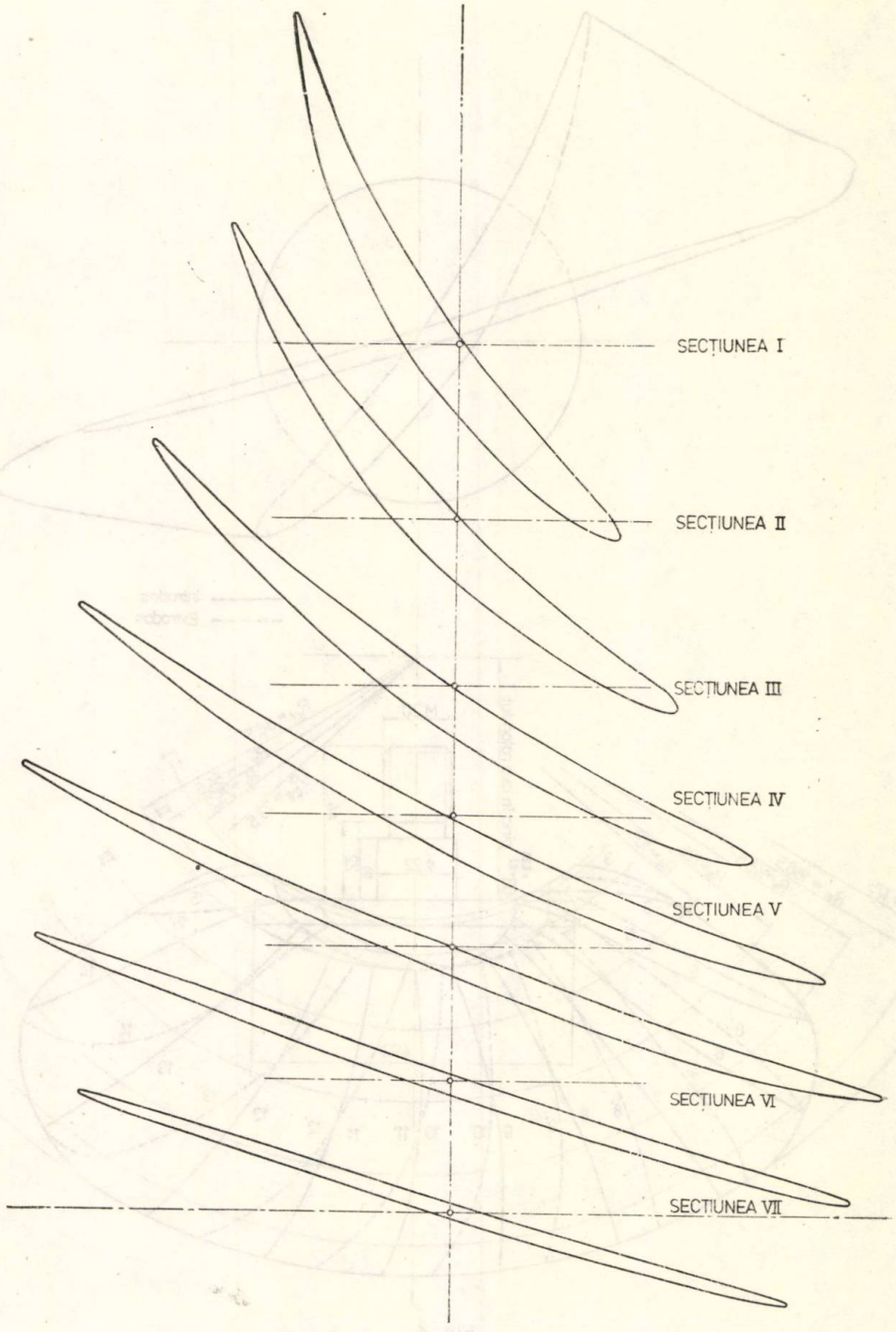

SECȚIUNEA I
SECȚIUNEA II
SECȚIUNEA III
SECȚIUNEA IV
SECȚIUNEA V
SECȚIUNEA VI
SECȚIUNEA VII

Fig. 3

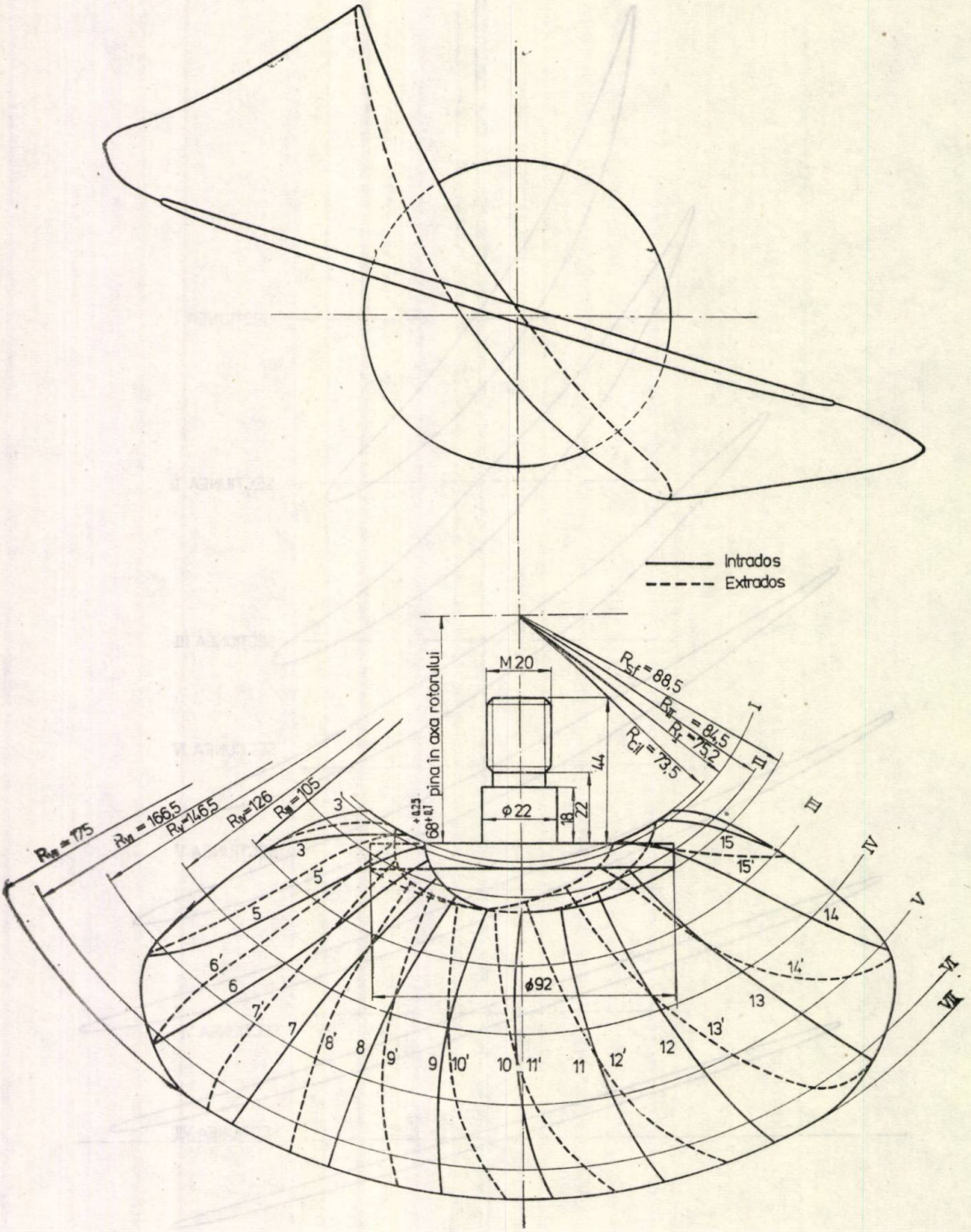

Intrados
Extrados
M20
pina în axa rotorului
R_{sf} = 88,5
R_{II} = 84,5
R_I = 75,2
R_{cil} = 73,5
44
22
18
φ22
φ92
R_{VII} = 175
R_{VI} = 166,5
R_V = 146,5
R_{IV} = 126
R_{III} = 105
I
II
III
IV
V
VI
VII

Fig. 4

lor de pompare şi turbinare (2.1) respectiv (2.2):

Regim de turbinare		*Regim de pompare*	
$H_t = 10{,}75$ m,		$H_p = 13{,}00$ m,	
$Q_t = 68{,}75$ m^3/s,		$Q_p = 75{,}75$ m^3/s,	
$n_t = 136{,}36$ rot./min.,		$n_p = 136{,}36$ rot./min,	
$Q_{11t} = 1{,}26$,	(2.1)	$Q_{11p} = 1{,}25$,	(2.2)
$n_{11t} = 175$,		$n_{11p} = 160$,	
$D_b/D_1 = 0{,}502$,		$D_b/D_1 = 0{,}502$,	
$z = 4$ pale.		$z = 4$ pale.	

Profilarea suprafeţei palei rotorului B s-a făcut urmîndu-se aceeaşi metodologie ca şi în cazul rotorului A. Privită în plan paralel, rotunjirea palei este mult redusă în comparaţie cu primul rotor. Profilele palei în secţiunile de calcul, precum şi vederile în plan paralel şi tangenţial sînt prezentate în figurile 5 şi 6. Pentru muchia de intrare a palei s-a ales o lege de variaţie continuă a valorii $\Theta(r, z)$ apropiată de o dreaptă (cu o curbură mai accentuată lîngă butucul rotorului). Pe conturul domeniului studiat funcţia de perturbaţie $\varphi(r, z)$ este nulă, iar legea de variaţie a produsului $\gamma = r\, V_\theta$, proporţional cu cuplul hidraulic, s-a reprezentat în figura 2. Se remarcă curbura mai pronunţată a legii de distribuţie a cuplului hidraulic, comparativ cu variaţia acestuia în cazul rotorului A. Pentru ambele rotoare s-a determinat repartiţia funcţiei de perturbaţie $\varphi(r, z)$, a componentelor vitezei de perturbaţie $u(r, z)$ şi $w(r, z)$, precum şi suprafeţele de curent axial-simetrice $\psi(r, z)$ în curentul perturbat şi neperturbat. Pentru rotorul B, toate aceste mărimi au fost reprezentate în figurile 7 şi 9. În figura 7.1 se prezintă grafic variaţia perturbaţiei $\varphi(r, z)$ în lungul axei Oz, pentru mai multe valori ale razei (pe butuc, pe carcasa exterioară şi pentru trei raze intermediare). Pe butuc şi carcasa exterioară perturbaţia este nulă. Valoarea maximă se obţine pe muchia de intrare (regim de turbinare) a palei. În rotor are loc o atenuare a perturbaţiei dinspre intrare spre ieşire, pînă cînd aceasta devine neglijabilă la ieşirea din pală. La intrarea în rotor, perturbaţia creşte începînd dinspre palele aparatului director spre muchia de intrare a palei rotorului. În figura 7.2 se reprezintă variaţia perturbaţiei produse de rotor de-a lungul unei radiale, în mai multe puncte situate de-a lungul axei Oz în rotor şi în afara acestuia. Perturbaţia maximă pe direcţia radială are loc în zona mediană a palei, mai aproape însă de butucul rotorului. Spectrul hidrodinamic în plan meridian în jurul carenei bulb, pentru curentul neperturbat este prezentat grafic în figura 7.3 ($D_b/D_1 = 0{,}35$). Liniile punctate reprezintă suprafeţele de curent axial-simetrice modificate ca urmare a perturbaţiei produse de rotor. Variaţia componentelor axială şi radială a vitezelor de perturbaţie de-a lungul mai multor radiale (în rotor şi în afara acestuia) este prezentată în figura 9. Perturbaţiile vitezelor sînt maxime în zona muchiei de intrare a palelor rotorice (funcţionarea în regim de turbină) şi scad rapid înainte şi după rotor. Pe carcasa exterioară şi butuc, datorită vecinătăţii pereţilor solizi, componenta radială a vitezei de perturbaţie este nulă. Valoarea maximă a perturbaţiilor calculate a reprezentat în unele din cazurile studiate $10 \div 15\%$ din valoarea vitezelor curentului neperturbat. În cea mai mare parte a domeniului de mişcare perturbaţiile nu depăşesc

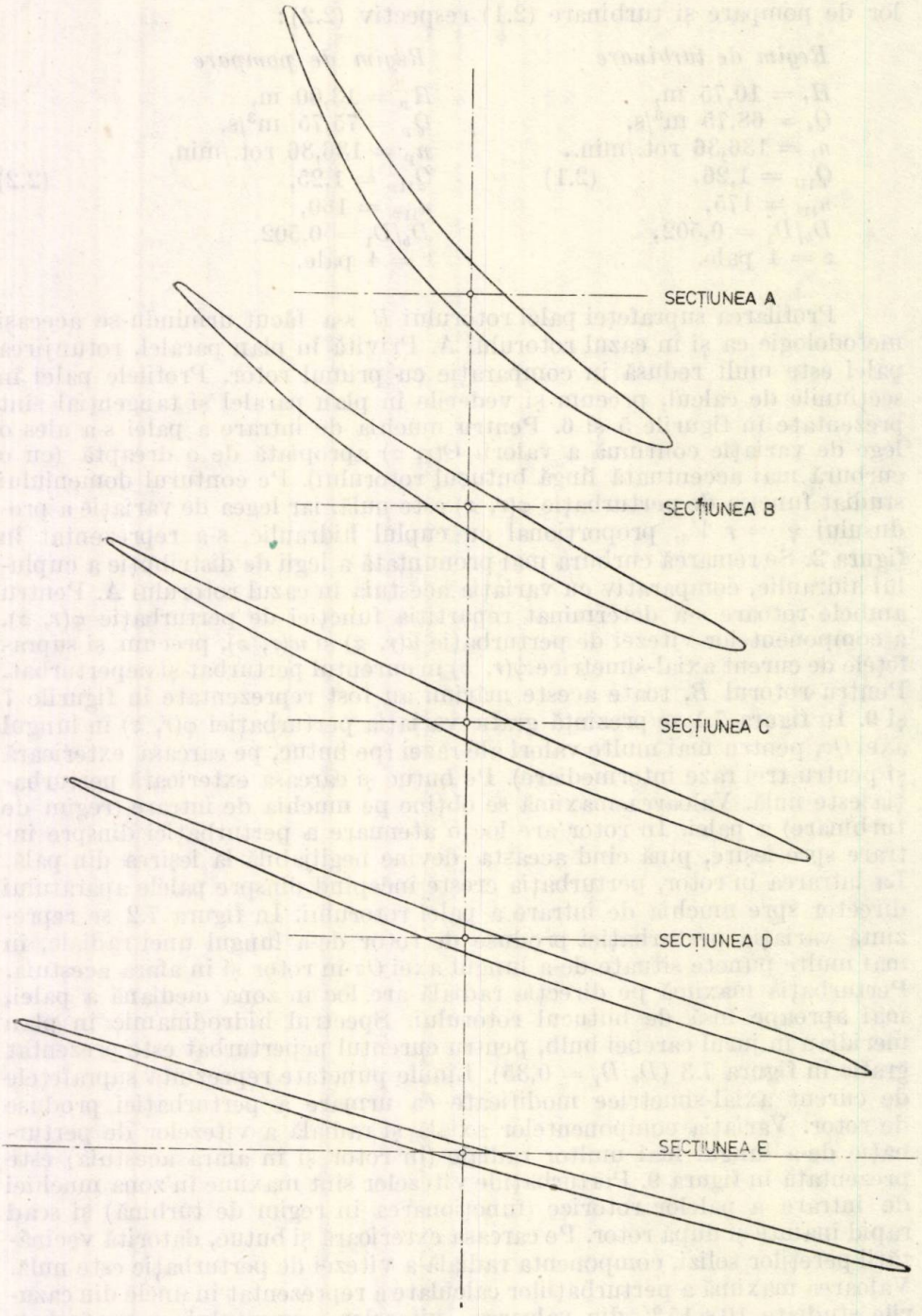

SECȚIUNEA A
SECȚIUNEA B
SECȚIUNEA C
SECȚIUNEA D
SECȚIUNEA E

Fig. 5

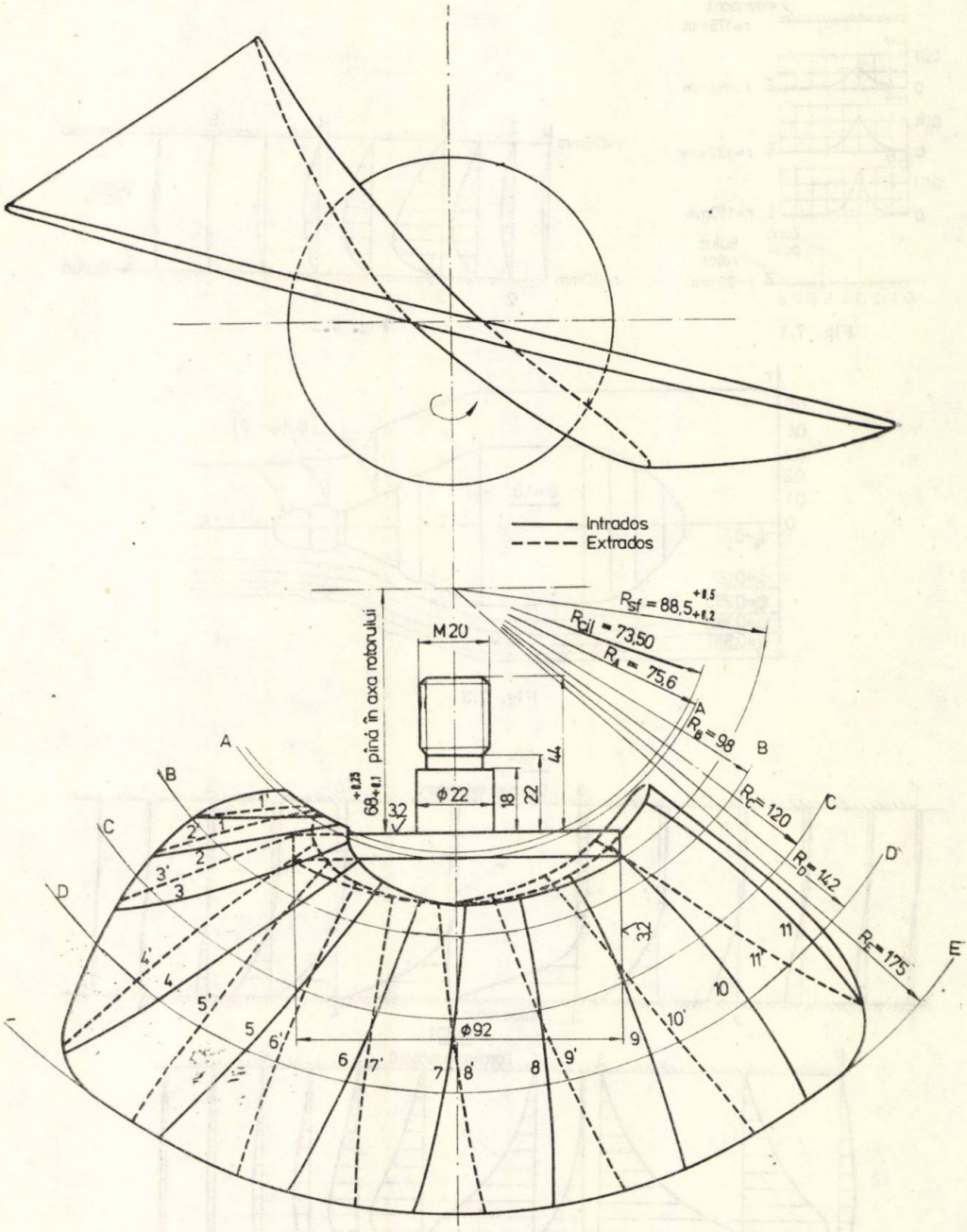

Intrados
Extrados
M20
pînă în axa rotorului
$R_{sf} = 88,5^{+0,5}_{+0,2}$
$R_{cil} = 73,50$
$R_A = 75,6$
$R_B = 98$
$R_C = 120$
$R_D = 142$
$R_E = 175$
$\phi 22$
$\phi 92$
44
22
18
32
A
B
C
D
E

Fig. 6

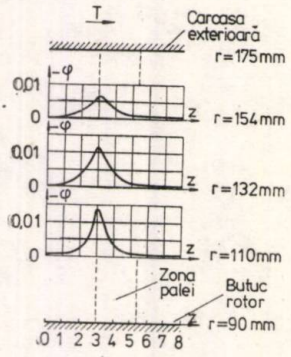


Fig. 7.1

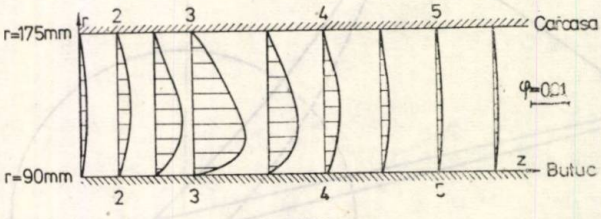


Fig. 7.2

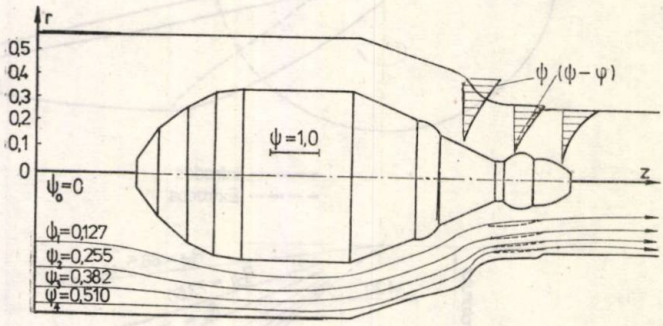


Fig. 7.3

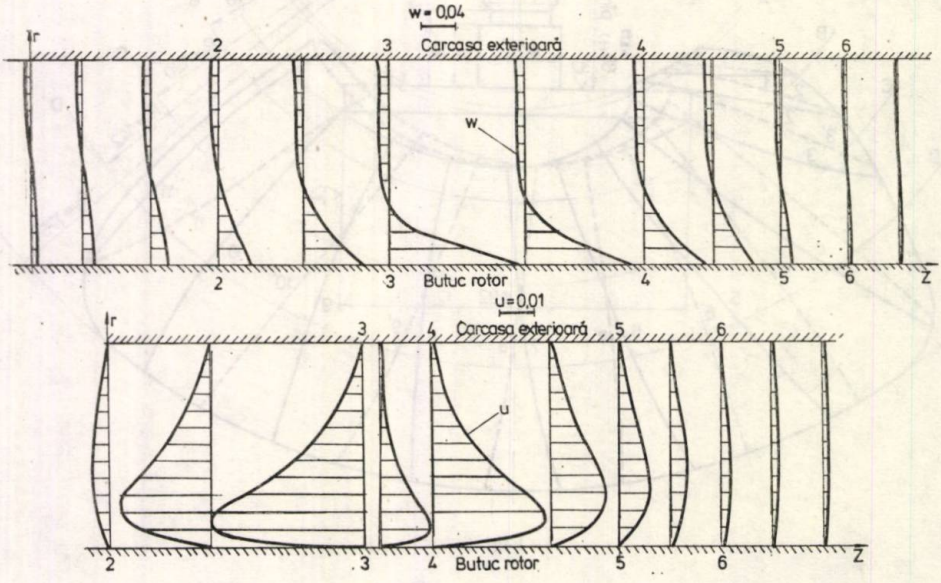


Fig. 8

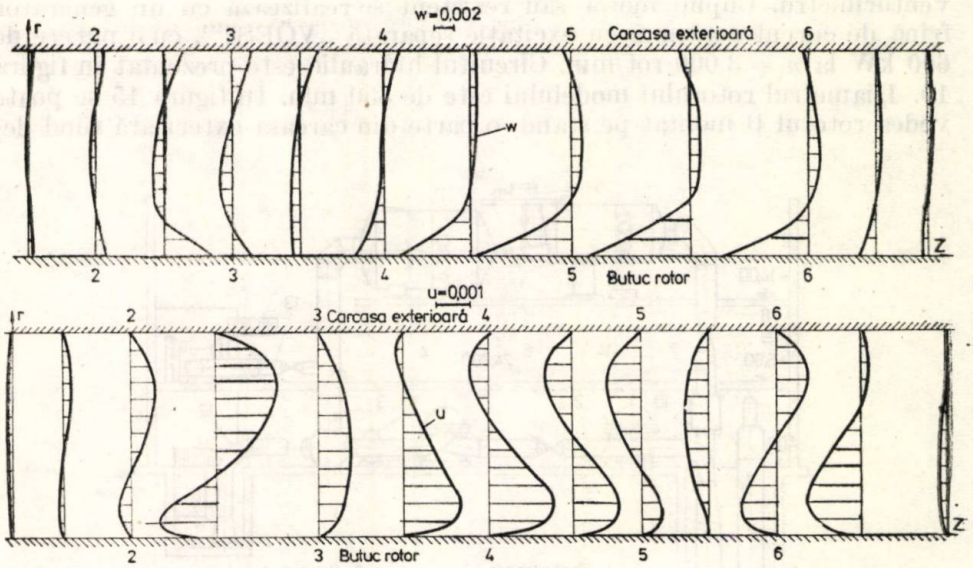


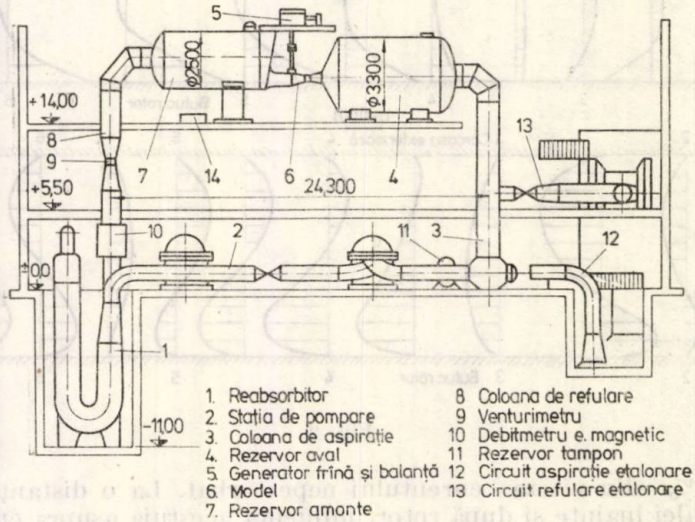
Fig. 9

însă $1 \div 3\%$ din viteza curentului neperturbat. La o distanţă egală cu lăţimea palei înainte şi după rotor, influenţa acestuia asupra curgerii este neglijabilă (nu s-a ţinut seama de perturbaţia produsă de grosimea palelor [1]). În figura 8 se prezintă pentru comparaţie perturbaţiile componentelor radială şi axială a vitezelor obţinute prin calcul, pentru rotorul turbinei Porţile de Fier II. Spre deosebire de rotorul B, nu mai apar schimbările de semn ale componentei radiale a vitezei perturbate. Această schimbare de semn la rotorul B se explică printr-o torsiune diferită a suprafeţei palei.

3. STANDUL EXPERIMENTAL

Standul pentru încercarea turbinelor axiale al laboratorului de maşini hidraulice din Reşiţa dispune de un calculator electronic „DIGITAL PDP—8/L", folosit pentru prelucrarea datelor rezultate din măsurători. Aceste date sînt transformate în mărimi electrice cu ajutorul unor traductori, iar prin intermediul unui dispozitiv de conversie analog-numeric în mărimi discrete ce pot fi prelucrate de calculator. Fiecare valoare prelucrată reprezintă media aritmetică a 100 de valori citite consecutiv la aparate. După prelucrarea rapidă de către calculator, sînt afişate la imprimantă următoarele date şi mărimi finale: deschiderea aparatului director, temperatura aerului şi a apei, turaţia, căderea, presiunea barometrică, contrapresiunea, cuplul măsurat la generatorul frînă, coeficientul de cavitaţie, debitul, turaţia unitară şi randamentul. Pentru măsurarea debitelor standul cu circuit închis dispune de un debitmetru electromagnetic şi un

venturimetru. Cuplul motor sau rezistent se realizează cu un generator frînă de curent continuu cu excitaţie separată „VÖEST", cu o putere de 600 kW la $n = 3\,000$ rot/min. Circuitul hidraulic este prezentat în figura 10. Diametrul rotorului modelului este de 350 mm. În figura 15 se poate vedea rotorul B montat pe stand, o parte din carcasa exterioară fiind de-



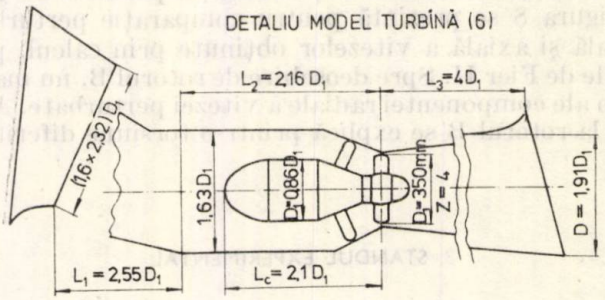


Fig. 10

montată. În fotografie (făcută dinspre ieşire, considerînd funcţionarea ca turbină) se disting butucul rotorului şi cele patru pale. Cele două vederi sînt făcute din partea dreaptă, respectiv stîngă a modelului.

4. REZULTATELE MĂSURĂTORILOR

Rotorul A. Măsurătorile efectuate în laborator au avut ca scop determinarea caracteristicilor energetice şi cavitaţionale ale rotorului. Randamentele maxime la funcţionarea în regim de turbină şi de pompă s-au

obținut pentru următoarele valori ale debitului și turației unitare:

Regim de pompare

$$\begin{aligned} Q_{11p} &= 1{,}59, \\ n_{11p} &= 165, \\ \eta_p &= 72{,}5\,\%, \\ \sigma_p &= 1{,}3, \end{aligned} \tag{4.1}$$

Regim de turbinare

$$\begin{aligned} Q_{11t} &= 1{,}52, \\ n_{11t} &= 124, \\ \eta_t &= 84\,\%, \\ \sigma_t &= 1{,}2. \end{aligned} \tag{4.2}$$

În figura 11 se prezintă topograma pentru regimul de pompare, iar în figura 12 curbele de randament în regim de turbinare. Atît la încercarea rotorului *A*, cît și a rotorului *B*, palele aparatului director, în regim de pompare nu s-au putut regla corespunzător, ele fiind proiectate pentru un regim de turbinare. De asemenea, la pompare nu s-au măsurat pierderile de sarcină datorate carenei bulb. Aceste fapte au contribuit la realizarea unor randamente mai mici la pompare, decît randamentele reale ale rotoarelor încercate. În regim de turbinare, randamentul maxim s-a măsurat pentru valori ale lui n_{11} și Q_{11} apropiate de valorile n_{11} și Q_{11} proiectate. În regim de pompare, în timp ce valorile n_{11} sînt relativ apropiate, valorile Q_{11} proiectat și Q_{11} determinat sînt diferite. Ca urmare, valoarea medie a parametrului n_{11} între regimul de turbinare și pompare coincide

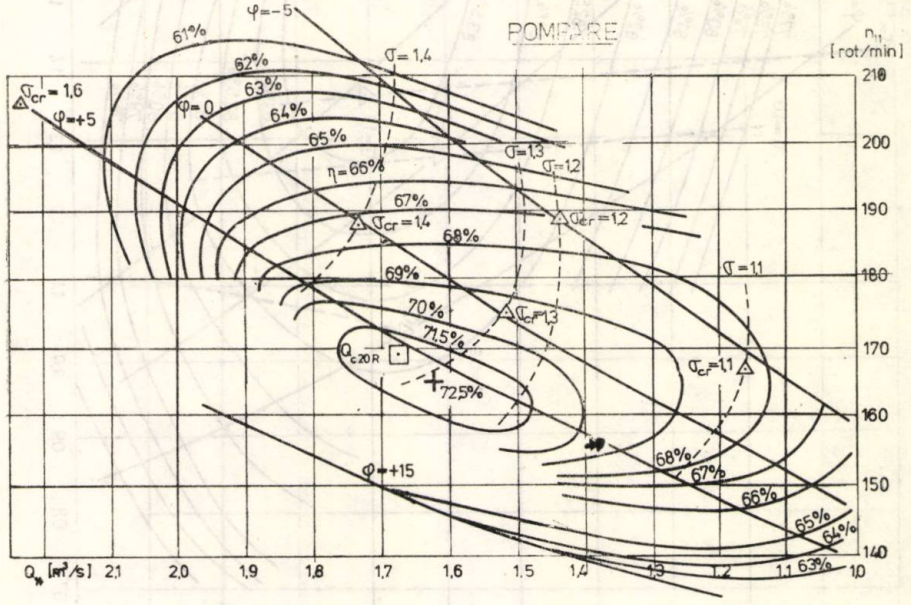


Fig. 11

cu cea folosită pentru calcule spre deosebire de valoarea medie a debitelor dublu unitare care diferă cu 20% față de valoarea folosită în calcul. Din punct de vedere cavitațional, coeficienții σ obținuți se înscriu în limitele uzuale pentru turbomașinile de tip bulb.

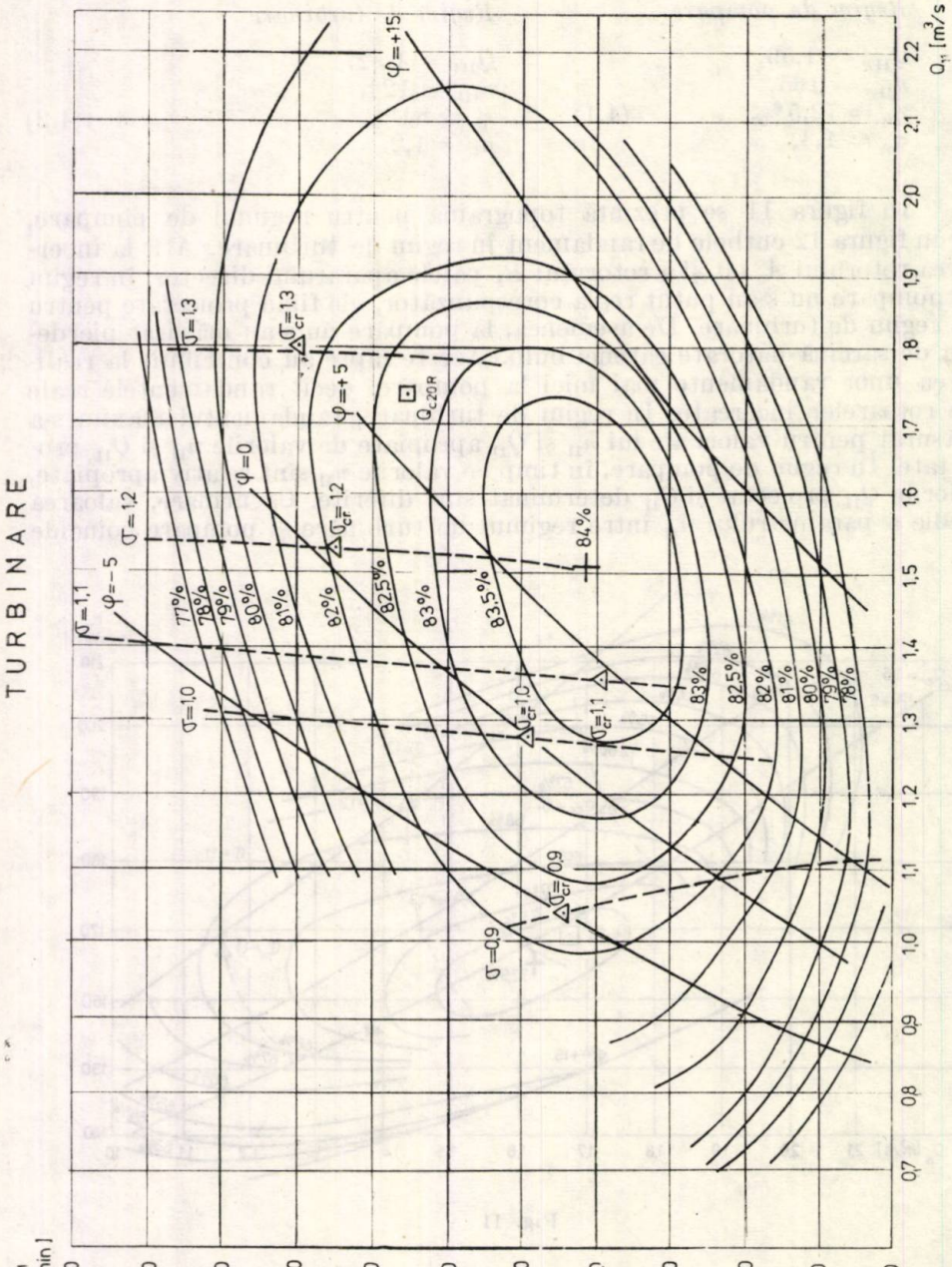

TURBINARE
n_{11} [rot/min]
Q_{11} [m³/s]
φ=+15
φ=+5
φ=0
φ=−5
σ=1,3
σ=1,2
σ=1,1
σ=1,0
σ=0,9
σ_{cr}=1,3
σ_{cr}=1,2
σ_{cr}=1,1
σ_{cr}=1,0
σ_{cr}=0,9
$Q_{c.20R}$
84%
83,5%
83%
82,5%
82%
81%
80%
79%
78%
77%

Fig. 12

Rotorul B. Pentru modelul rotorului B s-au obţinut următoarele randamente maxime în regim de pompare şi turbinare:

Regim de pompare		*Regim de turbinare*	
$Q_{11p} = 1{,}05,$		$Q_{11t} = 1{,}25,$	
$n_{11p} = 176{,}5,$		$n_{11t} = 132{,}5,$	
$\eta_p = 74{,}72\,\%,$	(4.3)	$\eta_t = 85{,}05\,\%,$	(4.4)
$\sigma_p = 1{,}1,$		$\sigma_t = 1{,}21.$	

Curbele de randament în regim de pompare şi turbinare sînt prezentate în fig. 13 şi 14. Din analiza rezultatelor se observă că în regim de pompare randamentele maxime s-au înregistrat pentru valori ale parametrilor Q_{11} şi n_{11} apropiate de cele folosite pentru proiectare. În regim de turbinare, Q_{11} măsurat experimental coincide cu cel anticipat, în timp ce n_{11} diferă de acesta. De remarcat că pentru rotorul B media valorilor parametrilor dublu unitari Q_{11}, respectiv n_{11} determinaţi experimental, este foarte apropiată de valorile medii n_{11} şi Q_{11} folosite pentru calcul. În concluzie, dacă valorile medii ale parametrilor dublu unitari pentru care

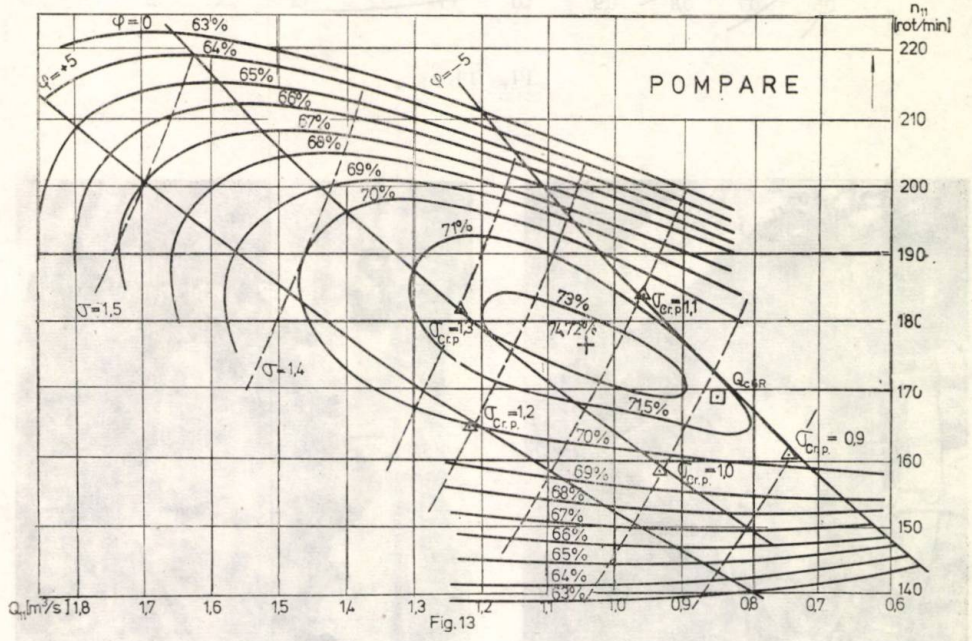


Fig.13

Fig. 13

s-au realizat în cursul experienţelor randamente maxime coincid cu valorile medii folosite pentru calcul, pentru fiecare regim în parte s-au înregistrat unele abateri atît la rotorul A, cît şi la rotorul B, abateri perfect justificabile în cazul maşinilor reversibile. Din punct de vedere cavitaţio-

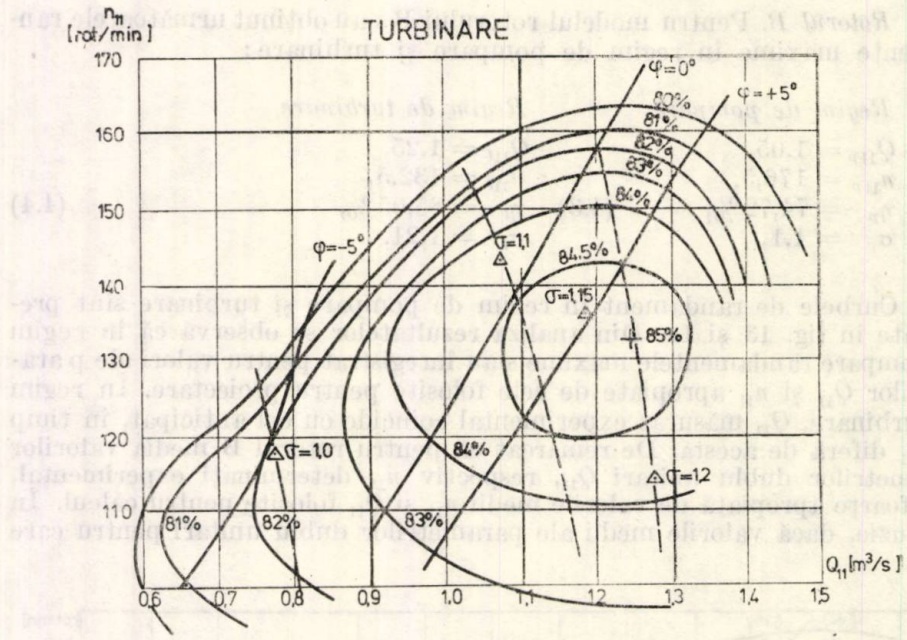

TURBINARE
n_n [rot/min]
170
160
150
140
130
120
110
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5
Q_{11} [m³/s]
φ=0°
φ=+5°
φ=-5°
σ=1,1
σ=1,15
σ=1,0
σ=1,2
81%
82%
83%
84%
84,5%
85%

Fig. 14

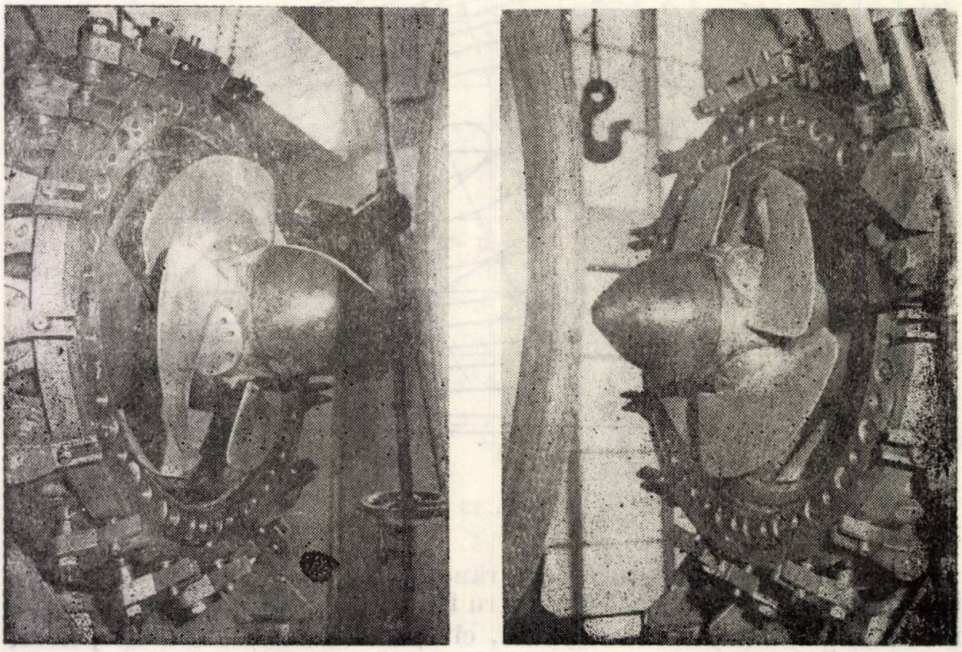


Fig. 15

nal rotorul B s-a comportat mai bine decît rotorul A, coeficienţii σ înscriindu-se în limitele unor valori bune pentru rotoarele din această clasă de maşini hidraulice.

5. RANDAMENTELE OBŢINUTE PENTRU TURBINELE INDUSTRIALE

Randamentele maxime obţinute pentru cele două modele de rotoare s-au transpus în natură pentru două diametre ale rotoarelor turbinelor — pompe ale centralelor hidroelectrice de pe Mostiştea şi Olt ($D_1 = 3{,}5$ m şi $D_1 = 5{,}0$ m). Pentru calcule s-au folosit patru formule diferite de transpunere a randamentelor (D. Pavel, Moody-Morozov, Medici, Proskura). Rezultatele obţinute pentru fiecare rotor şi diametru, atît în regim de pompare, cît şi de turbinare se prezintă în tabelul 1. Fiecare dintre aceste valori reprezintă o medie aritmetică a randamentelor rotoarelor industriale, calculate cu ajutorul celor patru formule.

Tabelul 1

$D_1 = 3{,}5$ m				$D_1 = 5$ m			
Rotorul A		Rotorul B		Rotorul A		Rotorul B	
pompa	turbina	pompa	turbina	pompa	turbina	pompa	turbina
0,834	0,902	0,847	0,909	0,845	0,909	0,857	0,915

Randamentele medii ale regimului de pompare şi turbinare pentru rotoarele industriale ($\eta_m = (\eta_t + \eta_p)/2$) de aproximativ 88,6% sînt comparabile cu performanţele cele mai bune obţinute pentru aceste tipuri de maşini reversibile.

6. CONCLUZII

În prima parte a lucrării s-a formulat problema matematică şi s-au analizat condiţiile la limită necesare pentru ca soluţia să existe şi să fie unic determinată. S-a prezentat schema cu diferenţe finite preconizată pentru integrarea ecuaţiilor de mişcare, iar pe baza algoritmului de rezolvare descris a fost întocmit un program pentru calculatorul electronic. Pentru mişcarea elicoidală omogenă se obţine expresia coeficientului de proporţionalitate k, funcţie de debit, cădere şi turaţie $\left(k = \frac{\text{rot}\,\bar{V}}{\bar{V}} = \right.$

$$\left. = \frac{60 \cdot g \cdot H}{n \cdot Q} \right).$$

Partea a doua cuprinde rezultatele obţinute în urma aplicării metodei preconizate la calculul paletajului a două rotoare de turbină-pompă de tip bulb, destinate echipării unor centrale hidroelectrice de pe rîurile Mostiştea şi Olt. Se descrie standul experimental folosit pentru încercarea celor două rotoare. Rezultatele bune ale măsurătorilor (concretizate prin topogramele obţinute în regim de pompare şi turbinare) confirmă utilita-

tea modelului matematic, care poate fi folosit cu mici modificări și pentru calculul paletajului unor ventilatoare, compresoare sau turbine eoliene de tip axial.

Primită la redacție la 26 februarie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. I. JELEV, *Calculul hidrodinamic al paletajului rotoric al unei turbomașini axiale bulb, Partea I*, St. cerc. mec. apl. (în curs de apariție).

INFILTRAȚIILE GAZEIFERE ÎN IMOBILE GENERATE DE DEFECȚIUNILE CONDUCTELOR

de AL. D. STAN
Institutul de petrol și gaze Ploiești

S. POPOVICIU
Intreprinderea de rețele și instalații de distribuția gazelor naturale Tg.-Mureș

La apariția unui defect într-o conductă, gazele ies prin orificiu și se infiltrează în solul vegetal către suprafața solului. Debitul de gaze care se scurge se mărește pe măsură ce secțiunea orificiului format crește. În situația cînd solul nu este înghețat la suprafață, gazele se scurg în „mediul ambiant, iar în cazul unui sol înghețat superficial se infiltrează către imobile și la apariția unei scîntei, dacă a fost atinsă limita inferioară de explozie, se poate produce explozia acestora. Volumul de gaze scurs în perioada nestaționară a mișcării este, de multe ori, suficient pentru ca în imobile să se formeze un amestec gazos situat între limitele de explozie.
În imobilele cele mai apropiate de orificiu care nu sînt izolate complet de sol pătrund cele mai mari cantități de gaze. În ipoteza unei izolări complete a imobilului față de sol existența unei zone drenate către imobil, cum ar fi o fisură chiar cu dimensiuni neglijabile, face ca prin aceasta să se infiltreze cantități mari de gaze.

1. INTRODUCERE. COMPOZIȚIA GAZELOR TRANSPORTATE

Alimentarea cu gaze a imobilelor a condus în mai multe situații la accidente grave soldate cu distrugerea acestora sau cu vătămarea locatarilor. Din practica distribuției gazelor, aceste accidente se produc mai ales în perioada sezonului rece (lunile noiembrie—martie) și se datoresc, pe de o parte, faptului că atunci presiunile din conducte cresc cu circa 30% și, pe altă parte, tot în această perioadă, imobilele sînt mai puțin ventilate creind, în acest fel, posibilitatea unor acumulări mai mari de gaze. La atingerea limitei inferioare de explozie [11] și în prezența unei scîntei, se poate produce explozia.

Un asemenea caz, s-a produs la un imobil care nu era alimentat cu gaze și era încadrat de două imobile alimentate cu gaze, toate fiind amplasate în apropierea rețelei de distribuție a gazelor. Faptul că la imobilul nealimentat cu gaze s-a produs explozia dovedește că din rețeaua de alimentare s-au infiltrat gaze prin stratul vegetal și au pătruns în imobil.

Gazele transportate au un procent volumetric ridicat de metan. În mai multe buletine de analiză cromatografică aceste procente au depășit 99%. În tabelul 1, se redau principalii componenți dintr-o probă de gaze analizată din rețeaua de distribuție.

Tabelul 1

Componenți	% volumetric	% gravimetric	Densitate
$O_2 + Ar$	0,006	0,012	0,086
N_2	0,376	0,652	0,702
CO_2	0,059	0,162	1,166
Metan	99,411	98,830	711,783
Etan	0,104	0,194	1,401
Propan	0,023	0,065	0,465
2 Metil propan	0,006	0,022	0,160
Butan normal	0,005	0,019	0,135
2 Metil Butan	0,004	0,018	0,129
Pentan normal	0,002	0,009	0,064
Hexan	0,024	0,013	0,093
Heptan	0,0006	0,004	0,027
Total	=100,000	100,000	720,211

2. MIȘCAREA GAZELOR PRIN SOLUL VEGETAL

Apariția unor defecte în conductele de distribuție conduce la ieșirea unor cantități de gaze care se infiltrează prin suprafața solului. Debitul de gaze care iese printr-un orificiu se poate calcula cu relația [4,8]

$$Q = \alpha \cdot v \cdot S, \tag{1}$$

α este coeficientul de debit, v — viteza de scurgere prin orificiu, S — secțiunea acestuia.

Se cunoaște că α depinde de geometria orificiului și de numărul lui Reynolds al mișcării gazelor prin orificiu. Cele mai mari valori ale lui α sînt pentru regimul turbulent de curgere și cele mai mici la regimuri laminare de curgere. Pentru un ajutaj înecat cu diametrul interior de 0,6 cm și lungimea de 6 cm în laboratorul de mecanica fluidelor de la Institutul de petrol și gaze din Ploiești, s-a determinat coeficientul α în funcție de numărul lui Reynolds, acesta fiind definit cu viteza medie din ajutaj și cu diametrul interior al ajutajului (fig. 1). Experimentele s-au efectuat cu apă la temperatura de 18°C, pentru care s-a apreciat o vîscozitate cinematică de $1{,}055 \times 10^{-2}$ cm^2/s.

Se observă că pe măsură ce numărul lui Reynolds a crescut, coeficientul α s-a mărit. Acest rezultat dovedește că la mărirea secțiunii orificiului, debitul de gaze scurs prin acesta crește atît datorită măririi lui S, cît și coeficientului de debit α. Viteza medie de curgere prin ajutaj, la experimentele efectuate, s-a calculat cu relația lui Toricelli. Pe aceeași figură s-a trasat, tot în funcție de numărul lui Reynolds, definit anterior, și coeficientul α_1 care ar corespunde la același ajutaj de lungime neglijabilă. Valorile lui α_1 s-au calculat din cele ale lui α cu relația

$$\alpha_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{1 - \frac{l}{d}\lambda\alpha_2}},$$

l este lungimea ajutajului cu diametrul interior d, λ — coeficientul de rezistență care s-a calculat în funcție de numărul lui Reynolds cu relațiile cunoscute [7].

Imediat ce gazele ies din conductă se scurg prin mediul poros către suprafața solului. În perioada rece a anului, solul este înghețat la suprafață, constituind o zonă impermeabilă și, din acest motiv, gazele se scurg către imobilele învecinate.

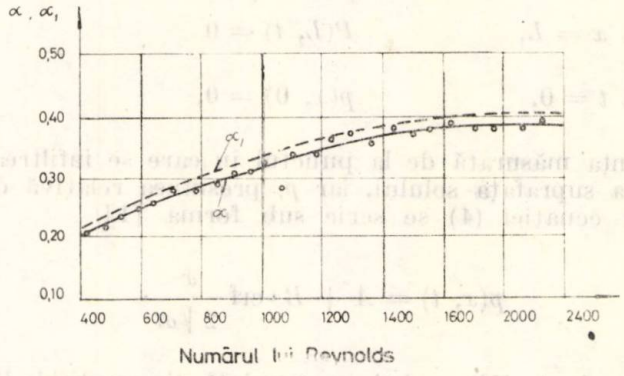


Fig. 1

Aceasta face ca să se analizeze mișcarea unidimensională a fluidelor compresibile a cărei ecuație este [2,6]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho \frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = m\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{1}$$

și ecuația de stare, în situația unei scurgeri izotermice,

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} z. \tag{2}$$

În aceste relații, ρ este densitatea fluidului, p — presiunea, m — porozitatea, t — timpul, z — factorul de abatere de la legea gazelor perfecte, p_0 și ρ_0 fiind parametrii p și, respectiv, ρ în condiții standard. Pentru cazul unui sol fără variații ale permeabilității se poate scrie

$$\frac{k}{m}\frac{p_0}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(z\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \frac{\partial p}{\partial t}. \tag{3}$$

Dacă se înlocuiește termenul $\frac{\rho}{\mu}$ cu valoarea sa medie $\left(\frac{\rho}{\mu}\right)_m$, adoptînd pentru $z = 1$, se poate scrie imediat:

$$a\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{4}$$

unde s-a notat

$$a = \left(\frac{\rho}{\mu}\right)_m \frac{k}{m} \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Condiţiile pe care le satisface ecuaţia (4) sînt:

$$\begin{aligned} &\text{la } x = 0, && p(0, t) = p_c, \\ &\text{la } x = L, && P(L, t) = 0 \\ &\text{la } t = 0, && p(x, 0) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

L este distanţa măsurată de la punctul în care se infiltrează în mediul poros pînă la suprafaţa solului, iar p_c presiunea relativă din conductă.

Soluţia ecuaţiei (4) se scrie sub forma [1]

$$p(x, t) = A + B \cdot \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{at}}. \tag{6}$$

Constantele A şi B se obţin cu uşurinţă din condiţiile (5) şi au valorile:

$$A = p_c \text{ şi } B = -\frac{p_c}{\operatorname{erf} \frac{L}{2\sqrt{at}}}.$$

Ecuaţia (6) capătă forma:

$$p(x, t) = p_c \left(1 - \frac{\operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{at}}}{\operatorname{erf} \frac{L}{2\sqrt{at}}}\right), \tag{7}$$

prin $\operatorname{erf}(\alpha)$ s-a notat funcţia erorilor definită de relaţia [10]

$$\operatorname{erf}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-\xi^2} d\xi.$$

Pentru cîteva valori ale lui α se redau funcţiile $\operatorname{erf}(\alpha)$, $E_1 = 1 - \operatorname{erf}(\alpha/4)/\operatorname{erf}(\alpha)$, $E_2 = 1 - \operatorname{erf}(\alpha/2)/\operatorname{erf}(\alpha)$ şi $E_3 = 1 - \operatorname{erf}(3\alpha/4)/\operatorname{erf}(\alpha)$ (fig. 2). Mărimile E_1, E_2 şi E_3 reprezintă raportul dintre $p(x, t)$ şi p_c la distanţele $L/4$, $L/2$ şi $3L/4$.

Dacă se apreciază că viteza de curgere a gazelor este dată de relaţia lui Darcy [2],

$$v = -k \left(\frac{1}{\mu}\right)_m \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{8}$$

$\left(\frac{1}{\mu}\right)_m$ fiind valoarea medie a raportului $\frac{1}{\mu}$, în urma calculului se găsește expresia acesteia

$$v = p_c k \left(\frac{1}{\mu}\right)_m \frac{e^{-\frac{x^2}{4at}}}{\sqrt{\pi a t}\ \operatorname{erf} \frac{L}{2\sqrt{at}}}. \quad (9)$$

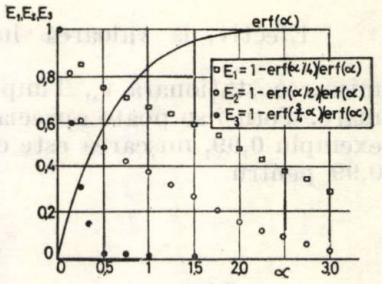


Fig. 2

Exprimată în condiții standard, viteze la distanța $x = L$ are valoarea

$$v = \frac{p_c^2}{p_0} k \left(\frac{1}{\mu}\right)_m \frac{e^{-\frac{L^2}{4at}}}{\sqrt{\pi a t}\ \operatorname{erf} \frac{L}{2\sqrt{at}}}. \quad (10)$$

La timpi foarte mici, prin ridicarea nedeterminării pentru cazul $\frac{0}{0}$, se găsește

$$\lim_{t \to 0} v = 0, \quad (11)$$

iar la timpi foarte mari, teoretic la infinit, viteza ajunge la valoarea v_s considerată ca fiind viteza pentru mișcarea staționară,

$$v_s = \frac{p_c^2}{p_0 L} k \left(\frac{1}{\mu}\right)_m. \quad (12)$$

Cu această relație, se poate scrie viteza în mișcarea nestaționară

$$v = v_s \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{L}{2\sqrt{at}} \cdot \frac{e^{-\frac{L^2}{4at}}}{\operatorname{erf} \frac{L}{2\sqrt{at}}}. \quad (13)$$

În tabelul 2, se redau cîteva valori ale raportului v/v_s în funcție de parametrul $L/(2\sqrt{at})$

Tabelul 2

$L/(2\sqrt{at})$	0,01	0,1	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
v/v_s	1,0000	0,9934	0,8411	0,4925	0,1846	0,0416	0,0055	0,0003

Efectiv, la valoarea lui $\frac{L}{2\sqrt{at}} = 0$ viteza v atinge valoarea din mișcarea staționară v_s. Timpul corespunzător acestei situații fiind foarte mare. Totuși se poate aprecia că la un raport v/v_s apropiat de unitate, de exemplu 0,99, mișcarea este ca și staționară. Raportul v/v_s devine egal cu 0,99 pentru

$$\frac{L}{2\sqrt{at}} = 0{,}24.$$

Timpul ce satisface această egalitate se va numi timpul în care mișcarea este nestaționară și are mărimea

$$t_s = \frac{L^2}{0{,}2304\ a}. \tag{14}$$

Acest timp depinde de L și de parametrul a. Se observă că pentru lungimile mediului poros mari, timpul în care mișcarea devine ca și staționară este mare. În mediul poros cu permeabilitatea mai mică timpul t_s se mărește, ceea ce se explică prin pierderile de presiune mai mari decît într-un mediu poros cu permeabilitate mare.

Și cealaltă proprietate a mediului poros, porozitatea, poate influența perioada de timp în care mișcarea devine ca și staționară.

În mediul poros cu o porozitate mare, durata cît mișcarea devine ca și staționară este mare.

Volumul elementar de gaze infiltrat pe unitatea de arie în intervalul de timp dt va fi

$$dV = v\ dt, \tag{15}$$

iar în timpul t cît durează infiltrarea gazelor volumul de gaze pe unitatea de arie are mărimea

$$V = \int_0^t v\ dt. \tag{16}$$

Se poate aprecia că în perioada nestaționară se scurge volumul de gaze pe unitatea de arie V_n și în perioada staționară V_s.

Prin calcul numeric s-a obținut că V_n are valoarea

$$V_n = 3{,}720563\ v_s \frac{L^2}{a}, \tag{17}$$

iar în perioada de timp Δt în care se apreciază mișcarea staționară, volumul de gaze infiltrat pe unitatea de arie va fi

$$V_s = v_s\ \Delta t. \tag{18}$$

Dacă s-ar considera o valoare mai mică a raportului v/v_s, de exemplu 0,8, volumul de gaze infiltrat pe unitatea de arie în această perioadă de mișcare nestaționară are mărimea.

$$V'_n = 0{,}438410 \; v_s \frac{L^2}{a} = 0{,}1178 \; V_n$$

deoarece durata cît mișcarea se apreciază nestaționară, t'_s, este mai mică decît t_s

$$t'_s = \frac{L^2}{0{,}8264 \; a} = 0{,}2788 \; t_s. \tag{19}$$

Pentru același raport L^2/a, timpul t'_s este mai mic decît cel obținut cu relația (14), ceea ce denotă că la o reducere a perioadei cît mișcarea este considerată ca nestaționară se mărește, de fapt, durata în care se apreciază mișcarea gazelor ca fiind staționară.

3. VALORILE MEDII ALE PARAMETRILOR. $1/\mu$, ρ/μ și a

Așa cum s-a constatat, procentul volumetric al metanului în amestecul de gaze este mare, ceea ce poate conduce la concluzia că proprietățile fizice ale acestuia ρ, μ pot fi atribuite întregului amestec. În funcție de temperatură și de presiune se prezintă din [3] variația densității (fig. 3) și viscozității dinamice (fig. 4).

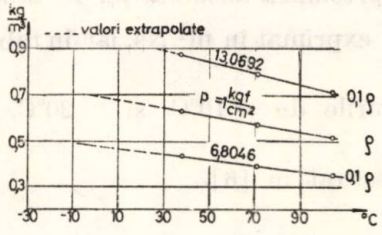


Fig. 3

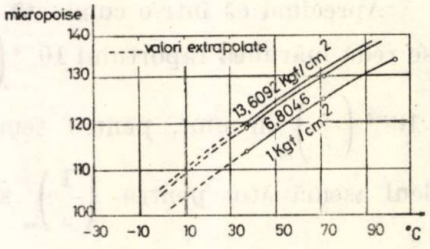


Fig. 4

Cu valorile reprezentate se pot scrie variațiile viscozității și densității în raport cu presiunea la temperaturi constante. De exemplu, pentru temperatura de +10°C, se scriu ecuațiile :

$$\mu_{10} = (103{,}1386 + 0{,}8613 \; p) \times 10^{-7}, \tag{20}$$

$$\rho_{10} = 0{,}7106 \; p - 0{,}0356,$$

iar pentru —20°C,

$$\mu_{-20} = (79{,}9326 + 2{,}0673 \; p) \times 10^{-7}, \tag{21}$$

$$\rho_{-20} = 0{,}7528 \; p - 0{,}0288.$$

În aceste relații, viscozitatea dinamică se exprimă în Ns/m^2, densitatea în kg/m^3, presiunea p fiind în kgf/cm^2. Pentru fiecare interval de presiune $(p—1)$ se definesc valorile medii ale mărimilor $\frac{1}{\mu}$ și $\frac{\rho}{\mu}$ cu relația

$$\left(\frac{1}{\mu}\right)_m = \frac{1}{p-1}\int_1^p \frac{dp}{\mu} \quad \text{și} \quad \left(\frac{\rho}{\mu}\right)_m = \frac{1}{p-1}\int_1^p \frac{\rho}{\mu}\, dp. \tag{22}$$

Dacă pentru cele două temperaturi considerate se scriu μ și ρ sub forma

$$\mu = Ap + B \quad \text{și} \quad \rho = Cp + D, \tag{23}$$

constantele A, B, C și D fiind ușor de identificat din acestea și în urma calculului, se găsește

$$\left(\frac{1}{\mu}\right)_m = \frac{1}{A(p-1)} \ln \frac{Ap + B}{A + B}, \tag{24}$$

$$\left(\frac{\rho}{\mu}\right)_m = \frac{C}{A} + \left(\frac{D}{A} - \frac{BC}{A^2}\right)\frac{1}{p-1} \ln \frac{Ap + B}{A + B}. \tag{25}$$

Apreciind că într-o conductă ar fi presiunea absolută p_c, în tabelul 3 se redă mărimea raportului $10^{-4}\left(\frac{1}{\mu}\right)_m$ exprimat în m^2/Ns, iar în tabelul 4, $10^{-4}\left(\frac{\rho}{\mu}\right)_m$ în s/m^2, pentru temperaturile de $+10°C$ și $-20°C$. Un calcul asemănător pentru $\left(\frac{1}{\mu}\right)_m$ s-a efectuat în [6].

Tabelul 3

p_c, kgf/cm²	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
+10°C	9,5944	9,5558	9,5170	9,4785	9,4404	8,6192
−20°C	12,118	11,970	11,836	11,687	11,551	11,420

Tabelul 4

p_c, kgf/cm²	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
+10°C	6,5654	6,6450	6,6888	6,7174	6,7378	6,7532
−20°C	8,9981	9,1003	9,1568	9,1937	9,2201	9,2400

Pentru permeabilitatea medie, $k = 0{,}1$ Darcy, porozitatea $m = 0{,}35$, presiunea $p_0 = 1{,}013 \times 10^5 \text{N/m}^2$, densitatea $\rho_0 = 0{,}7202$ kg/Nm^3 și lungimea $L = 0{,}9$ m, în tabelul 5, se redau valorile pe care le au la temperatura de $+10°$C, mărimile v_s, a, timpul t_s și volumul de gaze pe unitatea de arie care se infiltrează în perioada nestaționară a mișcării, aceasta fiind apreciată pînă în momentul în care v/v_s devine egal cu 0,99.

Se observă că timpul în care mișcarea devine ca și staționară este aproape independent de presiunea din conductă; pe măsură ce presiunea din conductă crește, timpul t_s scade lent.

Tabelul 5

p_c, kgf/cm^2	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5
$10^3\, v_s$, m/s	2,1587	5,9723	11,6583	19,1939	28,5572	36,4169
$10^3\, a$, m^2/s	2,6384	2,6704	2,6880	2,6995	2,7077	2,7139
t_s, s	1332,48	1316,51	1307,89	1302,32	1298,38	1295,41
V_n, Nm^3/m^2	2,4657	6,7399	13,0707	21,4276	31,7840	40,4383

Volumul de gaze care se infiltrează în perioada nestaționară crește aproape cu pătratul presiunii din conductă, datorită faptului că viteza în mișcarea staționară crește aproximativ în același raport cu presiunea din conductă.

Indiferent la ce raport dintre viteza v și v_s se apreciază mișcarea drept staționară, volumul de gaze infiltrat de la începutul formării orificiului în conductă este același, numai că volumele V_n și V_s sînt diferite în funcție de raportul ales. Astfel, dacă se consideră raportul v/v_s mai mic, în acest caz V_s este mai mare și, invers, la un raport v/v_s mai mare volumul V_n rezultă mai mare iar V_s, datorită faptului că perioada staționară de infiltrare a gazelor se micșorează, devine mai mic. Atribuirea unei valori pentru raportul v/v_s cît mai apropiat de unitate corespunde cel mai bine fenomenului fizic și calculul celor două volume de gaze V_n și V_s este mai apropiat de realitate.

4. SOLUȚIA NUMERICĂ A ECUAȚIEI (3)

Se poate integra numeric ecuația (3) utilizînd una din metodele numerice descrise în literatură [9]. De exemplu, folosind metoda implicită Crank-Nicolson, ecuația (3), prin introducerea prametrilor adimensionali,

$$\bar{p} = \frac{p}{p_c}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{a}{L^2}\, t, \tag{26}$$

se scrie sub forma

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{27}$$

unde s-a omis, pentru simplificarea scrierii, toate barele.

Condițiile (5) devin în urma introducerii variabilelor (26) la forma :

$$\begin{aligned} &\text{la } x = 0, \qquad p(0, t) = 1, \\ &\text{la } x = 1, \qquad p(L, t) = 0, \\ &\text{la } t = 0, \qquad p(x, 0) = 0. \end{aligned} \tag{28}$$

Scrisă în diferențe finite ecuația (27) are forma

$$\frac{p_{i,n+1} - p_{i,n}}{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{p_{i+1,n+1} - 2p_{i,n+1} + p_{i-1,n+1}}{h^2} + \frac{p_{i+1,n} - 2p_{i,n} + p_{i-1,n}}{h^2}\right), \tag{29}$$

k este pasul pentru variabila t, iar h, pntru x. Dacă se notează cu $r = k/h^2$ relația anterioară se scrie

$$-rp_{i-1,n+1} + (2 + 2r)\, p_{i,n+1} - rp_{i+1,n+1} = rp_{i-1,n} + (2 - 2r)\, p_{i,n} + rp_{i+1,n}, \tag{30}$$

$i - 1$, i, $i + 1$ reprezintă succesiunea pașilor pentru variabila x, iar $n + 1$ și n pentru t, n fiind pentru momentul inițial notat cu t, iar $n + 1$ pentru $t + \Delta t$. În lucrare s-a luat $k = 0{,}0625$, $h = 0{,}25$ și pentru aceste valori rezultă $r = 1$.

Cu această ultimă valoare a lui r, ecuația (30) se scrie imediat

$$-p_{i-1,n+1} + 4p_{i,n+1} - p_{i+1,n+1} = p_{i-1,n} + p_{i+1,n}. \tag{31}$$

În tabelul 6 se redau valorile presiunii la $x = 0$; 0,25 ; 0,50 și 1 în funcție de timp al cărui pas a fost notat cu Δt.

Tabelul 6

t \ x	0	0,25	0,50	0,75	1,00
0	1	0	0	0	0
$1\Delta t$	1	0,535714	0,142850	0,035714	0
$2\Delta t$	1	0,617346	0,326529	0,117346	0
$3\Delta t$	1	0,682605	0,403892	0,198275	0
$4\Delta t$	1	0,714032	0,452236	0,214032	0
$5\Delta t$	1	0,731214	0,472623	0,231214	0

Ecuația (3) se poate integra utilizînd tot metoda Crank-Nicolson luînd termenul $\frac{\rho}{\mu}$ variabili în raport cu p.

Prin introducerea variabilelor adimensionale (26) ecuația (3) se scrie sub forma :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \left(\frac{\rho}{\mu}\right)_m \frac{\partial p}{\partial t}, \tag{32}$$

unde s-au suprimat, tot pentru a simplifica scrisul, barele la toate variabilele. Scrisă în diferențe finite, ecuația (32) are forma

$$-R_{i-\frac{1}{2}} \cdot p_{i-1,n+1} + \left(R_{i-\frac{1}{2}} + \frac{2R_m}{r} + R_{i+\frac{1}{2}}\right) p_{i,n+1} - R_{i+\frac{1}{2}} \cdot p_{i+1,n+1} =$$

$$= R_{i-\frac{1}{2}} \cdot p_{i-1,n} + \left(\frac{2R_m}{r} - R_{i-\frac{1}{2}} - R_{i+\frac{1}{2}}\right) p_{i,n} + R_{i+\frac{1}{2}} p_{i+1,n}, \tag{33}$$

unde s-a folosit notația

$$R_m = \left(\frac{\rho}{\mu}\right)_m$$

$R_{i+\frac{1}{2}}$ este valoarea raportului ρ/μ pe tronsonul x_i și x_{i+1}.

Cu aceleași condiții limită, folosind schema de calcul prezentată de relația (33) s-a calculat, tot pentru $r = 1$, variația presiunii în funcție de timp și de distanța x. Aceste rezultate sînt prezentate în tabelul 7.

Tabelul 7

t \ x	0	0,25	0,50	0,75	1,00
0	1	0	0	0	0
$1\Delta t$	1	0,524105	0,138238	0,034367	0
$2\Delta t$	1	0,608654	0,313549	0,112382	0
$3\Delta t$	1	0,672539	0,390632	0,175273	0
$4\Delta t$	1	0,704373	0,438239	0,206389	0
$5\Delta t$	1	0,722849	0,463258	0,224502	0

În figura 5 se prezintă în funcție de timp rezultatele obținute prin ce le două metode numerice descrise mai înainte, soluția pentru mișcarea st ațională a gazelor la $x = 0{,}25$ și la $x = 0{,}75$ (fig. 6).

Se poate aprecia că dintre cele două soluții pentru mișcarea nestaționară metoda de calcul descrisă de relația (33) este mai apropiată de realitate și din acest motiv se consideră mai exactă.

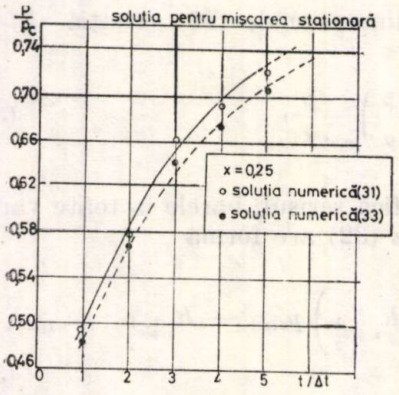


Fig. 5

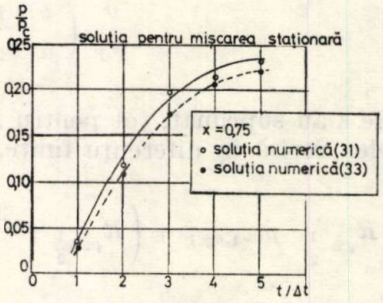


Fig. 6

5. DEBITUL, VOLUMUL DE GAZE INFILTRAT PRIN SUPRAFAȚA SOLULUI

În ipoteza unui orificiu în conductă, prin acesta va ieși o cantitate de gaze care se scurge către suprafața solului. Pe suprafața acestuia pot exista diverse obstacole care sînt impermeabile pentru gazele ieșite din conductă cum ar fi străzile asfaltate, porțiuni de sol înghețat etc. Toate acestea fac ca gazele scurse din conductă să ocolească obstacolele și se infiltrează către suprafața solului prin zonele rămase impermeabile. Se presupune că la distanța x de verticala ce trece prin orificiul format în conductă, viteza de ieșire a gazelor într-o mișcare staționară va fi (fig. 7)

$$v_x = k\left(\frac{1}{\mu}\right)_m \frac{p_c^2}{p_0 H\sqrt{1+\left(\frac{x}{H}\right)^2}}. \tag{34}$$

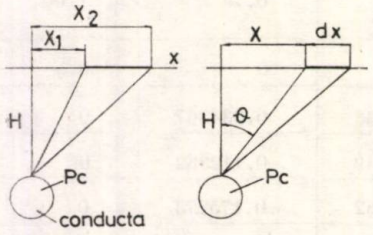


Fig. 7

Termenul $H\sqrt{1+\left(\frac{x}{H}\right)^2}$ reprezintă distanța de la orificiul la punctul considerat, iar p_c^2/p_0 raportat la această distanță este gradientul de presiune existent între cele două puncte. Avînd în vedere că viteza normală la suprafața solului se obține din expresia lui v_x înmulțită cu $\cos\theta$, acesta avînd valoarea

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+(x/H)^2}},$$

rezultă imediat debitul elementar scurs prin suprafața de lățime egală cu unitatea,

$$dQ_0 = k\left(\frac{1}{\mu}\right)_m \frac{p_c^2}{p_0 H}\cdot\frac{dx}{1+(x/H)^2}. \tag{35}$$

Debitul de gaze care se scurge prin aria de lățime unitară și lungime $(x_1—x_2)$ va fi

$$Q_0 = k\left(\frac{1}{\mu}\right)_m \frac{p_c^2}{p_0}\left(\operatorname{arctg}\frac{x_2}{H} - \operatorname{arctg}\frac{x_1}{H}\right). \tag{36}$$

În raport cu cealaltă coordonată, măsurată în lungul unei axe perpendiculară pe x, debitul se înmulțește cu termenul

$$\left(\operatorname{arctg}\frac{y_2}{H} - \operatorname{arctg}\frac{y_1}{H}\right),$$

y_1, y_2 fiind distanțele măsurate în lungul axei y.

Poziția pe care o are un element de arie cu abscisele x_1, x_2 și ordonatele y_1, y_2, față de originea unui sistem ales în punctul în care verticala ce trece prin orificiu înțeapă suprafața solului, afectează debitul de gaze scurs cu termenul

$$T = \left(\operatorname{arctg}\frac{x_2}{H} - \operatorname{arctg}\frac{x_1}{H}\right)\left(\operatorname{arctg}\frac{y_2}{H} - \operatorname{arctg}\frac{y_1}{H}\right). \tag{37}$$

Expresia lui T s-ar putea scrie și în alte sisteme de coordonate, de exemplu în sistemul cilindric ; acesta nu se efectuează deoarece toate imobilele au formă dreptunghiulară și termenul T se calculează cu ușurință în sistemul xoy.

6. REZULTATE EXPERIMENTALE

În scopul verificării relațiilor obținute, pe o conductă de $2^1/_2''$ s-a creat un orificiu cu diametrul de 3 mm și s-au măsurat cu ajutorul detescopului concentrațiile gazului infiltrat în sol la diverse distanțe de punctul situat pe suprafața solului ce trece prin orificiul efectuat. Concentrațiile în gaze în funcție de distanța de la orificiul practicat în conductă sînt prezentate în figura 8, curba A.

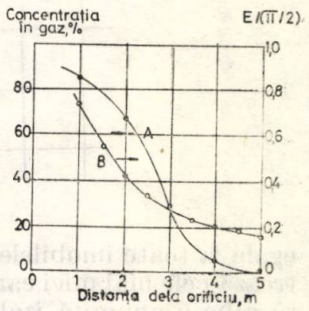


Fig. 8

Pe același grafic se redă variația termenului $E/(\pi/2) = 1 - \operatorname{arctg}\frac{x}{H}|(\pi/2)$, curba B, E reprezintă coeficientul corespunzător din relația (36) ce trebuie introdus la debit în raport cu distanțele x_1 și x_2, x_2 fiind luat acum la infinit, ceea ce înseamnă că $\operatorname{arctg}\frac{x_2}{H} = \frac{\pi}{2}$, iar x_1 este chiar distanța x măsurată de la orificiul format pînă la punctul în care s-a efectuat determinarea. Diferența dintre cele două curbe se datorește faptului că mișcarea gazelor a fost radială, iar termenul E, micșorează debitul scurs în raport cu distanța x pentru o infiltrare liniară.

O altă cauză posibilă a diferenței dintre cele două curbe constă și în faptul că perioada în care s-au efectuat măsurătorile a fost relativ mică (aproximativ o jumătate de oră) și mișcarea a avut un caracter nestaționar. Concentrațiile sînt mult mai mici la distanțe mari deoarece așa cum dovedește relația (14), pe măsură ce distanța L se mărește, durata t_s, cît mișcarea devine ca și staționară, crește cu pătratul lui L, ceea ce denotă că la distanțe mai mari s-au infiltrat debite mai mici. Cu siguranță că la creșterea perioadei de scurgere concentrațiile în gaz s-ar fi obținut mai mari în punctele mai depărtate de orificiul practicat.

7. GAZELE PĂTRUNSE PRIN IMOBILE

În perioada rece a anului presiunea în conductă se mărește cu aproximativ 30% față de sezonul cald, ceeea ce înseamnă că debitele scurse prin sol, avînd în vedere relația (36), cresc în această perioaăd cu circa 69%. Datorită temperaturii scăzute din această perioadă solul este înghețat și gazele ieșite printr-un orificiu al conductei se scurg către imobile dacă acestea nu sînt bine izolate de sol. În ipoteza unor permeabilități

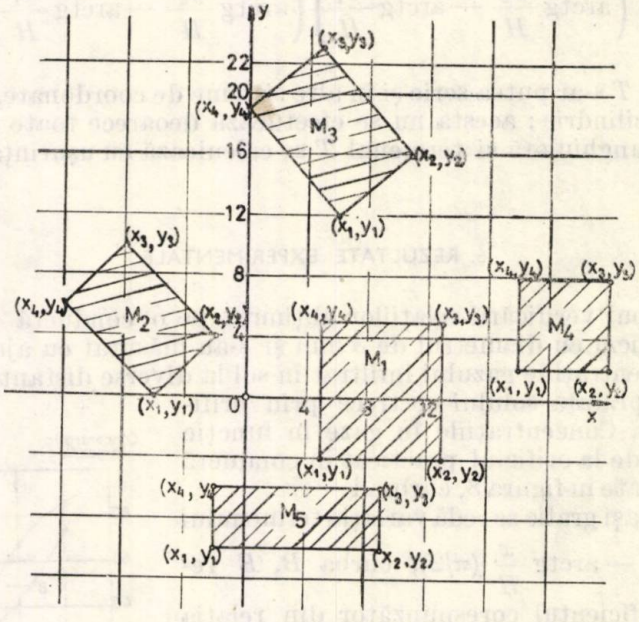


Fig. 9

egale la toate imobilele în cele care sînt mai depărtate de orificiu se infiltrează cele mai mici cantități de gaze. Este foarte posibil ca fiecare imobil să aibe o anumită izolație de sol, ceea ce face ca permeabilitatea medie între punctul de ieșire al gazelor din sol și imobil să fie diferită de la un imobil la altul. Pe un program întocmit și rulat pe calculatorul FELIX C—256 s-au ales, spre exemplificare, 5 imobile notate cu M1, M2, M3, M4 și M5 ale căror poziții față de sistemul de axe ales xoy sînt date prin patru perechi de coordonate (x, y) pentru fiecare vîrf al imobilului (fig. 9).

În program s-a calculat raportul dintre fiecare debit de gaze pătruns prin imobil raportat la debitul ce iese din orificiu. Aceste debite adimensionale s-au notat pentru cele cinci imobile : Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 și, respectiv, Q_5. Permeabilitatea medie de la ieșirea din orificiu pînă la fiecare imobil s-a notat ca fracție din permeabilitatea cea mai mare care se întîlnește la cel puțin unul dintre imobile sau la mai multe. Dacă un imobil este bine izolat de sol se atribuie acestuia o permeabilitate nulă. În figura 10, se redau valorile lui Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 și Q_5 pentru cele cinci imobile al căror raport între permeabilitatea medie și permeabilitatea maximă este prezentat în același grafic.

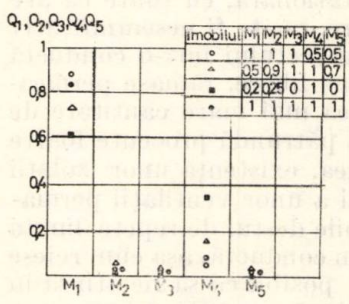


Fig. 10

De exemplu, prin valorile reprezentate prin simbolul „0" la imobilele $M1$, $M2$, $M3$ permeabilitățile au mărimi egal între ele, iar la $M4$ și $M5$ de asemenea permeabilitățile sînt egale dar sînt jumătate ca mărime față de cele de la imobilele anterioare.

Se observă că în ipoteza unor permeabilități egale la cele cinci imobile, cel mai mare procent 84,20% din debitul total se infiltrează în imobilul cel mai apropiat de orificiu care are și aria cea mai mare cum este cazul imobilului $M1$. Imobilul $M5$, cu toate că este aproximativ egal depărtat ca și $M1$ față de orificiu, fiindcă are o suprafață mult mai mică 44 m², față de 72 m² cît are $M1$, în acesta se infiltrează doar 1,81% din debitul total de gaze ieșit din conductă. Acesta face să se tragă concluzia că atît distanța pînă la centrul fiecărui imobil, cît și aria fiecăreia influențează procentul de gaze infiltrat. În cazul cînd permeabilitățile sînt variabile la fiecare imobil și procentele de gaze infiltrate sînt diferite.

Vitezele de filtrare sînt variabile pentru fiecare imobil ; atît distanța de la orificiu pînă la centrul imobilului influențează viteza de filtrare normală la suprafața imobilului, cît și permeabilitatea medie de la orificiu pînă la punctul din centrul imobilului. În tabelul 8 se redau vitezele medii de filtrare la cele cinci imobile considerînd că la M1 și M5 permeabilitățile sînt cele mai mari, iar la imobilul $M2$ permeabilitatea constă 20% din valoarea de la cele două imobile, la $M3$ 30% și $M4$ 70%. Permeabilitățile la $M1$ și $M5$ s-au luat 1,5 darcy. Tot în același tabel s-a calculat timpul cît mișcarea este considerată nestaționară t_s, volumul de gaze pătruns în perioada nestaționară V_n a mișcării, precum și volumul de gaze necesar ca să fie atinsă limita inferioară de explozie (5,1% volum gaze în aer) [11] ; compoziția gazului fiind asemănătoare cu aceea prezentată în tabelul 1. Fiecare imobil s-a considerat că are înălțimea de 2,10 m, iar în con-

Tabelul 8

Imobilul	$M1$	$M2$	$M3$	$M4$	$M5$
Permeabilitatea, Darcy	1,50	0,30	0,45	1,05	1,50
$10^2\, v_s$, m/s	0,8677	0,2038	0,1408	0,2754	0,9727
t_s, ore	2,4632	10,4931	32,9619	20,1033	2,3034
V_n, m³	65,9581	65,9937	143,2218	170,8544	69,1415
V_e, m³	7,7112	4,4982	6,2118	3,8556	4,7124

ductă este o suprapresiune de 2,5 kgf/cm² temperatura solului +10°C, porozitatea solului 0,35.

Se observă că pentru valorile numerice alese, volumul de gaze pătruns în fiecare imobil depășește cu mult cantitatea de gaze necesară să fie atinsă limita inferioară de explozie.

Timpul t_s în care mișcarea devine ca și staționară, cu toate că are valori însemnate, cum ar fi la $M3$ — 32,9619 ore, poate fi nesemnificativ avînd în vedere durata totală de la formarea defectului într-o conductă pînă la remedierea acestuia. Existența unor zone libere, rămase permeabile în apropierea orificiului format, face ca cea mai mare cantitate de gaze să se scurgă în atmosferă, iar în imobile să pătrundă procente foarte mici din gazele ieșite din conductă. De asemenea, existența unor izolații destul de bune a majorității imobilelor pe sol și a unor ventilații permanente a acestora face ca să nu fie atinse în imobile destul de repete limita inferioară de explozie de la formarea defectului în conductă, așa cum reiese din calculele efectuate mai înainte. Este foarte posibil ca să fie atinsă în unele imobile limite inferioară de explozie fără ca să se producă la acestea accidente din lipsa unor surse de scîntei.

8. ALTE CĂI DE ACCES PENTRU GAZE CĂTRE IMOBILE

Este posibil ca gazele să pătrundă în imobile prin unele zone cu permeabilitate mare. Aceste zone drenante sînt îndreptate către imobile și, din această situație, existența lor poate conduce la o canalizare ușoară a gazelor în imobile. De obicei zonele de mare drenaj sînt cele pe lîngă cablurile telefonice, canalizări etc. De exemplu, existența unei fisuri cu deschiderea mică pe lîngă cablu sau conductă face ca prin acesta să se scurgă debite mari de gaze. Avînd în vedere modul cum se calculează permeabilitatea unei fisuri [5] dacă aceasta are o deschidere de 1 mm și lățimea de 1 cm face ca prin aceasta să se scurgă un debit de gaze de aproximativ 8,33 ori mai mare decît debitul care s-ar scurge printr-un mediu poros cu permeabilitatea de 1 Darcy și secțiunea de 1 mp. Printr-o izolare bună a zonelor de intrare în imobil a cablurilor telefonice, canalizărilor se reduce substanțial pericolul infiltrării gazelor evitîndu-se, într-o măsură foarte mare, accidentele. În afara acestei posibilități de a elimina accidentele, mai eficace ar fi, pentru a evita complet accidentele, depistarea și remedierea la timp a defectelor care apar în conducte și în special la conductele vechi unde apar cel mai frecvent defecte.

9. CONCLUZII

Pentru un ajutaj înnecat rezultatele experimentale au arătat că la creșterea numărului lui Reynolds coeficientul de debit se mărește. La numerele lui Reynolds foarte mari, coeficientul de rezistență este independent de aceste valori, mărimea coeficientului de debit este de obicei constant. Ecuația presiunii pentru gaze se poate liniariza și se obține distribuția presiunii și celelalte elemente ale mișcării(viteza de scurgere, debitul scurs etc.) pentru mișcarea nestațională. Volumul de gaze infiltrat în

perioada nestaționară este proporțional cu $v_s \frac{L^2}{a}$, iar în perioada staționară cu v_s. Pentru valorile medii întîlnite în tehnica de șantier, volumul de gaze scurse în perioada nestaționară este destul de însemnat, cu toate că timpul cît se apreciază această perioadă este nesemnificativ în comparație cu durata totală cît are loc scurgerea gazelor prin orificiu. Debitul de gaze infiltrat între două puncte situate la distanțe x_1 și x_2 de orificiu este proporțional cu termenul

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{x_2}{H} - \operatorname{arctg} \frac{x_1}{H}\right).$$

Imobilele mai apropiate de orificiu sînt cele mai expuse la infiltrații mari de gaze. În situația în care un imobil este situat în apropierea orificiului, fiind impermeabil pentru gaze, în acesta nu vor pătrunde gazele ieșite din orificiu chiar dacă un imobil este impermeabil pentru gaze și prezintă zone de mare drenaj către imobil, cum ar fi o fisură de dimensiuni neglijabile, prin acestea pătrund debite mari de gaze care pot forma împreună cu aerul un amestec exploziv.

Existența multor parametri de care depind infiltrațiile pătrunse în imobil (presiunea din conductă, dimensiunile orificiului format, dimensiunile și poziția imobilului față de orificiu, existența unor căi drenante către imobil, perioada de la formarea defectului în conductă) face ca în multe situații să nu fie cunoscută exact cauza unui accident produs.

Cea mai eficientă cale de a elimina accidentele este depistarea și remedierea la timp a defectelor rețelei printr-un control riguros și în special la conductele cele mai vechi, unde pericolul defectării este mult mai mare decît la cele noi.

Primită la redacție la 9 februarie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. H. S. Carslaw, J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, Oxford University Press, 1959, p. 51—52.
2. I. Crețu, *Hidraulică generală și subterană*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971, p. 352—353.
3. M. H. Gonzales, R. E. Bukacek, A. L. Lee, *The Viscosity of Methane*, Soc. Pet. Eng. Jour., March 1967, p. 75—79.
4. G. Gheorghe, *Exploatarea rețelelor și instalațiilor de gaze*, Edit. tehnică, București, 1975, p. 228—234.
5. Gr. Ioachim, *Extracția petrolului și gazelor*, Edit. tehnică, București, 1965, p. 504—505.
6. T. Oroveanu, *Asupra scurgerii gazelor prin medii poroase neomogene*, St. cerc. mec. apl., *5*, 1249—1267 (1960).
7. T. Oroveanu, *Hidraulica și transportul produselor petroliere*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1966, p. 146—147, 178—179.
8. Al. Osnea, *Curs de distribuția gazelor în rețelele urbane*, Institutul de petrol și gaze, Ploiești, 1974, p. 48—50.
9. G. D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Oxford University Press, New York, London, 1965, p. 17—19.
10. H. Tautz, *Wärmeleitung und Temperaturausgleich* — Akademie Verlag, Berlin, 1971, p. 338—339.
11. R. Țunescu, *Tehnologia petrolului*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1962, p. 40—82.

ECHILIBRAJUL MOMENTELOR EXTERNE CARE SUBZISTĂ ÎN FIECARE LINIE DE CILINDRI LA MOTOARELE ÎN H

de GHEORGHE ZĂTREANU, CONSTANTIN SILVESTRU

Institutul politehnic București

Se prezintă o teorie a echilibrajului momentelor externe care subzistă în fiecare linie de cilindri la motoarele în H cu mecanisme bielă-manivelă normale și cu arbori cotiți identici sau simetrici în oglindă.

Se arată că unele momente din fiecare ansamblu de cilindri echipați cu același arbore cotit se echilibrează prin calarea arborilor corespunzătoare repartiției uniforme a aprinderilor pe întregul motor, dacă arborii sînt identici.

1. INTRODUCERE

În lucrarea [1] s-a studiat echilibrajul forțelor de inerție la motoarele în H. Lucrarea de față abordează echilibrajul momentelor externe ale forțelor de inerție la aceste motoare.

Se adoptă majoritatea ipotezelor din [1]: motorul în H provine din două motoare cu cilindri opuși, planele determinate de axele cilindrilor fiecărui motor de acest fel fiind perpendiculare pe planul determinat de axele de rotație ale arborilor cotiți; numărul total de cilindri i este un multiplu de patru deoarece liniile de cilindri sînt identice; mecanismele bielă-manivelă sînt normale, identice pentru toți cilindrii; arborii cotiți pot fi identici sau simetrici în oglindă și se pot roti fie în același sens, fie în sensuri contrare; se utilizează soluțiile de arbori cotiți optime din punctul de vedere al echilibrajului motoarelor în linie cu aprinderi uniform repartizate și cu $\frac{i}{4}$ cilindri; aprinderile sînt uniform repartizate fie pe întregul motor, fie pe fiecare ansamblu de cilindri echipați cu același arbore cotit.

Pentru rezolvarea obiectivului propus se utilizează dezvoltarea în serie trigonometrică a forței de inerție a maselor cu mișcare de translație corespunzătoare unui cilindru. Dacă mecanismul bielă-manivelă este dezaxat această serie are termenii 1, 2, 3, ... p, $p+1$, $p+2$, ... ∞, iar dacă mecanismul bielă-manivelă este axat seria păstrează numai termenul de ordinul întîi și termenii pari. Un termen oarecare, de ordinul p, este [1]

$$\mathcal{F}_p = T_p \cos(p\alpha + \psi_p), \tag{1}$$

unde T_p este amplitudinea termenului, iar α — unghiul format de manivelă cu axa cilindrului considerat. Potrivit teoriei echilibrajului motoare-

lor în linie, termenul de ordinul p este permanent egal cu proiecția pe axa cilindrului a unui vector de mărime T_p, care se rotește cu viteza unghiulară

$$\omega_p = p\omega\left(1 + \frac{2\theta^2 - \omega\dfrac{d\theta}{dt}}{p^2\omega^4 + \theta^2}\right),$$

și formează cu axa cilindrului în sensul său de rotație, la un moment dat, unghiul $p\alpha + \psi_p$. În expresia precedentă ω și θ sînt viteza unghiulară, respectiv accelerația unghiulară ale arborelui cotit. Dacă se consideră cazul real în care ω variază în timpul t, T_p și ω_p sînt și ele variabile. Cînd se admite ω = const., rezultă $\omega_p = p\omega$ = const. și T_p = const., iar ψ_p = const. reprezintă faza inițială a termenului.

Echilibrarea momentului extern $\mathfrak{M}_r$ al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de rotație prin plasarea convenabilă a manivelelor în jurul și în lungul axei lor de rotație se obține simultan cu echilibrarea momentului extern $\mathfrak{M}_1$ al termenilor de ordinul întîi ai forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație. Dacă această situație nu este realizată, momentul $\mathfrak{M}_r$ poate fi echilibrat cu ajutorul unor mase atașate arborilor cotiți. În consecință, lucrarea se referă doar la echilibrajul momentelor externe ale forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație.

Pentru soluția de arbore cotit adoptată, o parte din aceste momente sînt echilibrate pe fiecare linie de cilindri și deci nu pot subzista nici pe ansamblul motorului. Ca urmare, se analizează echilibrajul momentelor externe care subzistă în fiecare linie. Pentru comoditatea exprimării se folosește în continuare denumirea moment în locul denumirii moment extern.

2. MOMENTELE CARE SUBZISTĂ ÎN FIECARE LINIE DE CILINDRI

Momentul de ordinul oarecare p care subzistă într-o linie de cilindri are expresia

$$\mathfrak{M}_p = M_p \cos(p\alpha + \mu_p),$$

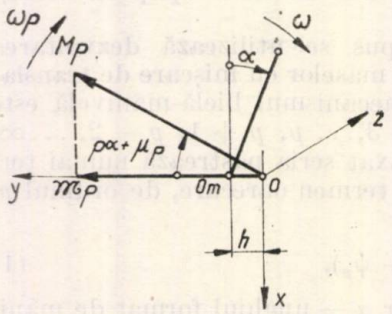


Fig. 1. — Interpretarea vectorială a momentului $\mathfrak{M}_p$ care subzistă într-o linie de cilindri.

unde M_p este amplitudinea lui; α — unghiul format de prima manivelă a arborelui cotit, situată la una din extremitățile motorului, cu o paralelă la axa cilindrului respectiv (fig. 1); μ_p — faza inițială a momentului (pentru $\alpha = 0$), depinzînd de soluția de arbore cotit aleasă. Momentul $\mathfrak{M}_p$ acționează în planul xOz, axa Oz fiind paralelă cu axa de rotație a arborelui cotit. Momentul $\mathfrak{M}_p$ este interpretat de un vector de mărime M_p, care se rotește în același sens ca și manivela cu viteza unghiulară ω_p și formează în acest sens cu axa Oy unghiul

$p\alpha + \mu_p$: pentru orice valoare a unghiului α, momentul $\mathfrak{M}_p$ este egal cu proiecția vectorului M_p pe axa Oy.

Se atribuie indicii s și d mărimilor referitoare la liniile de cilindri superioare din stînga și, respectiv, din dreapta. Pentru liniile inferioare din stînga și din dreapta se folosesc indicii s' și, respectiv, d'.

Dacă se consideră că momentul de ordinul p acționează în linia s, relația precedentă devine

$$\mathfrak{M}_{ps} = M_{ps} \cos (p\alpha_s + \mu_{ps}), \tag{2}$$

în linia s' operînd momentul

$$\mathfrak{M}_{ps'} = M_{ps'} \cos (p\alpha_{s'} + \mu_{ps'}). \tag{3}$$

Deoarece aceste linii au același arbore cotit, $M_{ps} = M_{ps'}$ și $\mu_{ps} = \mu_{ps'}$. Liniile s și s' fiind opuse, sistemele de axe aferente lor au sensuri contrare (fig. 2), astfel încît $\alpha_{s'} = \alpha_s + \pi$. Luînd ca referință sistemul de axe $x_s O_s y_s$, expresia (3) ia forma

$$\mathfrak{M}_{ps'} = -M_{ps} \cos [p(\alpha_s + \pi) + \mu_{ps}]. \tag{4}$$

Avînd în vedere relațiile (2) și (4), se obține pe ansamblul celor două linii momentul rezultant

$$\mathfrak{M}^{\Sigma}_{ps} = \mathfrak{M}_{ps} + \mathfrak{M}_{ps'} = M_{ps}[\cos (p\alpha_s + \mu_{ps}) - \cos (p\alpha_s + \mu_{ps} + p\pi)]. \tag{5}$$

După cum ordinul p este impar sau par, din (5) rezultă

$$\mathfrak{M}^{\Sigma}_{ps} = 2M_{ps} \cos (p\alpha_s + \mu_{ps}) = M^{\Sigma}_{ps} \cos (p\alpha_s + \mu_{ps}),$$

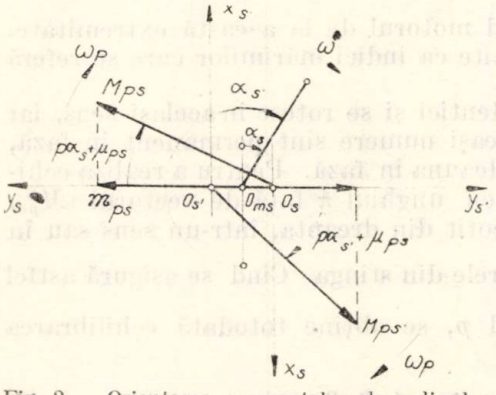


Fig. 2. — Orientarea momentelor de ordinul p aferente liniilor din stînga, cînd arborii cotiți sînt identici.

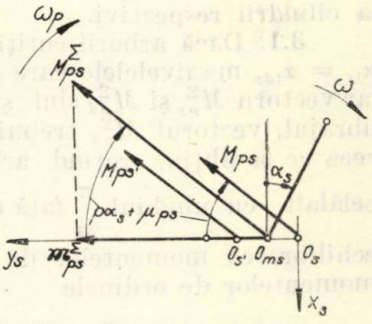


Fig. 3. — Coincidența de fază a momentelor $\mathfrak{M}_{ps}$ și $\mathfrak{M}^{\Sigma}_{ps}$ ($p = 2\varkappa - 1$; $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots,$) cînd arborii cotiți sînt identici.

respectiv $\mathfrak{M}^{\Sigma}_{ps} = 0$.

Se constată următoarele : pe ansamblul cilindrilor din stînga pot subzista numai momente de ordin impar; fiecare din aceste momente are amplitudinea dublă față de amplitudinea momentului de același ordin aferent unei singure linii de cilindri și este în fază cu momentul de ordinul respectiv al liniei superioare (fig. 3); orice moment de ordin par care sub-

zistă în linia superioară se echilibrează cu momentul de același ordin din linia inferioară; dacă mecanismele bielă-manivelă sînt axate, subzistă numai momentul de ordinul întîi, în cazul cînd soluția de arbore cotit adoptată nu antrenează echilibrarea momentelor de ordinul întîi din fiecare linie*).

Constatările precedente se aplică și pentru ansamblul cilindrilor din dreapta, în conformitate cu ipotezele admise pentru mecanismele bielă-manivelă și arborii cotiți. În consecință, la motoarele în H cu distanțe egale între axele cilindrilor consecutivi din aceeași linie se echilibrează reciproc momentele care subzistă în fiecare linie, cu excepția momentelor de ordin par dacă mecanismele bielă-manivelă sînt dezaxate sau eventual a momentelor de ordinul întîi dacă mecanismele bielă-manivelă sînt axate.

3. ECHILIBRAREA MOMENTELOR DIN FIECARE ANSAMBLU DE CILINDRI ECHIPAȚI CU ACELAȘI ARBORE COTIT

Se adoptă denumirea de ansamblu al unui arbore pentru fiecare ansamblu de cilindri echipați cu același arbore cotit.

Fiindcă arborii cotiți sînt identici sau simetrici în oglindă, într-un ansamblu al unui arbore acționează momentele care subzistă și în celălalt ansamblu. Conform celor arătate în § 2, aceste momente au ordinele $p = 2\varkappa - 1$, unde $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots$ Pentru un ordin oarecare, momentele $\mathfrak{M}^{\Sigma}_{ps}$ și $\mathfrak{M}^{\Sigma}_{pd}$ sînt interpretate de vectori egali $M^{\Sigma}_{ps} = M^{\Sigma}_{pd}$; ele se echilibrează reciproc dacă se asigură opoziția permanentă de fază a vectorilor M^{Σ}_{ps} și M^{Σ}_{pd}. În scopul de a stabili căile de îndeplinire a acestei condiții, se numerotează manivelele consecutive ale fiecărui arbore cotit cu 1, 2, 3, ... q, ... $\frac{i}{4}$, începînd de la o extremitate a motorului; liniile de cilindri s, s', d și s' sînt considerate privind motorul de la această extremitate. Numerele astfel obținute sînt atribuite ca indici mărimilor care se referă la cilindrii respectivi.

3.1. Dacă arborii cotiți sînt identici și se rotesc în același sens, iar $\alpha_{1s} = \alpha_{1d}$, manivelele care au aceleași numere sînt permanent în fază, iar vectorii M^{Σ}_{ps} și M^{Σ}_{pd} sînt și ei totdeauna în fază. Pentru a realiza echilibrajul, vectorul M^{Σ}_{pd} trebuie rotit cu unghiul π față de vectorul M^{Σ}_{ps}, ceea ce se obține rotind arborele cotit din dreapta, într-un sens sau în celălalt, cu unghiul $\frac{\pi}{p}$ față de arborele din stînga. Cînd se asigură astfel echilibrarea momentelor de ordinul p, se obține totodată echilibrarea momentelor de ordinele

$$p^* = (2\lambda - 1)p \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots). \tag{6}$$

Într-adevăr, la rotirea vectorului M^{Σ}_{pd} cu unghiul π, prin rotirea arborelui cotit din dreapta cu unghiul $\frac{\pi}{p}$, orice vector $M^{\Sigma}_{p^*d}$, corespunzător unui

*) Acest caz corespunde motoarelor la care $\frac{i}{4}$ este o putere de doi și arborii cotiți au grupe de cîte două manivele în opoziție uniform distribuite în jurul axei de rotație, manivelele fiecărei grupe fiind situate la distanțe egale față de mijlocul arborelui respectiv.

ordin p^* exprimat de (6), se rotește cu unghiul $p^* \frac{\pi}{p} = (2\lambda - 1)\,\pi$, adică ajunge în opoziție cu vectorul din stînga aferent aceluiași ordin $M^{\Sigma}_{p^* s}$. Evident, echilibrajul rezultat este cu atît mai avansat, cu cît ordinul p este mai mic.

Presupunînd că aprinderile sînt uniform repartizate pe întregul motor, între două aprinderi consecutive există decalajul unghiular

$$\zeta_t = \frac{\tau\pi}{i}, \tag{7}$$

unde τ este numărul de timpi. În acest caz condiția de echilibrare de mai sus este respectată dacă unghiul dintre cei doi arbori cotiți este egal cu decalajul ζ_t, adică $\frac{\pi}{p} = \frac{\tau\pi}{i}$. În consecință, se echilibrează atunci momentele de ordinul

$$p = \frac{i}{\tau} \tag{8}$$

și, simultan cu ele, momentele ale căror ordine îndeplinesc condiția (6), în care p este dat de (8).

Metoda de echilibrare prezentată este aplicabilă numai la motoarele în patru timpi ($\tau = 4$) al căror număr de cilindri este un multiplu impar de patru, întrucît doar pentru aceste motoare se obțin din (8) ordine p impare; în cazul $i = 4$ rezultă $p = 1$, deci metoda asigură echilibrajul complet al momentelor care subzistă în fiecare ansamblu al unui arbore. La motoarele în doi timpi ($\zeta = 2$) nu pot fi echilibrate momentele de nici un ordin, deoarece din (8) se obțin numere pare, iar momentele de ordin par nu subzistă pe ansamblul unui arbore.

Dacă aprinderile sînt uniform repartizate pe fiecare ansamblu al unui arbore, unghiul dintre două aprinderi consecutive din fiecare ansamblu este

$$\zeta_a = \frac{\tau\pi}{\frac{i}{2}} = \frac{2\tau\pi}{i}. \tag{9}$$

Luînd decalajul dintre arborii cotiți egal cu acest unghi $\left(\frac{\pi}{p} = \frac{2\tau\pi}{i}\right)$, se echilibrează momentele de ordinul

$$p = \frac{i}{2\tau}, \tag{10}$$

și totodată momentele ale căror ordine se obțin înlocuind (10) în (6). Această metodă poate fi folosită la două tipuri de motoare: în doi timpi cu număr de cilindri multiplu impar de patru și în patru timpi cu număr de cilindri multiplu impar de opt. Într-adevăr, pentru $\tau = 2$ și $\tau = 4$,

relaţia (10) conduce la ordine p impare numai la primul tip menţionat şi, respectiv, la al doilea tip.

Ultima metodă implică producerea simultană a două aprinderi, cîte una într-un cilindru din fiecare ansamblu al unui arbore. Această particularitate decurge din faptul că aprinderile consecutive din fiecare ansamblu sînt separate de unghiuri egale cu $\zeta_a = 2\zeta_l$: dacă aprinderile ar fi independente, într-un ciclu s-ar declanşa numai $\frac{i}{2}$ aprinderi.

3.2. Dacă arborii cotiţi sînt simetrici în oglindă şi se rotesc în acelaşi sens, tot cînd $\alpha_{1s} = \alpha_{1d}$ există o diferenţă de fază între vectorii M^{Σ}_{ps} şi M^{Σ}_{pd}. Pentru a evalua această diferenţă se consideră, în momentul d e timp $\alpha_{1s} = 0$, vectorii care interpretează termenii de ordinul p ai forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie în linia s.

Vectorul T_{p1s} din cilindrul 1_s are direcţia $O_s\delta_s$ (fig. 4 *a*) şi formează în sensul său de rotaţie unghiul $\psi_{ps} = \psi_p$ cu direcţia $O_s x_s$. Vectorul T_{Tqs} corespunzător manivelei q_s, care este decalată cu unghiul $\alpha_{qs} = \alpha_q$ faţă de manivela 1_s, face unghiul $p\alpha_q$ cu direcţia $O_s\delta_s$. Notînd cu d_q distanţa alge-

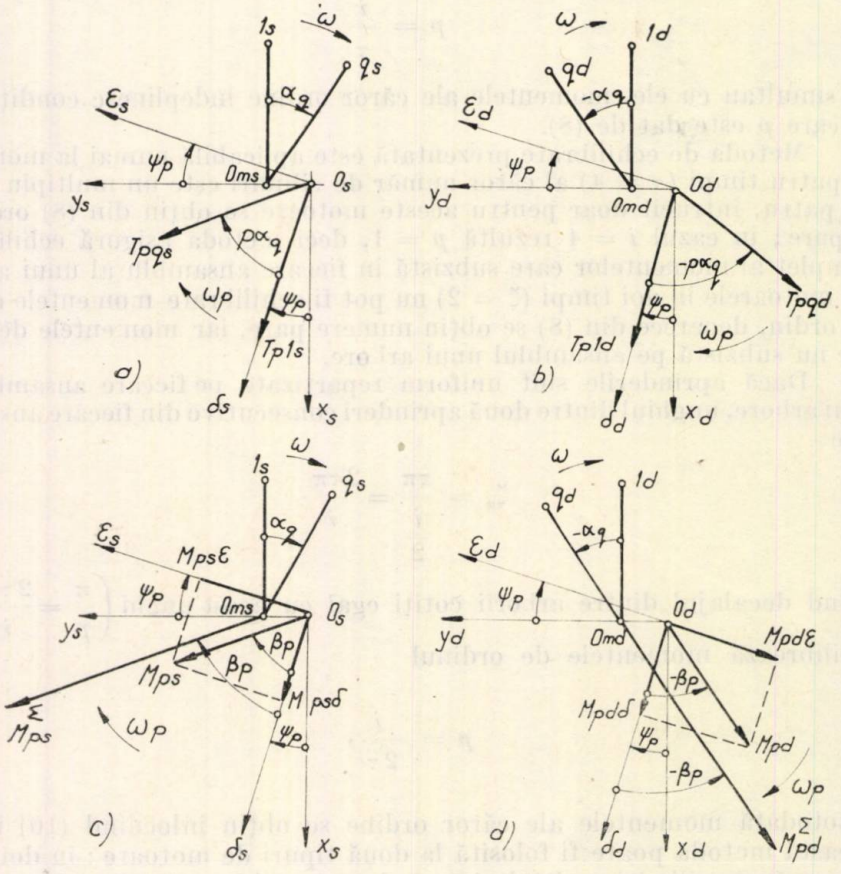


Fig. 4. — Direcţiile vectorilor T_{pqs} şi T_{pqd} (*a*, *b*) şi ale vectorilor M_{ps} şi M_{pd} (*c*, *d*), cînd arborii cotiţi sînt simetrici în oglindă şi se rotesc în acelaşi sens.

bricã dintre mijlocul arborelui cotit şi manivela q_s, componentele după axele sistemului cartezian $\delta_s O_s \varepsilon_s$ (fig. 4 *c*) ale momentului vectorilor T_{psq} sînt

$$M_{ps\delta} = T_p \left(d_1 + \sum_{q=2}^{i} d_q \cos p\alpha_q \right),$$

$$M_{ps\varepsilon} = T_p \sum_{q=2}^{i} d_q \sin p\alpha_q.$$

Momentul rezultant $M_{ps} = \sqrt{M_{ps\delta}^2 + M_{ps\varepsilon}^2}$ constituie vectorul care interpretează momentul termenilor de ordinul p din linia s. Acest vector formează cu direcţia $O_s\delta_s$, în sensul lui de rotaţie, unghiul

$$\beta_{ps} = \beta_p = \operatorname{arc\,tg} \frac{M_{ps\varepsilon}}{M_{ps\delta}},$$

care depinde exclusiv de soluţia de arbore cotit aleasă : $-\frac{\pi}{2} < \beta_p < \frac{\pi}{2}$ dacă $M_{ps\delta} > 0$ şi $\frac{\pi}{2} < \beta_p < \frac{3\pi}{2}$ dacă $M_{ps\delta} < 0$. Conform celor arătate în § 3.1, vectorii M_{1s} şi M_{ps}^{Σ} sînt în fază, deci poziţia ultimului vector faţă de direcţia $O_s\delta_s$ este precizată tot de unghiul β_p.

Deoarece arborii cotiţi sînt simetrici în oglindă, în momentul de timp considerat $\alpha_{1d} = \alpha_{1s} = 0$, iar manivela q_d formează cu manivela 1_d unghiul $\alpha_{qd} = -\alpha_q$ (fig. 4 *b*). Urmînd raţionamentul anterior, se stabilesc componentele

$$M_{1d\delta} = T_p \left[d_1 + \sum_{q=2}^{i} d_q \cos(-p\ \alpha_q) \right] = M_{1s\delta},$$

$$M_{pd\varepsilon} = T_p \sum_{q=2}^{i} d_q \sin(-p\ \alpha_q) = -M_{ps\varepsilon}.$$

Vectorul $M_{1d} = \sqrt{M_{pd\delta}^2 + M_{pd\varepsilon}^2} = M_{ps}$ face cu direcţia $O_d\delta_d$ unghiul $\beta_{1d} = -\beta_p$ (fig. 4 *d*), care precizează şi poziţia vectorului M_{pd}^{Σ}.

Întrucît poziţiile relative ale vectorilor T_{1qs} şi T_{1qd} nu se modifică în timp, diferenţa de fază dintre vectorii M_{ps}^{Σ} şi M_{pd}^{Σ} este $\pi - 2\beta_p = \text{const.}$ Opoziţia de fază a acestor vectori, necesară echilibrării reciproce a momentelor $\mathfrak{M}_{ps}^{\Sigma}$ şi $\mathfrak{M}_{pd}^{\Sigma}$, impune rotirea vectorului M_{pd}^{Σ}, în sensul său de rotaţie, unghiul $2\beta_p$ faţă de vectorul M_{ps}^{Σ}, respectiv rotirea arborelui cotit din dreapta cu unghiul $\frac{2\beta_p}{p}$ faţă de arborele din stînga. Întrucît unghiul β_p depinde de dispunerea manivelelor fiecărui arbore în jurul şi în lungul axei lui de rotaţie, unghiul $\frac{2\beta_p}{p}$ nu poate lua, în general, valoarea decala-

jului dintre două aprinderi consecutive caracteristică repartiției uniforme a aprinderilor pe întregul motor sau pe fiecare ansamblu al unui arbore. Rezultă astfel că toate momentele care subzistă în fiecare ansamblu al unui arbore rămîn de regulă neechilibrate la motoarele în H ai căror arbori cotiți sînt simetrici în oglindă și se rotesc în același sens.

★

Concluziile din § 3.1 și 3.2 se păstrează și dacă arborii cotiți se rotesc în sensuri contrare, datorită faptului că în această situație dezaxarea dintr-un ansamblu al unui arbore este opusă dezaxării din celălalt ansamblu. Într-adevăr, considerînd că unul din arborii cotiți se rotește într-un anumit sens, termenul de ordinul p dintr-un cilindru aferent acestuî arbore are expresia (1). Dacă arborele își schimbă sensul de rotație, manivela cilindrului respectiv va forma cu axa acestuia, în același moment de timp, unghiul $-\alpha$, dezaxarea își va modifica și ea sensul, iar faza inițială va fi $-\psi_p$. În acest caz valoarea termenului de ordinul p va deveni

$$\mathcal{T}_p^* = T_p \cos [p(-\alpha) + (-\psi_p)] = T_p \cos (p\alpha + \psi_p),$$

identificîndu-se cu cea obținută din (1), deci sensurile de rotație ale arborilor cotiți nu influențează echilibrajul momentelor care subzistă în fiecare ansamblu al unui arbore. Astfel, căile de echilibrare utilizabile cînd arborii cotiți se rotesc în același sens sînt aplicabile și cînd ei se rotesc în sensuri contrare; calajele precizate pentru arborele cotit din dreapta trebuie măsurate în sensul lui de rotație.

4. CONCLUZII

Cercetarea efectuată pune în evidență următoarele.

În fiecare linie de cilindri a motoarelor în H subzistă momente produse de termeni de ordin impar ai forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație. Dacă arborii cotiți sînt identici, cele două momente de ordinul $p = \frac{i}{\tau}$, cîte unul din fiecare ansamblu al unui arbore, se echilibrează reciproc rotind arborele din dreapta în sensul lui de rotație cu unghiul $\frac{\pi}{p}$ față de arborele din stînga. Acest calaj al arborilor corespunde repartiției uniforme a aprinderilor pe întregul motor și antrenează totodată echilibrarea momentelor de ordinele $p^* = (2\lambda - 1)\, p$, unde $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$

Dacă mecanismele bielă-manivelă sînt axate și deci în fiecare linie subzistă numai momentul de ordinul întîi, metoda prezentată asigură echilibrajul complet al momentelor din cele două ansambluri.

Primită la redacție la 9 august, 1979

BIBLIOGRAFIE

1. Gheorghe Zătreanu, Constantin Silvestru, Echilibrajul forțelor de inerție la motoarele în H, St. cerc. mec. apl., **38**, *1*, 141–153 (1979).

INFLUENȚA AMORTIZĂRII LAGĂRELOR ASUPRA TURAȚIILOR CRITICE ALE ROTORILOR

de MIRCEA RADEȘ
Institutul politehnic București

Se studiază mișcarea de precesie a unui rotor simetric cu un disc, rezemat pe lagăre izotrope cu amortizare, ținînd cont de masa proprie a arborelui. Utilizînd un model simplificat, cu parametri concentrați, se pune în evidență variația diferitelor turații critice cu amortizarea din lagăre. Se arată că turațiile critice calculate neglijînd amortizarea pot diferi considerabil de turațiile critice reale, eroarea fiind mai mare în cazul lagărelor puternic amortizate și cu rigiditate relativ mică.

1. INTRODUCERE

Sînt încă frecvente cazurile cînd turațiile critice ale unui rotor se calculează considerînd lagărele drept reazeme rigide. Recunoscînd faptul că lagărele au o oarecare elasticitate, s-au elaborat programe de calcul mai evoluate, care permit calculul turațiilor critice ale sistemului rotor-lagăre elastice. De cele mai multe ori, însă, valorile astfel calculate sînt mai mici decît cele determinate experimental, care se apropie mai mult de turațiile critice ale rotorului pe reazeme rigide.

Discrepanța aparentă între valorile calculate și cele măsurate se datorește neglijării efectului amortizării filmului de lubrifiant. Aceasta acționează în paralel cu elasticitatea lagărului, dar în serie cu flexibilitatea arborelui, contribuind astfel la rigidizarea lagărului. Efectul a fost pus în evidență de Lund și colaboratorii săi [1, 2, 3], fiind descris de unele programe pentru calculul răspunsului dinamic al sistemelor rotor-lagăre sub acțiunea dezechilibrului [4]. O explicație simplă a fenomenului a fost dată de autor [5], utilizînd un rotor de tip Laval rezemat pe lagăre izotrope.

În această lucrare, analiza se extinde la rotori simetrici, la care masa arborelui nu mai este neglijabilă. Se face totuși un calcul simplificat, concentrînd masa fiecărei jumătăți de arbore la extremitățile tronsonului respectiv, în dreptul fusului, respectiv al discului. Se obține astfel un model cu trei mase, la care chiar dacă repartiția masei este oarecum arbitrară, se pot descrie fenomenele care se regăsesc la rotori cu masa distribuită, privind primele două moduri simetrice de vibrație.

Se studiază separat influența amortizării lagărelor asupra turațiilor critice amortizate și asupra turațiilor critice de dezechilibru. Pornind de la analiza unui model foarte simplu de rotor, articolul se vrea o pledoarie pentru necesitatea introducerii în calcule a amortizării lagărelor. De asemenea, se recomandă calculul turațiilor critice de dezechilibru, utilizînd un program care să descrie precesia sincronă a rotorilor pe lagăre deformabile cu amortizare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 6, 1980, P. 903-911

2. ECUAŢIILE DE MIŞCARE

Fie un rotor elastic, compus dintr-un arbore de secţiune circulară, rezemat la capete pe lagăre izotrope identice, avînd un disc dispus în planul de simetrie, la mijlocul distanţei între lagăre (fig. 1 *a*). Se consi-

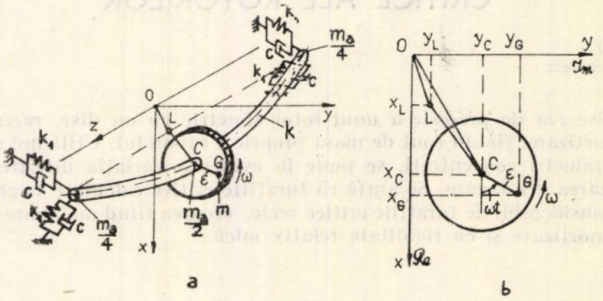


Fig. 1

deră că lagărele au aceeaşi constantă elastică k_1 indiferent de direcţia de deformare, iar constanta elastică a arborelui este k. Se admite că forţele de frecare din lagăre sînt proporţionale cu viteza absolută a fusului, coeficientul de amortizare vîscoasă c fiind independent de direcţia de deformare. Se neglijează amortizarea internă a arborelui şi alte surse de amortizare externă.

Se consideră masa m a discului concentrată în punctul G, la distanţa ε de centrul geometric al discului C, punctul de intersecţie cu axa arborelui. Axa care uneşte centrele lagărelor intersectează planul median al discului în punctul O, iar cea care uneşte centrele fusurilor — în punctul L. Coordonatele punctelor G, C şi L sînt notate în figura 1*b*. Se consideră că masa $m_a/2$ a fiecărei jumătăţi de arbore este concentrată jumătate la extremitatea arborelui $m_1 = \dfrac{m_a}{4}$ şi jumătate în dreptul discului, în punctul C (neexcentric).

Prin aplicarea principiului lui d'Alembert, se scriu ecuaţiile de echilibru dinamic al forţelor ce acţionează asupra arborelui (fig. 2 *a*) şi asupra discului (fig. 2*b*) în cazul mişcării staţionare a rotorului, cînd discul se roteşte cu viteza unghiulară $\omega = \text{const}$.

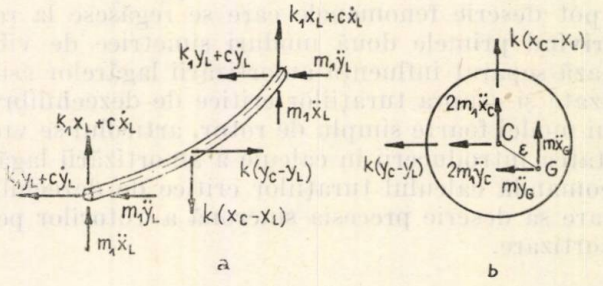


Fig. 2

Se obține pentru arbore

$$2c\dot{x}_L + 2k_1x_L + 2m_1\ddot{x}_L = k\,(x_C - x_L),$$
$$2c\dot{y}_L + 2k_1y_L + 2m_1\ddot{y}_L = k\,(y_C - y_L), \tag{1}$$

iar pentru disc

$$2m_1\ddot{x}_C + m\ddot{x}_G + k(x_C - x_L) = 0, \tag{2}$$
$$2m_1\ddot{y}_C + m\ddot{y}_G + k(y_C - y_L) = 0,$$

unde

$$x_G = x_C + \varepsilon\cos\omega t, \tag{3}$$
$$y_G = y_C + \varepsilon\sin\omega t.$$

Utilizînd notația complexă

$$r_L = x_L + \mathrm{i}y_L, \quad r_C = x_C + \mathrm{i}y_C, \quad r_G = x_G + \mathrm{i}y_G, \tag{4}$$

din relațiile (1)—(3) rezultă ecuațiile de mișcare ale centrului discului și centrului fusului :

$$2m_1\ddot{r}_L + 2c\dot{r}_L + 2k_1r_L + k(r_L - r_C) = 0, \tag{5}$$
$$(m + 2m_1)\,\ddot{r}_C + k\,(r_C - r_L) = m\varepsilon\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

Se notează

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad N = \frac{k}{2k_1}, \quad \zeta = \frac{2c}{2\sqrt{km}}, \quad \mu = \frac{m_a}{2m} = \frac{2m_1}{m}, \tag{6}$$

unde ω_n este viteza unghiulară critică a rotorului pe reazeme rigide și cu arbore de masă neglijabilă, N este raportul între constanta elastică a arborelui și cea a reazemelor (în paralel), ζ este un raport de amortizare calculat luînd ca referință coeficientul de amortizare critică al rotorului cu arbore fără masă și pe lagăre rigide, iar μ este raportul între masa unei jumătăți de arbore și masa discului.

Se obține sistemul de ecuații cuplate

$$\mu\ddot{r}_L + 2\zeta\omega_n\dot{r}_L + \frac{1}{N}\omega_n^2r_L + \omega_n^2(r_L - r_C) = 0, \tag{7}$$
$$(1 + \mu)\,\ddot{r}_C + \omega_n^2\,(r_C - r_L) = \varepsilon\omega^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t},$$

reprezentînd mișcarea rotorului sub influența dezechilibrului discului. Acesta excită numai modurile simetrice de precesie ale rotorului.

3. TURAŢIILE CRITICE AMORTIZATE

Anulînd în ecuaţiile (7) funcţia de excitaţie şi presupunînd soluţii de forma

$$r_L = R_L e^{\lambda t}, \quad r_C = R_C e^{\lambda t}, \tag{8}$$

din (7) rezultă sistemul algebric omogen

$$\left(\mu\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \frac{1}{N}\omega_n^2 + \omega_n^2\right) R_L - \omega_n^2 R_C = 0,$$
$$-\omega_n^2 R_L + [(1+\mu)\lambda^2 + \omega_n^2] R_C = 0, \tag{9}$$

care descrie mişcarea liberă a rotorului (sau mişcarea rotorului perfect echilibrat).

Condiţia de a avea soluţii nebanale conduce la ecuaţia caracteristică

$$\mu(1+\mu)\left(\frac{\lambda}{\omega_n}\right)^4 + 2\zeta(1+\mu)\left(\frac{\lambda}{\omega_n}\right)^3 + \left[\frac{N+1}{N}(1+\mu) + \mu\right]\left(\frac{\lambda}{\omega_n}\right)^2 +$$
$$+ 2\zeta\frac{\lambda}{\omega_n} + \frac{1}{N} = 0. \tag{10}$$

Se notează

$$\lambda = \alpha + i\omega_d, \tag{11}$$

unde α este un coeficient de atenuare negativ, iar ω_d este pulsaţia proprie „amortizată".

Pentru a studia natura valorilor proprii λ, s-au considerat două cazuri particulare : $N = 1$, $\mu = 1$ şi respectiv $N = 2{,}5$; $\mu = 1$, ambele corespunzînd unui arbore relativ greu. Rezultatele sînt prezentate în figurile 3 şi 4, în care pe axa absciselor se măsoară coeficientul de atenuare adimensional $\frac{\alpha}{\omega_n}$, pe axa ordonatelor — pulsaţia proprie amortizată adimensională $\frac{\omega_d}{\omega_n}$, iar în dreptul punctelor de pe curbe este notat raportul de amortitare ζ.

La rotorul cu $N = 1$, pulsaţia proprie amortizată ω_{d_1} a primului mod de vibraţie creşte de la $\omega_{el_1} = 0{,}4682\ \omega_n$ (pentru $\zeta = 0$) la $\omega_{rig} = 0{,}707\ \omega_n$ (pentru $\zeta = \infty$). Pulsaţia ω_{d_2} scade de la $\omega_{el_2} = 1{,}5102\ \omega_n$ (pentru $\zeta = 0$) la zero (pentru $\zeta \cong 1{,}325$) cînd modul al doilea devine amortizat critic (fig. 3).

La rotorul cu $N = 2{,}5$ situaţia se schimbă. Pulsaţia proprie amortizată ω_{d_2} a modului al doilea scade de la $\omega_{el_2} = 1{,}3372\ \omega_n$ (pentru $\zeta = 0$) la $\omega_d = 0{,}676\ \omega_n$ (pentru $\zeta = 1$) crescînd apoi la $\omega_{rig} = 0{,}707\ \omega_n$ (pentru $\zeta = \infty$). Pulsaţia ω_{d_1} scade de la $\omega_{el_1} = 0{,}3344\ \omega_n$ (pentru $\zeta = 0$) la zero (pentru $\zeta \cong 0{,}98$) cînd primul mod de vibraţie devine amortizat critic (fig. 4).

În figura 5 s-a reprezentat (pentru $\mu = 1$) variația pulsațiilor proprii amortizate adimensionale $\frac{\omega_{d_1}}{\omega_n}$ (linii continue) și $\frac{\omega_{d_2}}{\omega_n}$ (linii întrerupte) în funcție de raportul $\frac{1}{N} = \frac{2k_1}{k}$, care pentru k = const. reprezintă o mă-

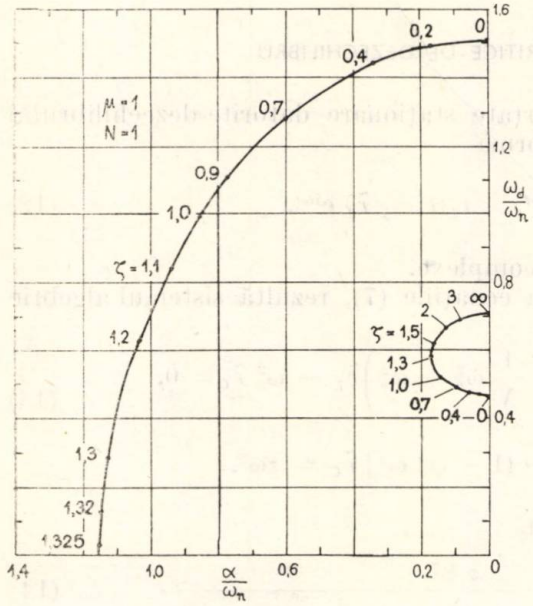


Fig. 3

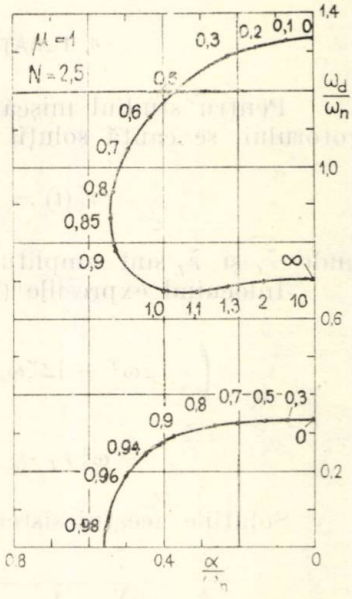


Fig. 4

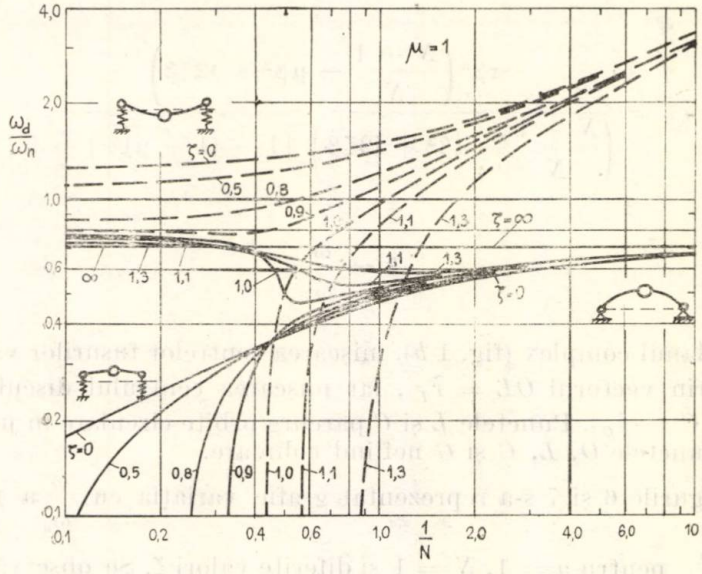


Fig. 5

sură a rigidităţii lagărelor. Pe diagramă s-au schiţat şi formele modurilor de precesie corespunzătoare. Se observă influenţa puternică a amortizării asupra pulsaţiilor proprii amortizate. În general, creşterea lui ζ şi a raportului $1/N$ duce la amortizarea critică a primului mod, pentru valori $\zeta<1$ şi a celui de-al doilea mod, pentru valori $\zeta>1$. Pentru $N = 2$ şi $\zeta = 1$ sistemul are valori proprii identice.

4. TURAŢIILE CRITICE DE DEZECHILIBRU

Pentru studiul mişcării forţate staţionare datorite dezechilibrului rotorului, se caută soluţii de forma

$$r_C(t) = \tilde{r}_C\, e^{i\omega t}, \qquad r_L(t) = \tilde{r}_L\, e^{i\omega t}, \tag{12}$$

unde $\tilde{r}_C$ şi $\tilde{r}_L$ sînt amplitudini complexe.

Înlocuind expresiile (12) în ecuaţiile (7), rezultă sistemul algebric

$$\begin{aligned} &\left(-\mu\omega^2 + i2\zeta\omega_n\,\omega + \frac{1}{N}\,\omega_n^2 + \omega_n^2\right)\tilde{r}_L - \omega_n^2\,\tilde{r}_C = 0, \\ &-\omega_n^2\,\tilde{r}_L + [\omega_n^2 - (1+\mu)\,\omega^2]\,\tilde{r}_C = \varepsilon\omega^2. \end{aligned} \tag{13}$$

Soluţiile acestui sistem sînt

$$\tilde{r}_L = \frac{\varepsilon\,\beta^2}{\left(\dfrac{N+1}{N} - \mu\beta^2 + i2\zeta\beta\right)[1-(1+\mu)\beta^2] - 1}, \tag{14}$$

$$\tilde{r}_C = \frac{\varepsilon\beta^2\left(\dfrac{N+1}{N} - \mu\beta^2 + i2\zeta\beta\right)}{\left(\dfrac{N+1}{N} - \mu\beta^2 + i2\zeta\beta\right)[1-(1+\mu)\beta^2] - 1} \tag{15}$$

unde

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}. \tag{16}$$

În planul complex (fig. 1 *b*), mişcarea centrelor fusurilor va fi reprezentată prin vectorul $\overline{OL} = |\tilde{r}_L|$, iar mişcarea centrului discului — prin vectorul $\overline{OC} = |\tilde{r}_C|$. Punctele L şi C parcurg orbite circulare în jurul punctului O, punctele O, L, C şi G nefiind coliniare.

În figurile 6 şi 7 s-a reprezentat grafic variaţia cu $\dfrac{\omega}{\omega_n}$ a mărimilor $\dfrac{|\tilde{r}_C|}{\varepsilon}$ şi $\dfrac{|\tilde{r}_L|}{\varepsilon}$ pentru $\mu = 1$, $N = 1$ şi diferite valori ζ. Se observă că odată

cu creșterea lui ζ maximul de rezonanță al primului mod de vibrație se deplasează spre dreapta, parcurgînd intervalul de pulsații cuprins între valorile ω_{el_1} (pentru $\zeta = 0$) și ω_{rig} (pentru $\zeta = \infty$), în timp ce vîrful de rezonanță al celui de-al doilea mod se deplasează spre stînga și apoi dispare.

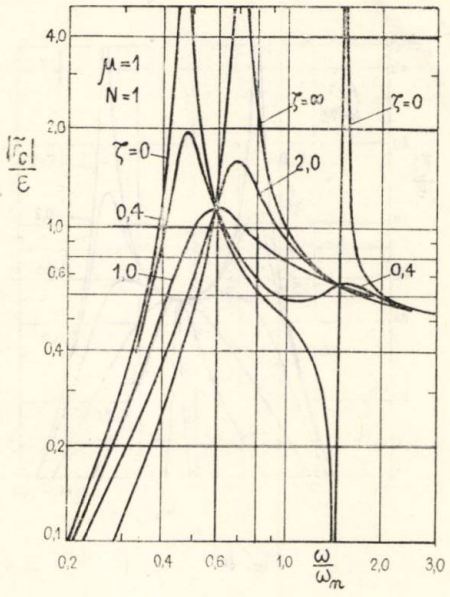


Fig. 6

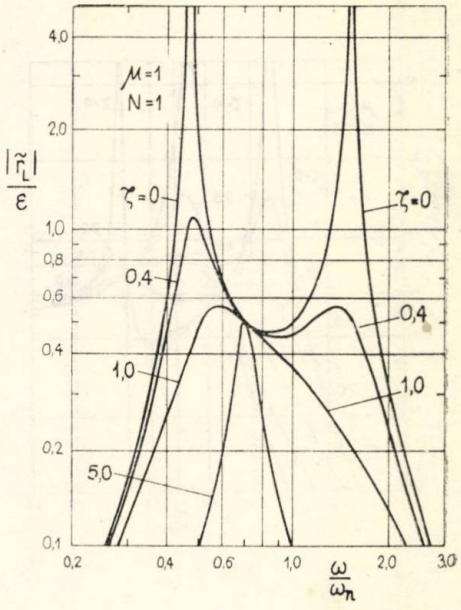


Fig. 7

În figurile 8 și 9 s-au reprezentat aceleași dependențe pentru $\mu = 1$ și $N = 2{,}5$. Se observă că odată cu creșterea lui ζ, vîrful de rezonanță al primului mod de vibrație se deplasează spre dreapta, în timp ce vîrful de rezonanță al celui de-al doilea mod se deplasează în general spre stînga (pentru $|\tilde{r}_C|$ acesta se deplasează mai întîi puțin spre dreapta).

Vitezele unghiulare ω_L, respectiv ω_C, la care razele orbitelor parcurse de punctele L, respectiv C, au valori maxime, se numesc *viteze unghiulare critice de dezechilibru*. Se remarcă variația diferită în funcție de ζ a acestora, față de cea a vitezelor critice amortizate. Aceasta sugerează înlocuirea diagramei turațiilor critice amortizate din figura 5, cu o diagramă a turațiilor critice de dezechilibru, problemă ce va fi tratată într-o altă lucrare.

Vitezele critice ω_L se obțin din condițiile $\mathrm{d}|\tilde{r}_L|/\mathrm{d}(\beta^2) = 0$, care se mai scrie

$$B_4\beta^8 + B_3\beta^6 + B_1\beta^2 + B_0 = 0,$$

unde

$$B_4 = \mu^2(1+\mu)^2,\ B_1 = \frac{1}{N}\left(1 + 2\mu + \frac{1+\mu}{N}\right) - 2\zeta^2,\ B_0 = -\frac{1}{N^2},$$

$$B_3 = 2\zeta^2(1+\mu)^2 - \mu(1+\mu)\left(1 + 2\mu + \frac{1+\mu}{N}\right).$$

Analog, vitezele critice ω_C se obţin din condiţia $\mathrm{d}\,|\tilde{r}_C|/\mathrm{d}\,(\beta^2) = 0$, care conduce la o ecuaţie de forma

$$C_5\beta^{10} + C_4\beta^8 + C_3\beta^6 + C_2\beta^4 + C_1\beta^2 + C_0 = 0.$$

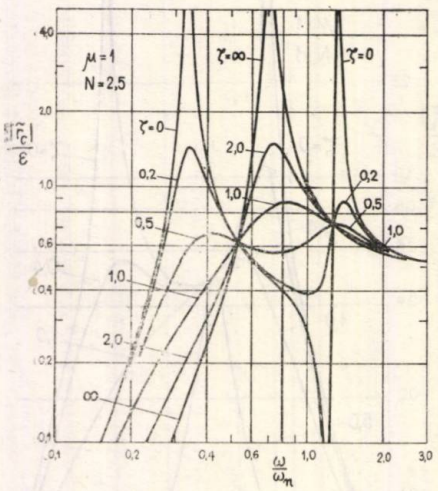


Fig. 8

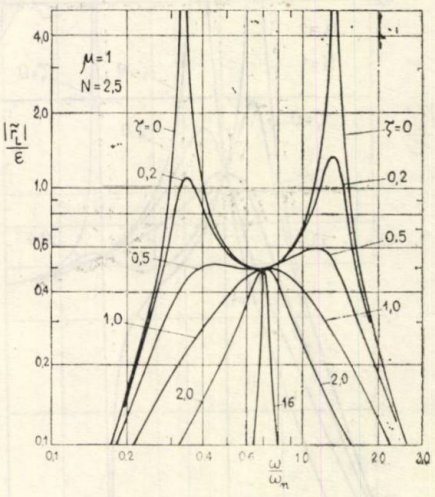


Fig. 9

Pentru $\mu = 1$, $N = 1$ şi $\zeta = 0{,}4$ se obţine $\omega_{L_1} = 0{,}4851\ \omega_n$, $\omega_{L_2}=1{,}3745\ \omega_n$, $\omega_{C_1}=0{,}4837\ \omega_n$, $\omega_{C_2} = 1{,}5589\ \omega_n$. Pentru aceste valori ale parametrilor sistemului, diferitele viteze unghiulare critice pot fi ordonate după cum urmează :

$$\omega_{el_1} < \omega_{d_1} < \omega_{C_1} < \omega_{L_1} < \omega_{rig} < \omega_{L_2} < \omega_{d_2} < \omega_{el_2} < \omega_{C_2} \qquad (17)$$

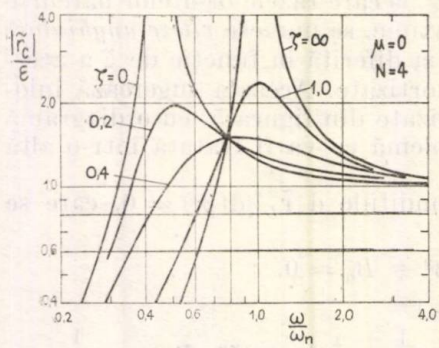


Fig. 10

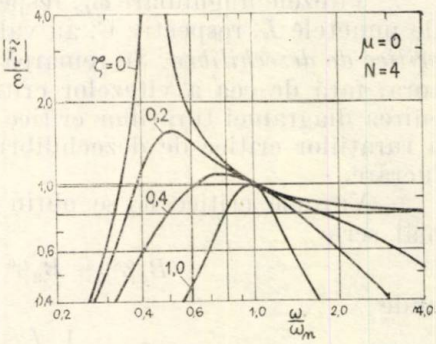


Fig. 11

Pentru alte valori ale parametrilor N, μ şi ζ, ordonarea valorilor turaţiilor critice poate fi diferită. Astfel, pentru $\zeta = 1{,}3$ din figura 3 rezultă $\omega_{d_2} < \omega_{d_1}$.

Se constată că pentru valori mari ale amortizării filmului de lubrifiant, pulsațiile ω_{d_1} și ω_{L_1} se apropie de ω_{rig}. Aceasta explică faptul că turațiile critice măsurate experimental se apropie uneori mai mult de valorile calculate pentru rotorul rezemat pe lagăre rigide, decît de cele calculate considerînd lagăre elastice fără amortizare.

În figurile 10 și 11 s-a reprezentat variația cu $\frac{\omega}{\omega_n}$ a mărimilor $\frac{|\tilde{r}_C|}{\varepsilon}$ și $\frac{|\tilde{r}_L|}{\varepsilon}$ pentru $N=1$ și $\mu = 0$, adică pentru un rotor la care se neglijează masa proprie a arborelui. Efectul principal este dispariția celui de-al doilea mod de vibrație. Se constată însă aceeași variație pronunțată a turațiilor critice de dezechilibru cu amortizarea filmului de lubrifiant.

5. CONCLUZII

Utilizînd cel mai simplu model de rotor elastic în care se ține cont și de masa proprie a arborelui, considerînd lagăre izotrope cu amortizare vîscoasă liniară, se pune în evidență necesitatea includerii efectului amortizării filmului de lubrifiant în calculul turațiilor critice ale sistemelor rotor-lagăre.

Calculul așa-numitelor turații critice amortizate sau al turațiilor critice de dezechilibru oferă o bază mai realistă de analiză a comportării mașinilor rotative la regimurile critice de funcționare, decît calculul convențional, în care se neglijează amortizarea din lagăre.

Pentru fiecare mod de vibrație există o valoare optimă a amortizării din lagăre care produce un răspuns minim la trecerea prin turația critică. Unul din modurile simetrice de vibrație poate fi amortizat critic, ceea ce determină dispariția maximului corespunzător al curbei de răspuns în frecvență.

Diagrama turațiilor critice amortizate oferă un mijloc eficient de analiză a influenței parametrilor dinamici ai lagărelor asupra răspunsului rotorului.

Primită la redacție la 26 aprilie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. J. W. Lund, B. Sternlicht, *Rotor-Bearing Dynamics With Emphasis on Attenuation*, Journal of Basic Engineering, Trans. ASME, Series D, **84**, 491–502 (1962).
2. J. W. Lund, F. K. Orcutt, *Calculations and Experiments on the Unbalance Response of a Flexible Rotor*, Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Series B, **89**, *4*, 785–796 (Nov. 1967).
3. J. W. Lund, *Stability and Damped Critical Speeds of a Flexible Rotor in Fluid-Film Bearings*, Journal of Engineering for Industry, Trans. ASME, Series B, **96**, *2*, 509–517 (May 1974).
4. J. W. Lund, *Rotor-Bearing Dynamics Technology* — Part 5 : *Computer Program Manual for Rotor Response and Stability*, MTI Report *65TR15* (May 1965).
5. M. Radeș, *On the Effect of Bearing Damping on the Critical Speeds of Flexible Rotors*, Buletinul I.P.B., 1980.

CALCULUL SERPENTINELOR TEHNOLOGICE ELICOIDALE

de A. PAVEL

Institutul de petrol și gaze Ploiești

Se efectuează analiza mecanică a serpentinelor tubulare elicoidale, cu perete subțire, atît în ipoteza înfășurării toroidale circulare, cît și în ipoteza înfășurării toroidale eliptice, de fiecare dată luîndu-se în considerație solicitările suplimentare de încovoiere și cele de răsucire. În final, se prezintă o aplicație numerică de interes practic curent.

În unele instalații moderne din industriile chimică și petrochimică, drept încălzitoare de mare capacitate, se utilizează aparatele tubulare de tipul celui exemplificat în figura 1, care servesc ca generatoare de căldură pe seama arderii combustibilului lichid ușor (de calorifer), agentul termic fiind difilul. La asemenea aparate tehnologice*, funcția principală revine serpentinei tubulare cilindrice elicoidale (fig. 2), care se poate executa în variantele simplă sau multiplă (ecranată), cu unul sau cu mai multe (2...6) începuturi de înfășurare, respectiv cu pas mic ($z \approx D_e$) sau cu pas mare ($z \approx 2...6\ D_e$), numărul n de înfășurări (spire) corespunzînd fluxului termic nominal.

Datorită formei lor constructive, atît în condițiile încercării de presiune hidraulică, cît și în condițiile de funcționare tehnologică normală, înfășurările serpentinelor tubulare cilindrice elicoidale sînt solicitate — în principal — la presiune interioară, încovoiere și răsucire. În mod normal, profilul secțiunii transversale a tubulaturii serpentinelor în discuție este cel corespunzător coroanei circulare (fig. 3*a*). Uneori, însă, din motive de execuție, profilul respectiv se ovalizează, lungindu-se puțin pe direcția generatoarei cilindrului după care se face înfășurarea și căpătînd astfel, forma unei coroane eliptice** (fig. 3*b*).

În baza acestor constatări practice, analiza serpentinelor tubulare elicoidale, presurizate la interior, se impune să fie efectuată atît în ipoteza înfășurării toroidale circulare, cît și în ipoteza înfășurării toroidale eliptice, de fiecare dată luîndu-se în considerație solicitările suplimentare de încovoiere și cele de răsucire. Se precizează că lucrarea de față se referă, în primul rînd, la serpentinele elicoidale cu perete subțire.

Eforturile unitare din peretele înfășurării toroidale cu profil circular, solicitate la presiune interioară. În acest caz, din condiția de echilibru,

---

* Numite sobe sau sobe tubulare, în limbajul practic.

** În cele ce urmează, pentru a simplifica efectuarea analizelor, grosimea de perete a tubulaturii se presupune ca fiind constantă (s = const.), iar solicitările masice se neglijează.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 6, 1980, P. 913–932

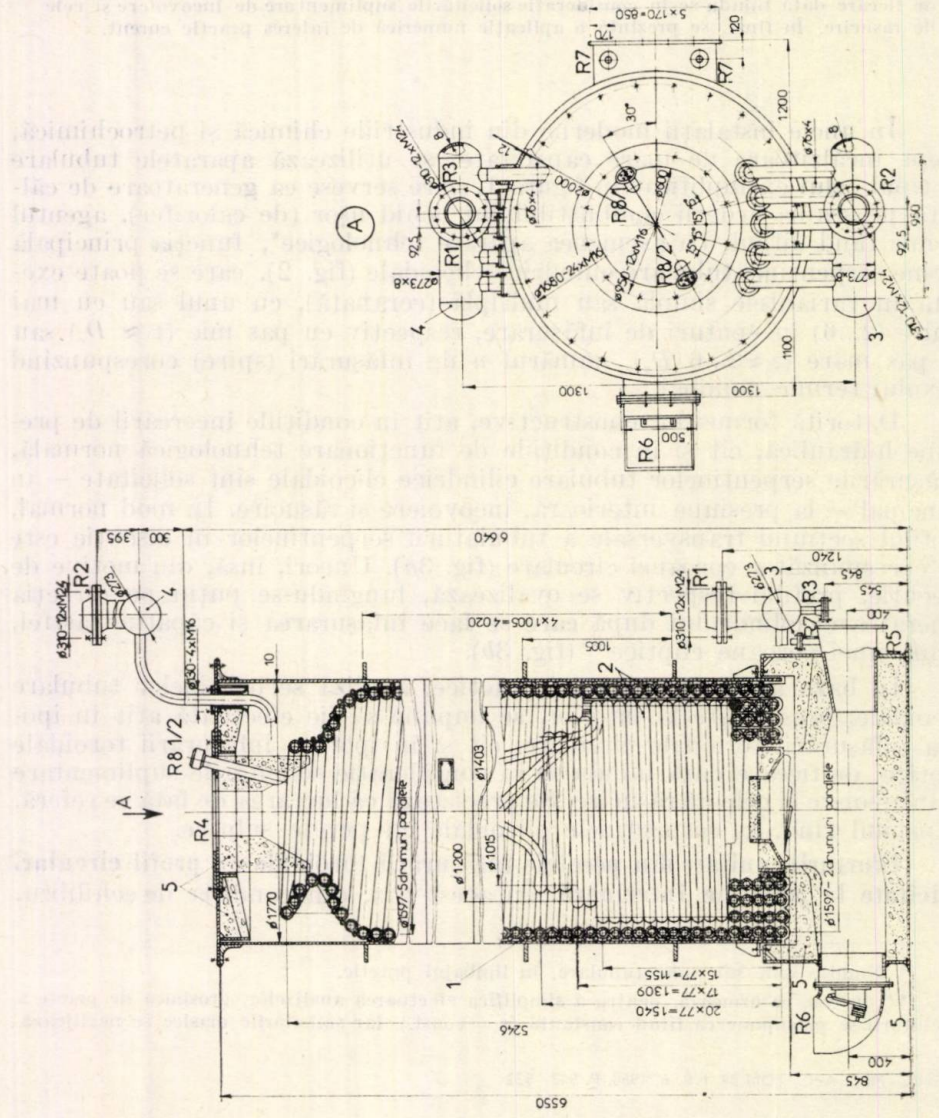
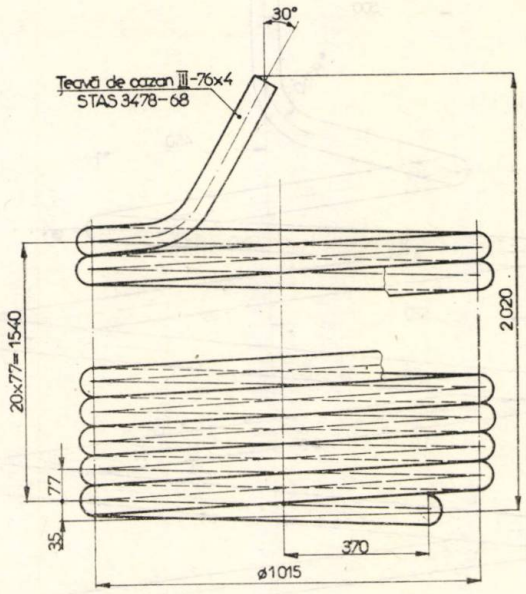
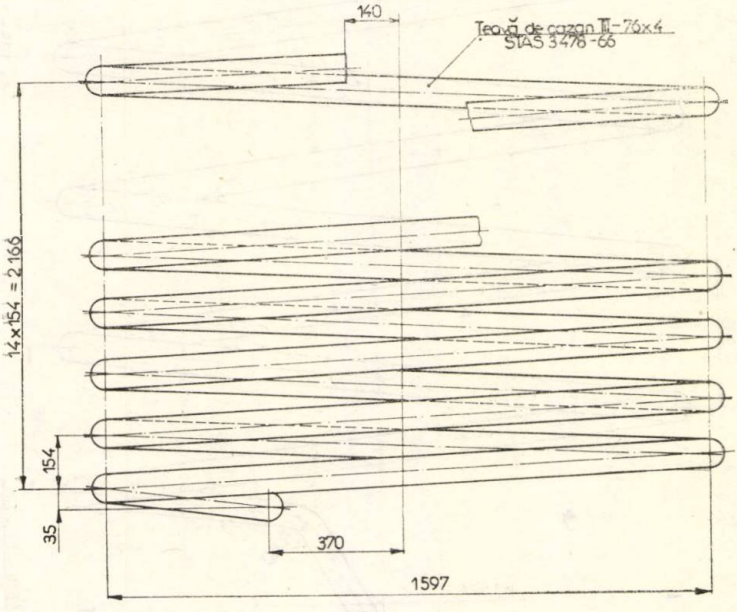


Fig. 1. — Încălzitorul de difil de 1,5 Gcal/h:

1 — carcasa (mantaua) metalică; *2* — serpentinele tubulare cilindrice elicoidale simple sau multiple (concentrice); *3* — colectorul de intrare a difilului; *4* — colectorul de ieșire a difilului; *5* — sistemul constructiv de protecție antitermică; *R1* — racordul de intrare a difilului; *R2* — racordul de ieșire a difilului; *R3* — racordul de golire a difilului; *R4* — racordul arzătorului; *R5* — racordul pentru evacuarea gazelor de ardere; *R6* — racordul clapetei de siguranță (de explozie); *R7* — racordul termocuplului; *R8* — racordul vizorului.



a



b

Fig. 2. — Elementele serpentinei cilindrice elicoidale (exemplificare): *a* — elementul cu $z = 77$ mm al serpentinei $D_e \times s = 76 \times 4$ mm, avînd $D_0 = 2R_0 = 1\,015$ mm și $z/D_e \to 1$; *b* — elementul cu $z = 154$ mm al serpentinei $D_e \times s = 76 \times 4$ mm, avînd $D_0 = 2\,R_0 = 1\,597$ mm și $z/D_e \to 2$;

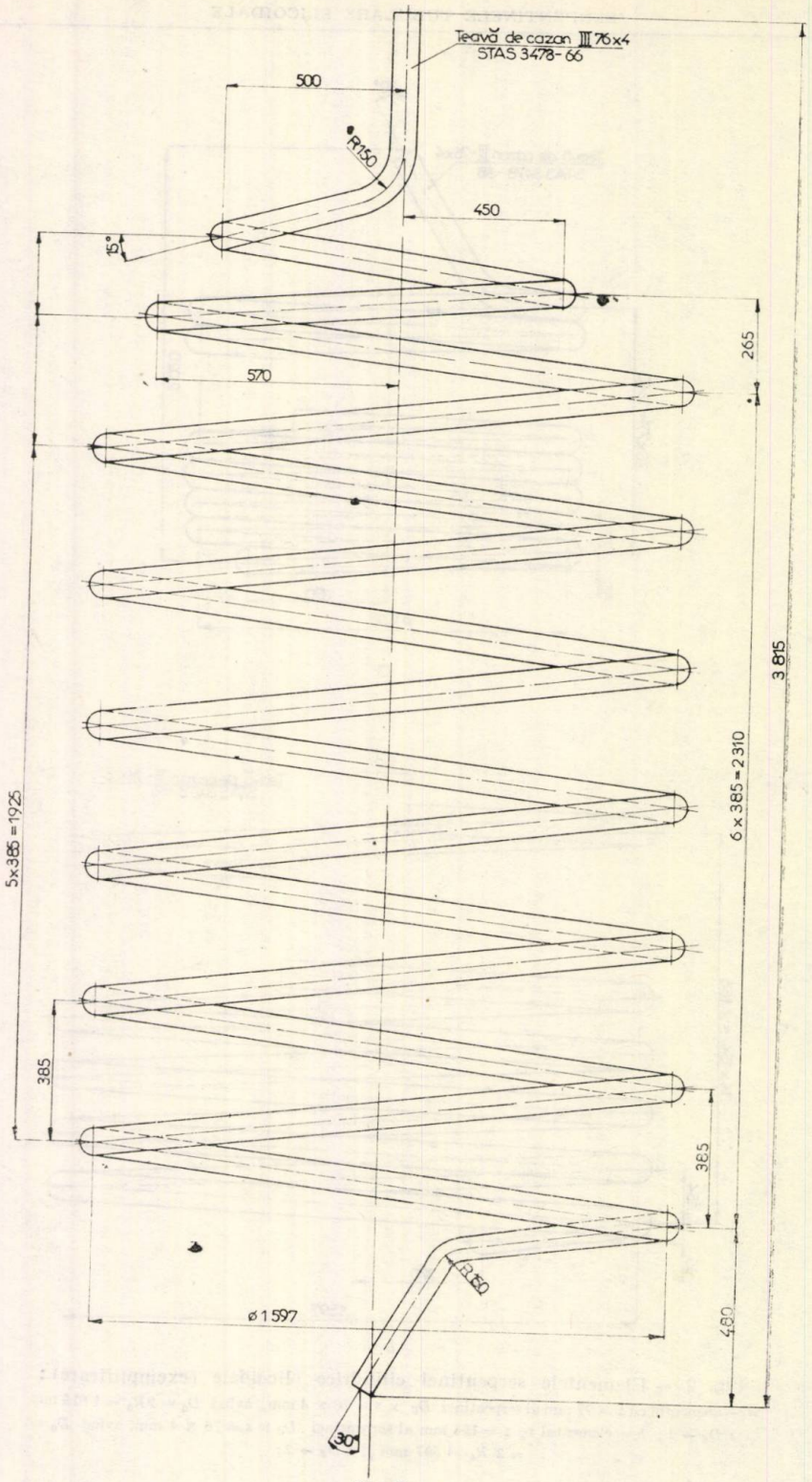


Fig. 2 *c*

elementul cu $z = 385$ mm al serpentinei $D_e \times s = 76 \times 4$ mm, avind $D_0 = 2\ R_0 = 1\,597$ mm și $z/D_e \to 5$.

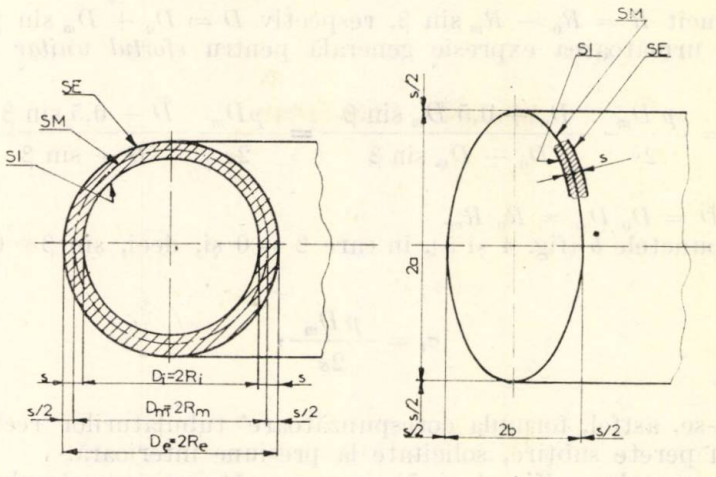


Fig. 3. — Profilul secțiunii transversale a tubulaturii serpentinelor cilindrice elicoidale.

a — elementul toroidal neovalizat (circular); *b* — elementul toroidal ovalizat.

redată prin ecuația de proiecții pe axa de revoluție (fig. 4), rezultă

$$\sigma_t = \frac{p\,(D^2 - D_0^2)}{4s\,D\,\sin\beta}\,, \tag{1}$$

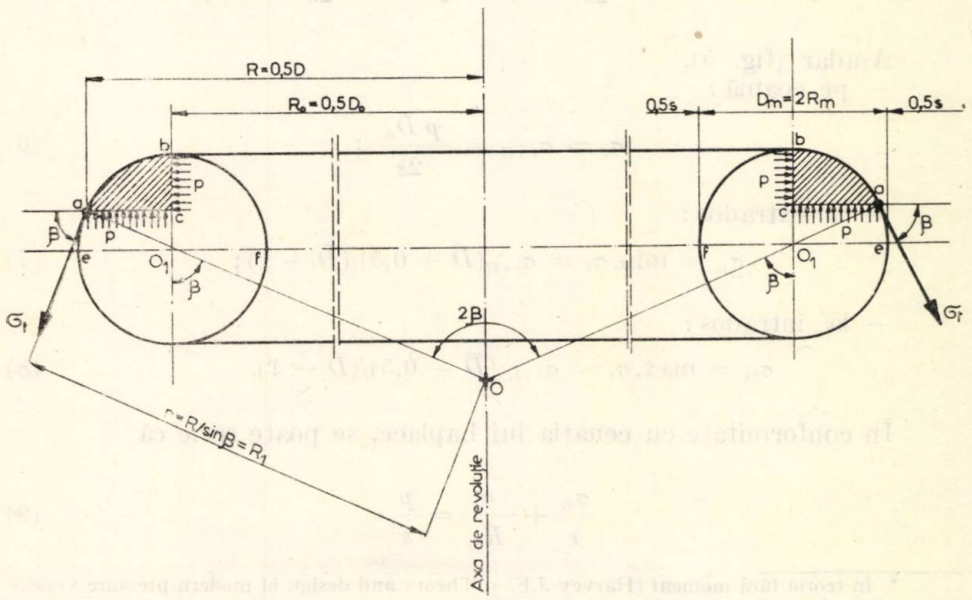


Fig. 4. — Schema de calcul pentru eforturile unitare din torul circular presurizat la interior.

BUDAPESTI MOSZAKI EGYETEM 1848 KÖNYVTÁRA

Întrucît $R = R_0 + R_m \sin \beta$, respectiv $D = D_0 + D_m \sin \beta$, din (1) se obține următoarea expresie generală pentru *efortul unitar inelar*:

$$\sigma_t = \frac{p D_m}{2s} \frac{D_0 + 0{,}5 D_m \sin \beta}{D_0 + D_m \sin \beta} = \frac{pD_m}{2s} \frac{\bar{D} + 0{,}5 \sin \beta}{D + \sin \beta}, \tag{2}$$

În care $\bar{D} = D_0/D_m = R_0/R_m$.

În punctele *b* (fig. 4 și 5), în care $\beta = 0$ și, deci, $\sin \beta = 0$, din (2) rezultă:

$$\sigma_t = \frac{p D_m}{2s}, \tag{3}$$

regăsindu-se, astfel, formula corespunzătoare* tubulaturilor rectilinii circulare, cu perete subțire, solicitate la presiune interioară.

În punctele *e* (fig. 4 și 5), corespunzătoare extradosului torului în discuție, $\beta = \pi/2$ și, deci, $\sin \beta = 1$, din (2) obținîndu-se:

$$\sigma_t = \frac{pD_m}{2s} \frac{\bar{D} + 0{,}5}{\bar{D} + 1} < \frac{pD_m}{2s}. \tag{4}$$

În punctele *f* (fig. 4 și 5), care aparțin liniei intradosului torului considerat, $\beta = 3\pi/2$ și, deci, $\sin \beta = -1$, din (2) rezultînd

$$\sigma_t = \frac{p D_m}{2s} \frac{\bar{D} - 0{,}5}{\bar{D} - 1} > \frac{p D_m}{2s}. \tag{5}$$

Așadar (fig. 5),

— pe coamă:

$$\sigma_t = \sigma_{t\,cil} = \frac{p D_m}{2s}; \tag{6}$$

— la extrados:

$$\sigma_{te} = \min. \sigma_t = \sigma_{t\,cil}(\bar{D} + 0{,}5)/(\bar{D} + 1); \tag{7}$$

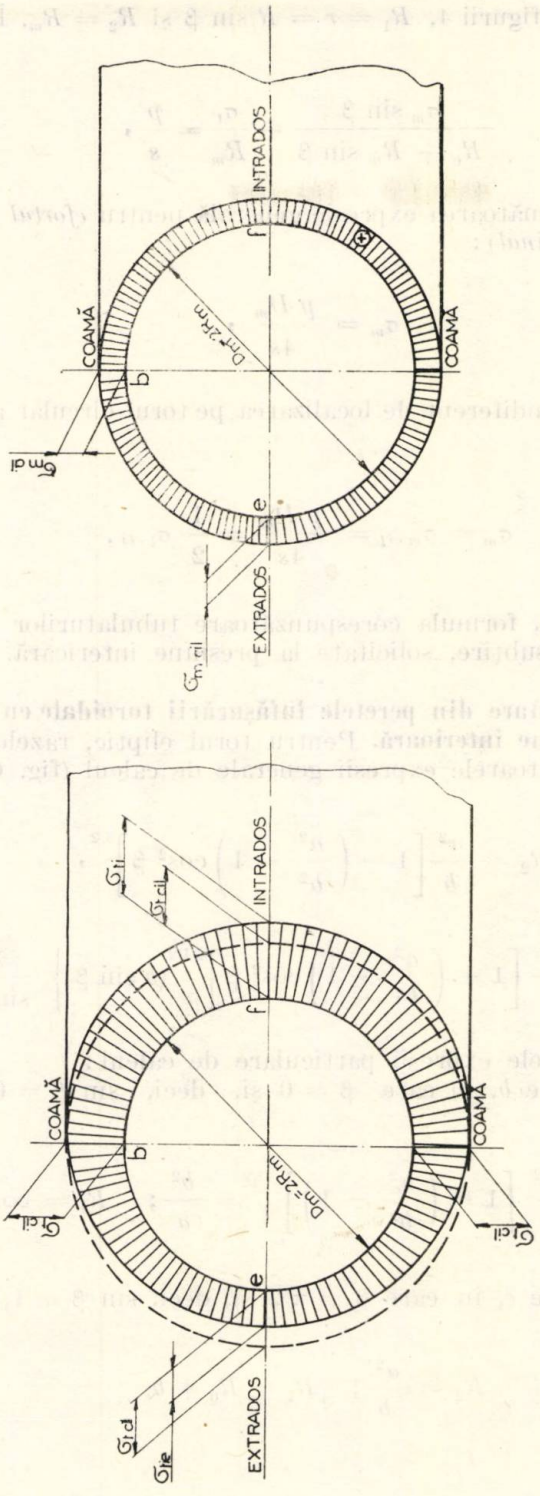
— la intrados:

$$\sigma_{ti} = \max. \sigma_t = \sigma_{t\,cil}\,(\bar{D} - 0{,}5)/(\bar{D} - 1). \tag{8}$$

În conformitate cu ecuația lui Laplace, se poate scrie că

$$\frac{\sigma_m}{r} + \frac{\sigma_t}{R_m} = \frac{p}{s}, \tag{9}$$

* În teoria fără moment (Harvey J.F. — Theory and design of modern pressure vessels. New York, Van Nostrand Reinhold Co., 1974).



a b

Fig. 5. — Eforturile unitare inelare (*a*) și longitudinale (*b*) din peretele torului circular solicitat la presiune interioară.

deoarece, conform figurii 4, $R_1 = r = R/\sin\beta$ și $R_2 = R_m$. În consecință, se obține

$$\frac{\sigma_m \sin\beta}{R_0 + R_m \sin\beta} + \frac{\sigma_t}{R_m} = \frac{p}{s}, \tag{10}$$

de unde rezultă următoarea expresie generală pentru *efortul unitar așa-zis meridian* (*longitudinal*):

$$\sigma_m = \frac{p\, D_m}{4s}, \tag{11}$$

care este valabilă indiferent de localizarea pe torul circular a punctelor a (fig. 4).

Așadar,

$$\sigma_m = \sigma_{m\,cil} = \frac{p\, D_m}{4s} = \frac{1}{2}\,\sigma_{t\,cil}, \tag{12}$$

regăsindu-se, astfel, formula corespunzătoare tubulaturilor rectilinii circulare, cu perete subțire, solicitate la presiune interioară.

Eforturile unitare din peretele înfășurării toroidale cu profil eliptic, solicitate la presiune interioară. Pentru torul eliptic, razele de curbură principale au următoarele expresii generale de calcul (fig. 6):

$$R_2 = \frac{a^2}{b}\left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\cos^2\beta\right]^{3/2}, \tag{13}$$

$$R_1 = \left\{R_0 + \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\cos^2\beta\right]^{-1/2}(b\sin\beta)\right\}\frac{1}{\sin\beta}, \tag{14}$$

rezultînd următoarele expresii particulare de calcul:

— în punctele b, în care $\beta = 0$ și, deci, $\sin\beta = 0$, respectiv $\cos\beta = 1$:

$$R_2 = \frac{a^2}{b}\left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\right]^{-3/2} = \frac{b^2}{a}; \quad R_1 = \infty, \tag{15}$$

— în punctele e, în care $\beta = \pi/2$ și, deci, $\sin\beta = 1$, $\cos\beta = 0$:

$$R_2 = \frac{a^2}{b}; \quad R_1 = R_0 + b, \tag{16}$$

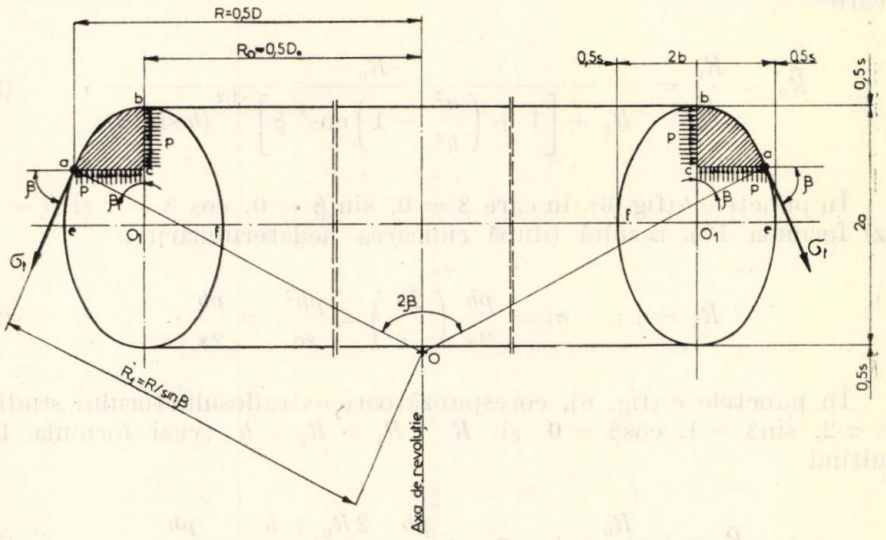


Fig. 6. — Schema de calcul pentru eforturile unitare din torul eliptic presurizat la interior.

— în punctele f, în care $\beta = 3\pi/2$ și, deci, $\sin \beta = -1$, respectiv $\cos \beta = 0$:

$$R_2 = \frac{a^2}{b}; \qquad R_1 = -(R_0 - b). \tag{17}$$

Condiția de echilibru, redată prin ecuația de proiecții pe axa de revoluție (fig. 3), este

$$(\pi R^2 - \pi R_0^2)\, p - 2\pi R s \sigma_t \sin \beta = 0,$$

de unde rezultă

$$\sigma_t = \frac{p(R^2 - R_0^2)}{2\, s\, R \sin \beta}, \tag{18}$$

ca structură, formulele (1) și (18) fiind identice.

Întrucît

$$R = R_1 \sin\beta = R_0 + \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\cos^2\beta\right]^{-1/2} (b \sin \beta), \tag{19}$$

din (18) se obține următoarea expresie generală pentru *efortul unitar inelar* :

$$\sigma_t = \frac{p}{2\, s \sin \beta}\left\{R_0 + \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\cos^2 \beta\right]^{-1/2} (b \sin \beta)\right\}(1 - \bar{R}_0^2), \tag{20}$$

în care

$$\bar{R}_0 = \frac{R_0}{R} = \frac{R_0}{R_0 + \left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\cos^2\beta\right]^{-1/2}(b \sin\beta)}. \tag{21}$$

În punctele b (fig. 6), în care $\beta = 0$, $\sin\beta = 0$, $\cos\beta = 1$ și $R = R_0$ (vezi formula 19), rezultă (după ridicarea nedeterminării):

$$\bar{R}_0 = 1; \quad \sigma_t = \frac{pb}{2s}\left(\frac{2b}{a}\right) = \frac{pb^2}{sa} > \frac{pb}{2s}. \tag{22}$$

În punctele e (fig. 6), corespunzătoare extradosului torului studiat, $\beta = \pi/2$, $\sin\beta = 1$, $\cos\beta = 0$ și $R = R_1 = R_0 + b$ (vezi formula 16), rezultînd

$$\bar{R}_0 = \frac{R_0}{R_0 + b}; \quad \sigma_{te} = \frac{pb}{2s}\,\frac{2R_0 + b}{R_0 + b} > \frac{pb}{2s}. \tag{23}$$

În punctele f (fig. 6), corespunzătoare intradosului torului eliptic respectiv, $\beta = 3\pi/2$, $\sin\beta = -1$, $\cos\beta = 0$ și $R = -R_1 = R_0 - b$, astfel că rezultă (vezi formula 17):

$$\bar{R}_0 = \frac{R_0}{R_0 - b}; \quad \sigma_{ti} = \frac{pb}{2s}\,\frac{2R_0 - b}{R_0 - b} > \frac{pb}{2s}. \tag{24}$$

Se va remarca, însă, că

$$\sigma_{te} < \sigma_{ti}, \tag{25}$$

ceea ce înseamnă că efortul unitar inelar este *maxim* — și de această dată — la intradosul torului presurizat la interior studiat (fig. 6 și 7).

În baza ecuației lui Laplace, se poate scrie următoarea corelație:

$$\frac{\sigma_m}{R_1} + \frac{\sigma_t}{R_2} = \frac{p}{s}. \tag{26}$$

Substituind (13), (14) și (18) în (26), pentru cazul general rezultă următoarea expresie de calcul corespunzătoare *efortului unitar meridian* (*longitudinal*):

$$\sigma_m = \frac{p}{s \sin\beta}\left[R_0 + \frac{b \sin\beta}{\sqrt{1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\cos^2\beta}}\right] \times$$

$$\times \left\{ 1 - \frac{b(R^2 - R_0^2)\sqrt{\left[1 + \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)\cos^2\beta\right]^3}}{2\,a^2\,R\,\sin\beta} \right\}, \qquad (27)$$

de unde, prin particularizare, rezultă (fig. 6 și 7):

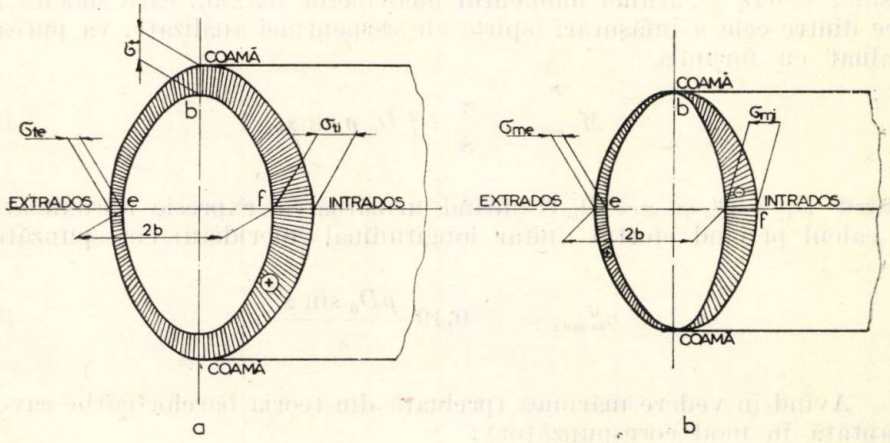


Fig. 7. — Eforturile unitare inelare (*a*) și longitudinale (*b*) din peretele torului eliptic solicitat la presiune interioară.

— pentru punctele *b* de pe coamă, după ridicarea nedeterminărilor:

$$\sigma_m = 0; \qquad (28)$$

— pentru punctele *e* de la extrados:

$$\sigma_{me} = \frac{p(R_0 + b)}{s}\left[1 - \frac{b^2}{2a^2}\,\frac{2\,R_0 + b}{R_0 + b}\right], \qquad (29)$$

— pentru punctele *f* de la intrados:

$$\sigma_{mi} = \frac{p(R_0 - b)}{s}\left[\frac{b^2}{2a^2}\,\frac{2\,R_0 - b}{R_0 - b} - 1\right]. \qquad (30)$$

De remarcat că formula (22) se poate obține și direct din (26), avînd în vedere că $\sigma_m = 0$ și $R_2 = b^2/a$ (vezi formula 15).

Eforturile unitare suplimentare din peretele înfășurării tubulare elicoidale presurizate la interior. *Cazul profilului circular.* Forța de presiune rezultantă P_p, care acționează asupra serpentinei cilindrice elicoidale, se presupune că se manifestă pe direcția axei de revoluție a cilindrului

după care s-a realizat înfășurarea, avînd următoarea expresie evidentă:

$$P_p = \frac{\pi D_i^2}{4} p. \tag{31}$$

Dacă se va ține seama de unghiul α al înfășurării elicoidale date — cu pasul $z \leqslant 6 D_e$ —, atunci momentul încovoietor maxim, care solicită fiecare dintre cele n înfășurări (spire) ale serpentinei analizate, va putea fi evaluat cu formula

$$M_{i\,max} = \frac{\pi}{8} D_i^2 D_0 p \sin\alpha, \tag{32}$$

pentru $D_i \to D_m$ și $s \ll D_m$ rezultînd următoarea expresie aproximativă de calcul privind efortul unitar longitudinal (meridian) corespunzător:

$$\sigma^M_{m\,max} = \pm 0{,}49 \frac{p D_0 \sin\alpha}{s} \tag{33}$$

Avînd în vedere mărimea (preluată din teoria barelor curbe cave și adaptată în mod corespunzător):

$$\omega = \frac{\bar{D} + \sin^2\alpha + 0{,}50}{\bar{D} + 1{,}51 \sin^2\alpha - 0{,}75}, \tag{34}$$

pentru efortul unitar tangențial maxim, corespunzător solicitării la *răsucire* a fiecărei înfășurări (spire) a serpentinei elicoidale date, ca rezultat al acțiunii forței P_p, rezultă următoarea formulă aproximativă de calcul (valabilă pentru $D_i \to D_e$ și $s \ll D_m$):

$$\tau_{max} = 2\omega \frac{p D_0 \cos\alpha}{D_e\left[1 - \left(1 - \frac{2s}{D_e}\right)^4\right]}. \tag{35}$$

Prin aplicarea principiului superpoziției, în baza expresiilor cunoscute (11) și (33), pentru evaluarea efortului unitar longitudinal (meridian) *rezultant* maxim, din peretele serpentinei tubulare cilindrice elicoidale cu profil circular, se obține formula:

$$\sigma_{m\,max} = y \frac{p D_m}{4s}, \tag{36}$$

în care

$$y = 1 \pm 1{,}96 \frac{D_0}{D_m} \sin\alpha, \tag{37}$$

semnul plus corespunzînd coamei inferioare, iar cel minus — coamei superioare (fig. 5*a*). Evident, pentru intrados și extrados, unde $\sigma_m^M = 0$, se obține $\sigma_{m\,max} = \sigma_m$ și, deci, $y = 1{,}00$.

În conformitate cu criteriul (ipoteza) deformațiilor specifice principale, condiția de securitate tehnică pentru serpentina tubulară analizată se formulează astfel:

$$\sigma_{ech} = 0{,}35\ \sigma_{MAX} + 0{,}65\sqrt{\sigma_{MAX}^2 + 4\tau_{max}^2} \leqslant \sigma_{as}. \tag{38}$$

Cazul profilului eliptic. În acest caz, forța de presiune rezultantă P_p și momentul de încovoiere maxim $M_{i\,max}$ au expresiile cunoscute (31) și, respectiv, (32), rezultînd:

$$\sigma_{m\,max}^M = \pm \frac{p D_i^2}{2s} \frac{D_0 \sin\alpha}{a(a+3b)}, \tag{39}$$

$$\tau_{max} = \frac{\omega}{16} \frac{p D_i^2}{s} \frac{D_0 \cos\alpha}{\left(a - \frac{s}{2}\right)\left(b - \frac{s}{2}\right)}, \tag{40}$$

în care

$$\omega = \frac{\frac{D_0}{2b} + \sin^2\alpha + 0{,}50}{\frac{D_0}{2b} + 1{,}51\ \sin^2\alpha - 0{,}75}, \tag{41}$$

astfel că, în punctele b de pe coamă (fig. 7*b*), unde $\sigma_m = 0$ (formula 28), se obține

$$\sigma_{m\,max} = \sigma_{m\,max}^M, \tag{42}$$

semnul plus corespunzînd coamei inferioare, iar cel minus — coamei superioare. Evident, pentru intrados și extrados, unde $\sigma_m^M = 0$, se obține:

$$\sigma_{m\,max} = \sigma_{me}, \text{ respectiv } \sigma_{m\,max} = \sigma_{mi}. \tag{43}$$

În forma sa generală, condiția de securitate tehnică pentru serpentina tubulară analizată este cea cunoscută (38).

Aplicație numerică. În cele ce urmează, aplicația numerică se referă la un încălzitor de difil de 1,5Gcal/h (fig. 1), ale cărui caracteristici tehnice principale sînt următoarele: $p = 15$ bar $= 1{,}5$ N/mm² — presiunea maximă admisibilă de lucru; $t = t_{max} = 400$°C — temperatura maximă admisibilă de lucru; $t_{min} = 20$°C — temperatura minimă admisibilă de lucru. Fluidele tehnologice: *în vas* — gaze de ardere toxice, cu temperatura maximă de 845,5°C, cu temperatura minimă de 474°C, la presiune atmosferică (30 mm H_2O); *în serpentină* — difil lichid cu densitatea de 1,062 kg/dm³, toxic și inflamabil, cu temperatura maximă de 320°C, cu temperatura minimă de 300°C și cu pre-

siunea de regim de 15 bar. Materialul de bază : OLT 35K – STAS 8184–77, cu $\sigma_a = \frac{\sigma^{400}_{0,2}}{c_c} =$

$= \frac{110}{1,5} = 73,3$ N/mm². Controlul nedistructiv : 100%. Coeficientul de rezistență al sudurii : $\varphi = 0,9$. Adaosul pentru condițiile de exploatare : $s_a = 0$. Serpentina ⌀1015 (interioară) : țeavă de cazan III $D_e \times s = 76 \times 4$ mm – STAS 3478–68, cu pasul $z = 77$ mm. Serpentina ⌀1597 (exterioară) : țeavă de cazan III $D_e \times s = 76 \times 4$ mm – STAS 3478–68, cu pasul $z = 2 \times 77 = 154$ mm și $z = 5 \times 77 = 385$ mm.

Notă. În urma execuției ,serpentina Φ1597 s-a ovalizat, rezultînd $2a/2b = 80/70$ mm. Se admite $s = 3,6$ mm.

Serpentina Φ1015 mm (interioară). a) Cazul fără ovalizarea de fabricație.

$D_e = 76$ mm
$D_i = 68$ mm
$D_m = 72$ mm } diametrele exterior, interior și mediu ale peretelui de rezistență ;

$D_0 = 2\ R_0 = 1015$ mm – diametrul nominal al serpentinei ;

$\bar{D} = D_0/D_m = 1\,015/72 = 14,0972$ – simplexul de caracterizare ;

$\alpha = 1,38°$ – unghiul de înfășurare al serpentinei tubulare cilindrice elicoidale.

$$\sigma_{t\,cil} = \frac{1,5 \cdot 72}{2 \cdot 4} = 13,5 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 6)};$$

$$\sigma_{te} = 13,5 \cdot \frac{14,0972 + 0,5}{14,0972 + 1,0} = 13,05 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 7)};$$

$$\sigma_{ti} = 13,5 \cdot \frac{14,0972 - 0,5}{14,0972 - 1,0} = 14,02 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 8)};$$

$$\sigma_m = \frac{1,5 \cdot 72}{4 \cdot 4} = 6,75 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 11)};$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{ti} = 14,02 \text{ N/mm}^2 \ll \sigma_{as} = 66 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma^M_{m\,max} = \pm 0,49 \cdot \frac{1,5 \cdot 1015 \cdot \sin 1,38°}{4} = \pm 4,49 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 33)};$$

$$\omega = \frac{14,0972 + \sin^2 1,38° + 0,50}{14,0972 + 1,51 \cdot \sin^2 1,38° - 0,75} = 1,0936 \text{ (formula 34)};$$

$$\tau_{max} = 2 \cdot 1,0936 \cdot \frac{1,5 \cdot 1015 \cdot \cos 1,38°}{76 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{2 \cdot 4}{76}\right)^4\right]} = 121,98 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 35)};$$

$$y = 1 \pm 1,96 \cdot \frac{1\,015}{72} \cdot \sin 1,38° = 1 \pm 0,665 \text{ (formula 37)};$$

$$\sigma_{m\,max} = (1 \pm 0{,}665) \cdot \frac{1{,}5 \cdot 72}{4 \cdot 4} = \begin{matrix} +11{,}24\ \text{N/mm}^2 \\ +2{,}26\ \text{N/mm}^2 \end{matrix} \quad \text{(formula 36)};$$

$$\sigma_{MAX} = 0{,}5 \cdot (13{,}50 + 11{,}24) = 12{,}37\ \text{N/mm}^2;$$

$$\sigma_{ech} = 0{,}35 \cdot 12{,}37 + 0{,}65 \cdot \sqrt{12{,}37^2 + 4 \cdot 121{,}98^2} = 163{,}11\ \text{N/mm}^2 \geqslant$$

$$\geqslant \sigma_{as} = 66\ \text{N/mm}^2 \text{ (formula 38).}$$

b) *Cazul cu ovalizarea de fabricație.*

$$a = \frac{80 - 2 \cdot 3{,}6}{2} = 36{,}4\ \text{mm} - \text{semiaxa mare a elipsei mediane};$$

$$b = \frac{70 - 2 \cdot 3{,}6}{2} = 31{,}4\ \text{mm} - \text{semiaxa mică a elipsei mediane};$$

$$R_0 = \frac{D_0}{2} = \frac{1\,015}{2} = 507{,}5\ \text{mm} - \text{raza nominală a serpentinei};$$

$$\sigma_t = \frac{1{,}5 \cdot 31{,}4^2}{3{,}6 \cdot 36{,}4} = 11{,}29\ \text{N/mm}^2 \text{ (formula 22)};$$

$$\sigma_{te} = \frac{1{,}5 \cdot 31{,}4}{2 \cdot 3{,}6} \cdot \frac{2.507{,}5 + 31{,}4}{507{,}5 + 31{,}4} = 12{,}70\ \text{N/mm}^2 \text{ (formula 23)};$$

$$\sigma_{ti} = \frac{1{,}5 \cdot 31{,}4}{2 \cdot 3{,}6} \cdot \frac{2.507{,}5 - 31{,}4}{507{,}5 - 31{,}4} = 13{,}51\ \text{N/mm}^2 \text{ (formula 24)};$$

$$\sigma_m = 0 \text{ (formula 27)};$$

$$\sigma_{me} = \frac{1{,}5 \cdot (507{,}5 + 31{,}4)}{3{,}6} \cdot \left[1 - \frac{31{,}4^2}{2 \cdot 36{,}4^2} \cdot \frac{2.507{,}5 + 31{,}4}{507{,}5 + 31{,}4}\right] =$$

$$= 62{,}32\ \text{N/mm}^2 \text{ (formula 29)};$$

$$\sigma_{mi} = \frac{1{,}5 \cdot (507{,}5 - 31{,}4)}{3{,}6} \cdot \left[\frac{31{,}4^2}{2 \cdot 36{,}4^2} \cdot \frac{2{,}507{,}5 - 31{,}4}{507{,}5 - 31{,}4} - 1\right] =$$

$$= -45{,}89\ \text{N/mm}^2 \text{ (formula 30)};$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{me} = 62{,}32\ \text{N/mm}^2 \lhd \sigma_{as} = 66\ \text{N/mm}^2;$$

$$\sigma_{ech\,e} = \sqrt{\sigma_{me}^2 + \sigma_{te}^2 - \sigma_{me}\sigma_{te}} =$$

$$= \sqrt{62,32^2 + 12,70^2 - 62,32 \cdot 12,70} = 57,04 \text{ N/mm}^2 <$$

$$< \sigma_{max} = \sigma_{me} = 62,32 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$\sigma_{ech\ i} = \sqrt{(-45,89)^2 + 13,51^2 - (-45,89) \cdot 13,51} =$$

$$= 53,93 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{ech\ e} < \sigma_{max} = \sigma_{me} < \sigma_{as} = 66 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$\sigma^{M}_{m\ max} = \pm \frac{1,5 \cdot 68^2}{2 \cdot 3,6} \cdot \frac{1015 \cdot \sin 1,38^\circ}{40 \cdot (40 + 3.35)} = \pm 4,06 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 39)} ;$$

$$\omega = \frac{\frac{1015}{2,35} + \sin^2 1,38^\circ + 0,50}{\frac{1015}{2.35} + 1,51 \cdot \sin^2 1,38^\circ - 0,75} = 1,0909 \text{ (formula 41)} ;$$

$$\tau_{max} = \frac{1,0909}{16} \cdot \frac{1,5 \cdot 68^2}{3,6} \cdot \frac{1015 \cdot \cos 1,38^\circ}{\left(40 - \frac{3,6}{2}\right) \cdot \left(35 - \frac{3,6}{2}\right)} = 105,10 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 40)} ;$$

$$\sigma^{b}_{m\ max} = \sigma^{M}_{m\ max} = \pm 4,06 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 42)} ;$$

$$\sigma^{e}_{m\ max} = \sigma_{me} = 62,32 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 43)} ;$$

$$\sigma^{f}_{m\ max} = \sigma_{mi} = -45,89 \text{ (formula 43)} ;$$

$$\sigma^{e}_{MAX} = 0,5 \cdot (12,70 + 62,32) = 37,51 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$\sigma^{e}_{ech} = \sigma_{ech\ e} = 0,35 \cdot 37,51 + 0,65 \cdot \sqrt{37,51^2 + 4 \cdot 104,10^2} =$$

$$= 151,92 \text{ N/mm}^2 \geqslant \sigma_{as} = 66 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 38)} ;$$

$$\sigma^{f}_{MAX} = 0,5 \cdot (13,51 - 45,89) = -16,19 \text{ N/mm}^2 ;$$

$$\sigma^{f}_{ech} = \sigma_{ech\ i} = 0,35 \cdot (-16,19) + 0,65 \cdot \sqrt{(-16,19)^2 + 4 \cdot 105,10^2} =$$

$$= 131,37 \text{ N/mm}^2 \geqslant \sigma_{as} = 66 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 38)}.$$

Serpentina $\varnothing$1597 mm(exterioară). a) Cazul fără ovalizarea de fabricație.

$D_0 = 2\ R_0 = 1\,597$ mm ; $\alpha = 4,39^\circ$; $z = 385$ mm ;

$\bar{D} = 1\,597/72 = 22,1806$;

$$\sigma_{t\ cil} = \frac{1,5 \cdot 72}{2 \cdot 4} = 13,50 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 6)} ;$$

$$\sigma_{te} = 13{,}50 \cdot \frac{22{,}1806 + 0{,}5}{22{,}1806 + 1{,}0} = 13{,}21 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 7)};$$

$$\sigma_{ti} = 13{,}50 \cdot \frac{22{,}1806 - 0{,}5}{22{,}1806 - 1{,}0} = 13{,}82 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 8)};$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{ti} = 13{,}82 \text{ N/mm}^2 \ll \sigma_{a\,s} = 66 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma^{M}_{m\,max} = \pm 0{,}49 \cdot \frac{1{,}5 \cdot 1597 \cdot \sin 4{,}39^\circ}{4} = \pm 22{,}46 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 33)};$$

$$\omega = \frac{22{,}1806 + \sin^2 4{,}39^\circ + 0{,}50}{22{,}1806 + 1{,}51 \sin^2 4{,}39^\circ - 0{,}75} = 1{,}0582 \text{ (formula 34)};$$

$$\tau_{max} = 2 \cdot 1{,}0582 \cdot \frac{1{,}5 \cdot 1597 \cdot \cos 4{,}39^\circ}{76 \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{2 \cdot 4}{76}\right)^4\right]} = 185{,}21 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 35)};$$

$$y = 1 \pm 1{,}96 \cdot \frac{1\,597}{72} \cdot \sin 4{,}39^\circ = 1 \pm 3{,}3277 \text{ (formula 37)};$$

$$\sigma_{m\,max} = (1 \pm 3{,}3277) \cdot \frac{1{,}5 \cdot 72}{4 \cdot 4} = \begin{matrix} + 29{,}21 \text{ N/mm}^2 \\ - 15{,}71 \text{ N/mm}^2 \end{matrix} \text{ (formula 36)};$$

$$\sigma_{MAX} = 0{,}5 \cdot (13{,}50 + 29{,}21) = 21{,}36 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{ech} = 0{,}35 \cdot 21{,}36 + 0{,}65 \cdot \sqrt{21{,}36^2 + 4 \cdot 185{,}21^2} = 248{,}65 \text{ N/mm}^2 \gg$$

$$\gg \sigma_{as} = 66 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 38, pentru coama inferioară)};$$

$$\sigma_{MAX} = 0{,}5 \cdot (13{,}50 - 15{,}71) = -1{,}11 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{ech} = 0{,}35 \cdot (-1{,}11) + 0{,}65 \cdot \sqrt{(-1{,}11)^2 + 4 \cdot 185{,}21^2} = 240{,}39 \text{ N/mm}^2 \gg$$

$$\gg \sigma_{as} = 66 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 38, pentru coama superioară)};$$

$$\sigma_{m\,max} = 29{,}21 \text{ N/mm}^2 \ll \sigma_{as} = 66 \text{ N/mm}^2.$$

b) *Cazul cu ovalizarea de fabricație.*

$$R_0 = \frac{D_0}{2} = \frac{1\,597}{2} = 798{,}5 \text{ mm};$$

$$\sigma_t = \frac{1{,}5 \cdot 31{,}4^2}{3{,}6 \cdot 36{,}4} = 11{,}29 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 22)};$$

$$\sigma_{te} = \frac{1,5 \cdot 31,4}{2 \cdot 3,6} \cdot \frac{2 \cdot 798,5 + 31,4}{798,5 + 31,4} = 12,84 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 23)};$$

$$\sigma_{ti} = \frac{1,5 \cdot 31,4}{2 \cdot 3,6} \cdot \frac{2 \cdot 798,5 - 31,4}{798,5 - 31,4} = 13,35 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 24)};$$

$$\sigma_m = 0 \text{ (formula 27)};$$

$$\sigma_{me} = \frac{1,5 \cdot (798,5 + 31,4)}{3,6} \cdot \left[1 - \frac{31,4^2}{2 \cdot 36,4^2} \cdot \frac{2 \cdot 798,5 + 31,4}{798,5 + 31,4} \right] =$$

$$= 93,34 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 29)};$$

$$\sigma_{mi} = \frac{1,5 \cdot (798,5 - 31,4)}{3,6} \cdot \left[\frac{31,4^2}{2 \cdot 36,4^2} \cdot \frac{2 \cdot 798,5 - 31,4}{798,5 - 31,4} - 1 \right] =$$

$$= -76,91 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 30)};$$

$$\sigma_{max} = \sigma_{me} = 93,34 \text{ N/mm}^2 > \sigma_{as} = 66 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{ech\ e} = \sqrt{93,34^2 + 12,84^2 - 93,34 \cdot 12,84} = 87,63 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{max} = \sigma_{me} = 93,34 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{ech\ i} = \sqrt{(-76,91)^2 + 13,35^2 - (-76,91) \cdot 13,95} =$$

$$= 84,65 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{ech\ e} < \sigma_{max} = \sigma_{me};$$

$$\sigma_{ech\ e} = 87,63 \text{ N/mm}^2 > \sigma_{as} = 66 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma_{ech\ i} = 84,65 \text{ N/mm}^2 > \sigma_{as} = 66 \text{ N/mm}^2.$$

$$\sigma^M_{m\ max} = \pm \frac{1,5 \cdot 68^2}{2 \cdot 3,6} \cdot \frac{1597 \sin 4,39^\circ}{40 \cdot (40 + 3.35)} = \pm 20,30 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 39)}$$

$$\omega = \frac{\frac{1597}{2 \cdot 35} + \sin^2 4,39^\circ + 0,50}{\frac{1597}{2 \cdot 35} + 1,51 \cdot \sin^2 4,39^\circ - 0,75} = 1,0562 \text{ (formula 41)};$$

$$\tau_{max} = \frac{1,0562}{16} \cdot \frac{1,5 \cdot 68^2}{3,6} \cdot \frac{1597 \cdot \cos 4,39^\circ}{\left(40 - \frac{3,6}{2}\right) \cdot \left(35 - \frac{3,6}{2}\right)} =$$

$$= 159,68 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 40)};$$

$$\sigma^b_{m\ max} = \sigma^M_{m\ max} = \pm 20,30 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 42)};$$

$$\sigma^{e}_{m\,max} = \sigma_{me} = 93{,}34 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 43)};$$

$$\sigma^{e}_{MAX} = 0{,}5 \cdot (12{,}84 + 93{,}34) = 53{,}09 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma^{f}_{m\,max} = \sigma_{mi} = -76{,}91 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 43)};$$

$$\sigma^{f}_{MAX} = 0{,}5 \cdot (13{,}35 - 76{,}91) = -31{,}78 \text{ N/mm}^2;$$

$$\sigma^{e}_{ech} = \sigma_{ech\,e} = 0{,}35 \cdot 53{,}09 + 0{,}65 \cdot \sqrt{53{,}09^2 + 4 \cdot 159{,}68^2} =$$

$$= 229{,}01 \text{ N/mm}^2 \gg \sigma_{as} = 66 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 38)};$$

$$\sigma^{f}_{ech} = \sigma_{ech\,i} = 0{,}35 \cdot (-31{,}78) + 0{,}65 \cdot \sqrt{(-31{,}78)^2 + 4.159{,}68^2} =$$

$$= 197{,}49 \text{ N/mm}^2 \gg \sigma_{as} = 66 \text{ N/mm}^2 \text{ (formula 38)}.$$

Constatări importante. 1) Sub acțiunea presiunii interioare, deformîndu-se, serpentina cilindrică elicoidală cu ovalizare de fabricație se comportă ca și cum s-ar strînge înspre interiorul înfășurărilor, grosimea de perete trebuind să se micșoreze la extrados și să se mărească la intrados.

2) Mărimea considerabilă a eforturilor unitare tangențiale, corespunzătoare solicitării de răsucire, este determinantă și extrem de periculoasă. Dacă, însă, serpentinele cilindrice elicoidale analizate sînt blocate din punctul de vedere al solicitărilor de răsucire, atunci rezultă (întrucît $\tau_{max} \to 0$):

a) Serpentina $\varnothing$1 015 mm (interioară) este corespunzătoare atît în alternativa profilului circular, cît și în alternativa profilului eliptic (cu ovalizare de fabricație);

b) serpentina $\varnothing$1 597 (exterioară), cu $z = 385$ mm, este corespunzătoare în cazul fără ovalizare de fabricație și este necorespunzătoare (pentru $c_c = 1{,}5$ și $\varphi = 0{,}9$) în cazul cu ovalizare de fabricație, cînd se obține:

$$c_c^{-1} = \frac{\sigma_{max}}{\varphi \sigma^{400}_{0,2}} = \frac{93{,}34}{0{,}9 \cdot 110} = 0{,}9428 \to c_c = 1{,}061 \ll 1{,}500.$$

3) În acest din urmă caz, ameliorarea coeficientului de securitate tehnică c_c se poate realiza prin: utilizarea unui material de bază calitativ mai bun (OLT 45K sau 16Mo3), majorarea corespunzătoare a grosimii de perete s, reconsiderarea temperaturii de calcul a peretelui metalic, diminuarea ovalizării de fabricație și, deci, îmbunătățirea calității execuției etc.

4) Oricum, se insistă asupra necesității ca serpentinele cilindrice elicoidale, presurizate la interior, să fie blocate și, deci, protejate din punctul de vedere al solicitărilor de răsucire.

Notațiile utilizate

$D_e = 2R_e$, $D_m = 2R_m$, $D_i = 2R_i$ reprezintă diametrele exterior, mediu și interior, respectiv razele corespunzătoare, ale peretelui de rezistență, în mm;

s, s_a — grosimea de rezistență și grosimea de adaos ale peretelui tubulaturii, în mm;

a, $b < a$ — semiaxele elipsei mediane a elementului toroidal cu profil eliptic, în mm;

$D_0 = 2R_0$ — diametrul nominal al înfășurării cilindrice elicoidale, în mm;

$D = 2R$ — diametrul curent al înfășurării cilindrice elicoidale, în mm;

R_1, R_2 — razele cu curbură principale, în mm;

r — raza de curbură curentă a elementului toroidal, în mm;

n — numărul de începuturi al înfășurării cilindrice elicoidale;

z — pasul înfășurării cilindrice elicoidale, în mm;

α — unghiul de înfășurare al serpentinei tubulare cilindrice elicoidale, în grd; $\alpha = \text{arc tg}\,(z/\pi D_0)$;

$\bar{D} = D_0/D_m = R_0/R_m$ — simplexul de caracterizare dimensională ;
p — presiunea manometrică interioară, în bar sau în N/mm² ;
t, t_{max}, t_{min} — temperaturile oarecare, maximă și minimă ale peretelui metalic, în grd ;
P_p — forța de presiune rezultantă, în N ;
$M_{i\,max}$ — momentul încovoietor (exterior) maxim, în N.mm ;
$\sigma_t, \sigma_{t\,cil}, \sigma_{te}, \sigma_{ti}$ — eforturile unitare inelar, inelar pentru elementul tubular (cilindric) rectiliniu, inelar la extradosul torului și inelar la intradosul torului, în N/mm² ;
$\sigma_m, \sigma_{m\,cil}, \overset{M}{\sigma_m}, \sigma_{m\,max}, \overset{M}{\sigma}_{m\,max}, \overset{b}{\sigma}_{m\,max}, \overset{e}{\sigma}_{m\,max}, \overset{f}{\sigma}_{m\,max}$ — eforturile unitare longitudinal, longitudinal pentru elementul tubular (cilindric) rectiliniu, longitudinal din încovoiere propriu-zisă, longitudinal maxim, longitudinal maxim din încovoiere propriu-zisă și longitudinal maxim la coamă (b), extrados (e) și intrados (f), în N/mm² ;
τ_{max} — efortul unitar tangențial maxim din răsucire, în N/mm² ;
$\sigma_{max} = \sigma_t$ — efortul unitar normal principal maxim, în N/mm² ;
$\sigma_{MAX} = 0{,}5(\sigma_t + \sigma_m)$;
$\sigma_{ech}, \sigma_{ech\,e} = \overset{e}{\sigma}_{ech}, \sigma_{ech\,i} = \overset{f}{\sigma}_{ech}$ — eforturile unitare echivalent, echivalent la extrados și echivalent la intrados, în N/mm² ;
$\overset{t}{\sigma}_{0,2}$ — limita tehnică de curgere a materialului de bază, la temperatura de calcul, în N/mm² ;
$\sigma_a, \sigma_{as} \leqslant \varphi\sigma_a$ — rezistențele admisibile corespunzătoare materialului de bază și sudurii, în N/mm² ;
$\varphi \leqslant 1$ — coeficientul de rezistență al sudurii ;
$c_c \geqslant 1{,}5$ — coeficientul de siguranță față de limita tehnică de curgere ;
ω — coeficientul de influență a curburii ;
γ — coeficientul (factorul) de supratensionare (suprasolicitare) ;
β — deschiderea punctului curent de pe suprafața mediană, în rad sau grd ;
SE, SM, SI — suprafețele exterioară, mediană și interioară ale peretelui de rezistență.

Primită la redacție la 25 ianuarie 1980

MOTOR PNEUMATIC CU EXTENSIE ȘI AJUTAJE MOBILE

de I. SPULBER
Ministerul Educației și Învățământului—CEPEIT
C. SPULBER
Intreprinderea Optica Română București

În lucrare este prezentat un nou tip de motor pneumatic care funcționează pe un principiu asemănător turbinelor axiale.
După ce sînt explicate bazele teoretice justificative și modul de funcționare al motorului propus, se fac în continuare cîteva considerente teoretice asupra metodologiei de calcul adoptate. Apoi se propun o serie de parametri funcționali și constructivi pentru motorul studiat, adaptați prin selecție în urma calculelor efectuate și ale căror rezultate sînt trecute în tabele.
În continuare se face o succintă comparație cu alte tipuri de motoare pneumatice folosite actualmente, în ceea ce privește performanțele tehnico-economice, se justifică în final avantajele acestui nou model de motor, prezentîndu-se cîteva din avantajele imediate ale utilizării acestui motor în industria constructoare de mașini.

1. DESCRIERE

Motorul pneumatic cu extensie și ajutaje mobile se aseamănă cu turbina Ljüngström prin aceea că are practicate în rotor un număr de orificii. Spre deosebire însă de acest tip de turbină, la care rolul orificiilor este de a dirija agentul motor spre palete, turbina de tip Ljüngström este o turbină radială. În cazul pe care îl vom analiza, orificiile sînt ajutaje în care se destinde agentul motor. Din punct de vedere funcțional, acest motor se aseamănă cu turbinele axiale.

Mișcarea de rotație la arborele motorului *1* din figura 1 este obținută prin curgerea aerului comprimat prin ajutajele a_i ale discului *5*, ajutaje înclinate cu un anumit unghi față de axul motorului. Curgerea în ajutaj este provocată de existența unei diferențe de presiune între presiunea p_1 din amonte și presiunea p_2 din aval.

Datorită acestui fapt, la trecerea prin ajutaj, aerul este obligat să execute un proces de destindere, în care timp pune în libertate un lucru mecanic. O parte din acest lucru mecanic servește la mișcarea de rotație a discului *5*.

Pentru o execuție mai ușoară a statorului, considerăm că acesta poate fi executat din mai multe bucăți asamblate corespunzător. În figura 1 am sugerat o astfel de asamblare indicată prin reperele *2a*, *2b*, *2c*.

Pierderile de aer sînt micșorate la minim prin folosirea unor elemente de etanșare *3*, în sine cunoscute, dispuse la ieșirea arborelui *1* din carcasa motorului și prin prevederea unor zone cu labirinturi *4* care asigură etanșarea rotorului *5* față de carcasă.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 39, NR. 6, 1980, P. 933—940

Rulmentul *6* are rolul de a prelua forța axială rezultată în urma creării lucrului mecanic de destindere, rulmenții *7* și *8* constituie reazemele radiale ale părții rotorice a motorului.

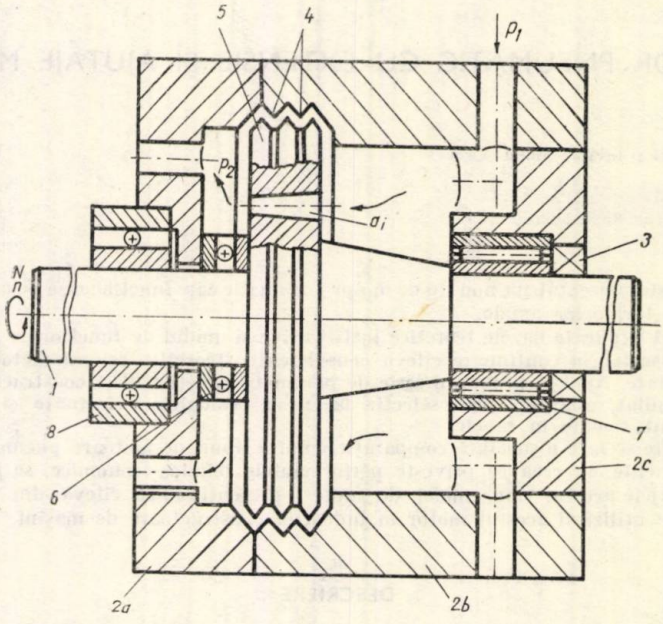


Fig. 1

2. CALCULUL PNEUMO-CINEMATIC

Puterea teoretică a unui motor care funcționează după un ciclu cu extensiune se poate calcula cu binecunoscuta formulă

$$N = G\ R\ T_1 \frac{n}{n-1}\left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right], \tag{1}$$

în care G este debitul de aer care alimentează motorul, R este constanta specifică a gazelor perfecte, p_1 și T_1 sînt presiunea, respectiv temperatura aerului la intrarea în ajutaj, p_2 este presiunea aerului la ieșirea din ajutaj, iar n este exponentul politropic.

Deoarece ajutajul este de lungime foarte mică, în general se poate considera că viteza în ajutaj fiind foarte ridicată, nu este timp să se facă schimb de căldură între aer și pereții ajutajului deci în ajutaj are loc o destindere după o transformare adiabatică, iar $n = k$, unde k reprezintă exponentul adiabatic, care, pentru aer, are valoarea 1,4.

Pentru a stabili presiunile p_1 și p_2 ne-am condus după următoarele considerente :

a) Se știe că, în jurul numărului Mach = 1, procesele aerodinamice sînt foarte complexe, fiind marcate de o mare instabilitate. Apar vibrații și unde de șoc. În lucrarea [8] se recomandă ocolirea valorilor $M = 0{,}8-1$.

b) S-a admis nejustificat faptul că capacitatea mașinilor care funcționează cu aer scade cu pătratul presiunii și că uneltele pneumatice sînt construite în general pentru 7 at, realizînd la această presiune puterea lor optimă; dacă presiunea la locul de lucru scade de la 7 la 5 at, puterea transmisă sculelor scade cu 50% [10].

Din cele enunțate mai sus reiese clar faptul că pentru a obține o putere N cît mai mare la arborele motor este indicat să lucrăm cu o diferență de presiune cît mai mare, iar presiunea din amonte să fie cît mai înaltă cu putință.

Totodată, pentru a nu intra în zona vibrațiilor, va trebui să evităm atingerea vitezei critice, lucrînd la viteze subsonice, calculînd cu relațiile

$$W_2 = \sqrt{2g \frac{k}{k-1} \frac{p_1}{\gamma_1} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}, \tag{2}$$

$$P_{cr} = p_1 \left(\frac{2}{k+1}\right)^{2/k-1}, \tag{3}$$

recomandate în [1], vitezele de ieșire din ajutaj pentru diferite presiuni, precum și presiunile critice corespunzătoare, rezultatele obținute le-am trecut în tabela 1 și tabela 2.

Tabela 1

$\frac{p_2}{p_1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4,5}{6}$	$\frac{4}{6}$
$W_2\left(\frac{m}{s}\right)$	590	745	440	700	348	840	540	262	327

Luînd în considerare posibilitățile de producere și distribuire a aerului comprimat în întreprinderi, adoptăm ca presiune de dimensionare a ajutajului perechea $p_1 = 6$ at, $p_2 = 4$ at.

Tabela 2

p_1 (at)	6	5	4	3	2
p_{cr} (at)	3,168	2,64	2,112	1,584	1,056

În acest caz $p_2 > p_{cr}$ și deoarece $W_2 < W_{cr}$, ajutajul trebuie să fie convergent [8].

Ajutajul este proiectat să realizeze practic o cădere de presiune între valorile p_1 și p_2, regimul de lucru va fi ales corespunzător acestei cerințe, presiunile de intrare și ieșire din ajutaj reale, respectiv p_{1r} și p_{2r} fiind date de relațiile

$$p_{1r} = p_1 + \Delta p', \tag{4}$$

$$p_{2r} = p_2 - \Delta p'', \tag{5}$$

unde $\Delta p'$ și $\Delta p''$ reprezintă pierderile de presiune la intrare în ajutaj, respectiv la ieșire din ajutaj.

În tabela 3 am prezentat rezultatele obținute pentru diferite mărimi de ajutaje calculînd puterea N_1 cu relația (1), iar debitul G cu formula din [1] și anume

$$G = \mu f \sqrt{\frac{2\rho_1 k}{k-1} p_1 \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{2/k} - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{k+1}{k}} \right]}, \tag{6}$$

în care μ este coeficientul de scurgere al aerului, pentru un unghi de convergență al ajutajului $\alpha = 11°$ [1] și f reprezintă aria secțiunii minime a ajutajului corespunzătoare diametrului d_e

Tabela 3

d_e (mm)	3	4	5	6	8	10	12	15
$f \cdot 10^{-6}$ (mp)	7,05	12,5	19,5	28	50	78	113	175
$G \cdot 10^{-3}$ (kg/s)	7	12,4	19,3	27,7	49,5	77	112	173
N_1 (kw)	0,59	1,04	1,62	2,33	4,15	6,5	9,4	14,5

Consumul orar de aer poate fi determinat din [1] cu relația

$$Q_t = 15{,}83\ V_t\, n\, \frac{p_1}{T_1}, \tag{7}$$

unde

$$V_t = Z\, \frac{G}{\rho_N}, \tag{8}$$

Z reprezintă numărul de ajutaje ale discului 5, iar ρ_N densitatea aerului în condiții normale de presiune și temperatură.

Adoptînd turația $n = 3000$ rot/min, consumul necesar de aer este dat în tabela 4.

Notăm cu η_1 coeficientul de transformare al lucrului mecanic produs prin destindere în lucru mecanic de rotație. Deoarece din lucrul mecanic înglobat în masa discului 5, o parte contribuie la rotirea acestuia, iar cealaltă parte tinde să-l deplaseze axial, vom avea

$$N_r = \eta_m \cdot \eta_1 N_1 \cdot Z, \tag{9}$$

unde η_m este randamentul mecanic și

$$\eta_1 = \sin \beta, \tag{10}$$

N_r reprezentînd puterea reală la arborele motor.

Luînd pe $Z = 6$ și $\beta = 30°$ în tabela 4 prezentam valorile lui Q din relația (7) și N_r din relația (9) în care am ținut cont de valorile date în tabela 3.

Tabela 4

$Q\left(\frac{\text{Nmc}}{\text{h}}\right)$	315	560	870	1160	2220	3470	5050	7800
N_r (kw)	1,77	3,12	4,86	7	12,45	19,5	28,2	43,5

3. CALCULUL PIERDERILOR DE PRESIUNE. DETERMINAREA REGIMULUI DE FUNCȚIONARE

a) Pierderile în ajutaj apar datorită frecărilor ; în afară de aceasta, curgerea aerului în ajutaj este turbulentă. Ca urmare, viteza absolută de ieșire a aerului din ajutaj este mai mică decît cea teoretică așa cum rezultă și din relația

$$W_{2r} = \varphi w_2 \tag{11}$$

unde $\varphi = 0{,}95...0{,}96$ [6].

Pierderile din ajutaj corespunzătoare acestor valori ale coeficientului φ reprezintă 10...8% din scăderea de presiune disponibilă [6]

Adaptare $p_{aj} = 0{,}1 \ \Delta p = 0{,}2$ at.

b) Pierderile la intrare în ajutaje apar din cauza schimbării secțiunii curentului de aer. La intrarea jetului în canalul ajutajului particulele sînt dirijate în direcții diferite, ceea ce provoacă comprimarea vînei de aer sub acțiunea forței centrifuge.

Pierderile de presiune ajung pînă la 15% din scăderea de presiune [6].

$$p_i = 0{,}15 \ \Delta p = 0{,}3 \text{ at.}$$

c) Pierderile la ieșire din ajutaj sînt provocate de faptul că în condiții reale, la ieșire aerul posedă o anumită viteză absolută și deci o anumită energie cinetică care nu poate fi utilizată.

Deoarece prin ipoteză ne-am propus să nu luăm în calcul energia cinetică producătoare de lucru mecanic de rotație, vom face abstracție de aceste pierderi.

d) Pierderile prin interstiții apar datorită existenței unor fante între rotor și stator : ca urmare, admisia aerului este parțială, adică nu se face pe toată circumferința discului, ci numai pe un sector al lui. Vom adopta soluții constructive (labirinte) astfel ca pierderile de presiune să nu depășească 15% din Δp.

$$p_j = 0{,}15 \ \Delta p = 0{,}3 \text{ at.}$$

e) Pentru simplificarea calculelor vom considera scurgerea aerului ca producîndu-se în regim permanent. Eroarea care se introduce prin

această simplificare se datorește neglijării forțelor de inerție ale masei de aer, forțe care apar ca urmare a variației în timp a vitezei curentului de aer. Această eroare este substanțială numai în cazul unor conducte foarte lungi și în condițiile unor variații considerabile ale vitezei curentului de aer într-un interval scurt de timp. Cu ipoteza admisă, eroarea introdusă în calcule este sub 3% [1],

$$p_k = 0{,}03\ \Delta p = 0{,}06 \text{ at.}$$

f) Regimul de curgere influențează mărimea pierderii de sarcină. Limita la care se face trecerea la turbulență este dată de numărul lui Reynolds. În general, se consideră că trecerea de la scurgerea laminară la cea turbulentă în tuburi cu secțiune circulară constantă se face în jurul valorii $\mathcal{R}e = 2320$. În cazul nostru, ajutajul avînd o secțiune continuu variabilă, trecerea la regim turbulent se face la alte valori ale numărului lui Reynalds ($\mathcal{R}e$).

La ajutaje convergente, $\mathcal{R}e \leqslant 5{,}7\ R_e$ [2]. Vom considera $\mathcal{R}e = 5{,}7 R_e$, unde $R_e = wd/\nu$ și ținînd seama de variația densității aerului cu presiunea, obținem în tabela 5 valorile vitezelor de curgere critice la intrare în ajutaj unde probabilitatea existenței unei curgeri laminare este mai mare decît la ieșirea din ajutaj.

Tabela 5

d_e (mm)	2	4	6	8	10	12	14	16
W_l (m/s)	28,4	14,2	9,5	7,1	5,7	4,86	4,06	3,55

Se observă că avem o curgere turbulentă în ajutaj ori care ar fi presiunea din amonte p_1 indicată în tabela 1.

În regim turbulent, pierderea de sarcină este dată de relația

$$h_r = \frac{\lambda}{2g}\frac{w^2}{d}\,l, \tag{12}$$

unde după indicațiile date în [2]

$$\lambda = 0{,}242\ \mathcal{R}e^{-0{,}224}; \tag{13}$$

din calcul și din practică se admite $\lambda = 0{,}03$.

Făcînd calculele lui h_r rezultă o pierdere de sarcină care are o valoare medie de 0,5 at.

În concluzie, regimul de lucru va fi

$$p_{1r} = p_1 + \Delta p' \simeq 7 \text{ at.}$$

$$p_{2r} = p_2 - \Delta p'' \simeq 3{,}7 \text{ at.}$$

4. CONSIDERENTE CONSTRUCTIVE

În cazul studiat, ajutajul este înclinat cu unghiul β față de axa arborelui motor. În această situație se știe că în porțiunea *ABCD*, din figura 2, destinderea are loc după legile cunoscute, însă în porțiunea *CDE* destinderea va continua, realizîndu-se o creștere a vitezei peste viteza critică, iar a presiunii sub presiunea critică [9].

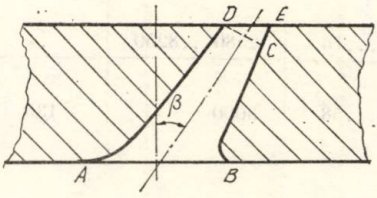


Fig. 2

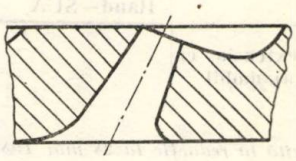


Fig. 3

Pentru a evita un astfel de fenomen, discul 5 va prezenta o construcție ca cea schițată în figura 3 care elimină practic porțiunea critică *CE* în care. dacă ținem seama de rezultatele prezentate în lucrarea [3] pentru cazul ajutajului înclinat cu unghiul $\beta = 30°$, presiunea minimă atinsă în punctul *E* este aproximativ 0,25 P_1 (deci 1,5 at $< p_{cr}$ în cazul nostru).

5. AVANTAJELE MOTORULUI

În primul rînd vorbim de avantaje tehnologice.

Se cunosc dificultățile de execuție ale motoarelor de tip turbină cu palete ; din prezentările lucrărilor [5] și [4] rezultă că pentru prelucrarea paletelor s-au construit mașini speciale. Paletele se încearcă la rupere în laborator după care se încearcă motorul asamblat, numărul de măsurători de probă ridicîndu-se la 200 ÷ 300. Motorul propus se justifică cu atît mai mult cu cît, după afirmațiile autorului lucrării [4], se trage concluzia că randamentul adiabatic al unei turbomașini axiale, ca în lucrarea de față, este superior randamentului unei turbomașini centrifugale.

Construcția motorului propus este foarte simplă, ajutajele fiind convergente și pot fi executate direct prin electroeroziune. Reglarea turației se face foarte simplu și economic prin laminarea jetului de aer cu ajutorul unui ventil.

În tabela 6 am trecut, comparativ, performanțele unor motoare pneumatice folosite actualmente în industria construcțiilor de mașini după [1] și performanțele care pot fi obținute cu acest tip nou de motor.

Considerăm că din punct de vedere tehnico-economic, motorul pneumatic cu extensiune, cu ajutaje mobile are suficiente justificări constructive și de exploatare.

Tabela 6

Tipul motorului pneumatic	Producătorul	N (CP)	n (rot/min)	Q/N (N^3 aer/CP.h)
Cu roți dințate	Demag. RFG	3,5...82	1500...3000	—
	Vöest. Austria	5...15	2000...3000	40...44
cu palete	Ingersoll Rand—SUA	0,3...16	2580...8250	—
Cu extensie cu ajutaj mobil	—	2,3...58	3000	135

Primită la redacție la 28 mai 1980

BIBLIOGRAFIE

1. V. Cosoroabă s. a., *Acționări pneumatice*, Edit. tehnică, București, 1971, p. 36, 46, 47, 50, 486.
2. D. Pavel, *Hidraulica teoretică și aplicată*, Edit. tehnică, București, 1950, p. 181, 191.
3. T. Grecu, *Turbine și turbocompresoare*, vol. I, Edit. didactică și pedagogică, București, 1967, p. 103.
4. P. Lefort, *Turbines à gaz, et réacteurs*, Librairie Larousse, Paris, 1953.
5. A. Liapunov, *Turbina cu gaze*, Edit. energetică de stat, 1953.
6. S. M. Losev, *Turbine cu abur*, Edit. tehnică, București, 1958, p. 54.
7. L. Stoicescu s. a., *Termotehnica*, Litografia și tipografia învățământului București, 1957, p. 627.
8. Al. Todicescu, *Mecanica fluidelor și mașini hidro-pneumatice*, Edit. didactică și pedagogică, București, 1974, p. 328.
9. D. Ursescu s. a., *Turbine cu aburi și gaze*, partea I. Tipografia Institutului politehnic Iași, Facultatea de mecanică Iași, 1973, p. 190.
10. * * * *Producerea și distribuirea aerului comprimat* (în Schweizer Machinenmarkt, Elveția, **70**, *49*, 46—51 (1970).

NOTĂ

PUTEREA NECESARĂ ACȚIONĂRII MAȘINII DE EXTRUDERE CU DISC

de GH. IORDACHE, M. RENERT
Institutul politehnic București

Se stabilește, pentru prima dată pe cale teoretică, o relație de calcul pentru puterea necesară acționării mașinii de extrudere cu disc.
Relația ține seama de caracteristicile geometrice (raza discului, fantă), de caracteristicile de material (caracteristici reologice) și caracteristica funcțională (turație). Relația este verificată practic pentru mai multe cazuri (pentru polietilenă j.d.).

1

În lucrările anterioare [1] și [2] au fost examinate cinematica, respectiv presiunea dezvoltată în mașina de extrudere cu disc (Weissenberg). De puterea necesară acționării mașinii lucrînd cu topitură în spațiul de lucru s-au ocupat puține lucrări. Astfel, lucrarea [3] pornește de la ideea *asemănării* mașinii de extrudere cu disc, cu vîscozimetrul con-placă. Asemănarea nu este însă completă, deoarece vîscozimetrul de rotație lucrează fără debit, în timp ce, din extruder, topitura este evacuată continuu. Lucrarea [4] prezintă o relație empirică pentru puterea necesară acționării extruderului cu disc.

2

Expresia generală a puterii necesare acționării mașinii cu disc este

$$N = N_0 + N_1 + N_2 + N_3, \tag{1}$$

capului de extrudere corespunzîndu-i termenul

$$N_3 = Q_v \cdot \Delta p_{cap}. \tag{2}$$

Presiunea fiind în general relativ redusă, de ordinul a $6 \times 10^5 \mathrm{N/m^2}$ [5, 6, 7], valoarea acestui termen este cu totul neglijabilă în comparație cu primii trei termeni din relația (1). Astfel, pentru un debit de circa 38 $\mathrm{cm^3/s}$ (100 kg/h), la presiunea indicată, $N_3 \approx 0{,}03$ kW față de $N = 4{,}85$ kW.

Se va considera deci în continuare

$$N = N_0 + N_1 + N_2. \tag{3}$$

Pentru zona de alimentare, în care materialul se află încă în stare solidă (granulară) se adoptă relaţia [4]* :

$$N_1 = \frac{\pi n}{194 \cdot 800} D^2 l_a \mu p_a [\text{kW}] \cdot \tag{4}$$

Pentru spaţiul dintre discuri, practic umplut în întregime cu topitură,

$$N_2 = N_r + N_\theta, \tag{5}$$

unde, în general,

$$N_r = \int_A (\tau_{rz})_{z=0} (v_r)_{z=0} \mathrm{d}A \tag{6}$$

şi

$$N_\theta = \int_A (\tau_{\theta z})_{z=0} (v_\theta)_{z=0} \mathrm{d}A \cdot \tag{7}$$

În legătură cu aceste relaţii se precizează că valorile vitezelor şi ale eforturilor unitare de forfecare trebuie luate la suprafaţa discului în mişcare ($z = 0$), iar integrarea se efectuează pe aria A a acestuia. Orientarea axelor de coordonate rezultă din figura 1.

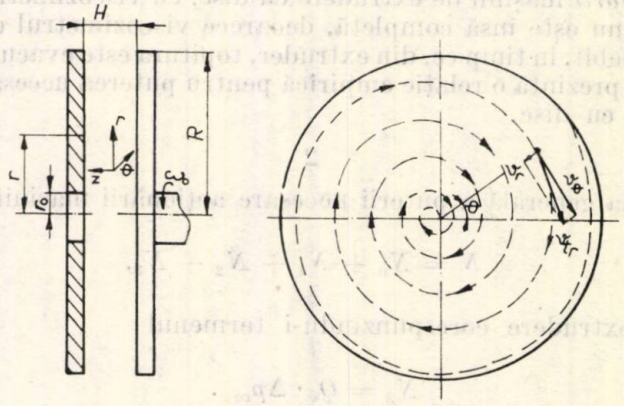


Fig. 1. — Schema maşinii de extrudere cu disc.

În condiţiile problemei de faţă se poate folosi relaţia Ostwald—de Waele, care are forma :

$$\tau_{rz} = m \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} \right)^n \tag{8}$$

* Unităţile de măsură sînt : pentru D şi l_a, cm, pentru n, rot/min ; pentru p_a, daN/cm².

și

$$\tau_{\theta z} = m\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^{\nu}, \tag{9}$$

relații în care [1,7]

$$v_r = \frac{\alpha^*}{2m}\left(\frac{\omega_0}{H}\right)^{\beta^*-\nu+1}\frac{R^{\beta^*-\nu+1} - r^{\beta^*-\nu+1}}{\beta^* - \nu + 1}\frac{(H-z)z}{H}, \tag{10}$$

$$v_\theta = \frac{\omega_0 r}{H}(H - z). \tag{11}$$

În lucrările menționate [1, 3, 7] s-a arătat însă că $v_r \ll v_\theta$ și în consecință $\tau_{rz} \ll \tau_{\theta z}$; de asemenea, $N_r \ll N_\theta$.

Astfel, de exemplu, pentru polietilenă j.d., $(N_r/N_\theta) < 0{,}03$.

Ținînd seama de relația (11), expresia (8) a efortului unitar de forfecare devine

$$\tau_{\theta z} = m\left(-\frac{\omega_0 r}{H}\right)^{\nu}. \tag{12}$$

În condițiile discuției anterioare se poate scrie

$$N_z = N_\theta = -\int_R^0 m\left(\frac{\omega_0 r}{H}\right)\left(\frac{\omega_0 r}{H}\right)(H - z)2\pi r\,dr. \tag{13}$$

Limitele de integrare țin seama de sensul de deplasare al topiturii, de la periferie către centrul rotorului.

Prin integrarea relației (13) se obține

$$N_z = N_\theta = 2\pi m\left(\frac{\omega_0}{H}\right)^{\nu+1}\frac{R^{\nu+3}}{\nu+3}(H-z). \tag{14}$$

Valoarea maximă a puterii necesare acționării rezultă pentru valoarea maximă a diferenței $(H - z)$, care se obține la $z = 0$ (suprafața rotorului).

Punînd această condiție, relația (14) ia forma finală:

$$N_z = N_0 = 2\pi m\left(\frac{\omega_0}{H}\right)^{\nu+1}\frac{R^{\nu+3}}{\nu+3}H. \tag{15}$$

3

3. VERIFICAREA EXPERIMENTALĂ A RELAȚIEI OBȚINUTE

Folosind mașina de extrudere cu disc, construită la Institutul politehnic București, Facultatea de mecanică, s-au făcut măsurători ale consumului de putere. Diametrul discului este de 0,15 m. Materialul folosit

a fost polietilena F 322/200. Turațiile de lucru $n = 154$; 198; 282 și 364 rot/min. Fantele utilizate $H = 6{,}5 \times 10^{-3}$; $8{,}6 \times 10^{-3}$ și $11{,}6 \times 10^{-3}$ m.

Caracteristicile reologice din relația Ostwald—de Waele, la cele două temperaturi de lucru sînt:

Temperatura [°C]	m [da N·s$^{\beta*}$/cm^2]	ν
220	0,2155	0,323
230	0,1960	0,304

Utilizînd relația (15) s-a studiat variația necesarului putere de acționare, funcție de turație, pentru diverse fante la cele două temperaturi de lucru (fig. 2 și 3 — curbele trasate cu linie continuă). Valorile obținute experimental au fost indicate prin puncte. Consumul de putere la mers în gol

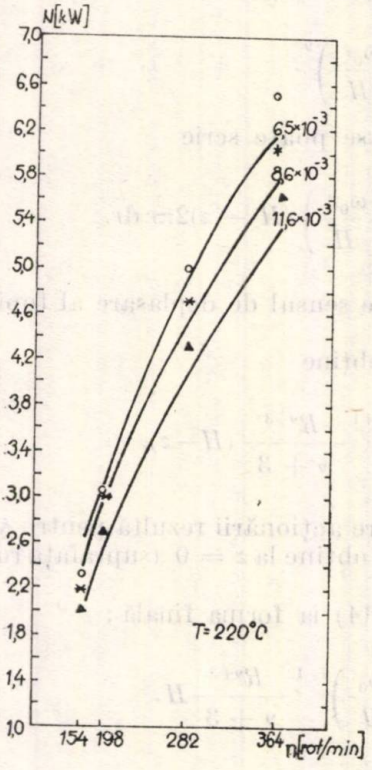


Fig. 2. — Variația consumului de putere de acționare în funcție de turație pentru diverse fante, la temperatura de 220°C.

Linia continuă — valori calculate [rel. (15)] Punctele — valori experimentale ○ — $H = 6{,}5 \times 10^{-3}$ m; ▲ — $H = 8{,}6 \times 10^{-3}$ m; * — $H = 11{,}6 \times 10^{-3}$ m.

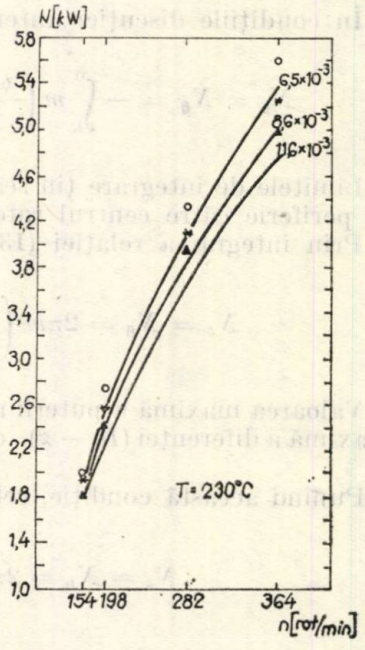


Fig. 3. — Variația consumului de putere de acționare în funcție, de turație pentru diverse fante, la temperatura de 230°C.

Linia continuă — valori calculate [rel. (15)] Punctele — valori experimentale ○ — $H = 6{,}5 \times 10^{-3}$ m; ▲ — $H = 8{,}6 \times 10^{-3}$ m; * — $H = 11{,}6 \times 10^{-3}$ m.

a fost măsurat [7], iar consumul de putere în zona de alimentare a fost calculat cu relația (4). Rezultatele obținute sînt indicate în tabelul 1.

Tabelul 1

Valori ale puterii de acționare consumată la mers în gol și în zona de acționare.

Turația [rot/min]	154	198	282	364
Puterea la mers în gol (N_0), [kW]	0,095	0,12	0,17	0,22
Puterea consumată în zona de alimentare (N_1), [kW]*	0,558	0,718	1,022	1,32

4. CONCLUZII

— Se obține pentru prima oară o relație care ține seama de caracteristicile de material (m, ν) de caracteristicile geometrice (R, H) și de caracteristica funcțională (turația prin ω_0).

— Consumul de putere de acționare al mașinii de extrudere cu disc crește cu creșterea turației și scade cu creșterea fantei și a temperaturii (vezi fig. 2 și 3).

— Se constată o bună concordanță între valorile teoretice și cele obținute experimental, eroarea între acestea fiind însă sistematică. Valorile teoretice sînt inferioare cu pînă la 9% față de valorile experimentale. Considerăm că această diferență între puterea efectivă și puterea de calcul poate fi pusă pe seama puterii consumate pentru amestecarea materialului topiturii (datorită componentei v_z a vitezei considerată cu aproximație nulă).

S-a constatat [7] că se poate introduce un coeficient de corecție, astfel încît se obține

$$N_{ef} = 1{,}06 \; N_{calc}. \tag{16}$$

— Relația obținută [relația (15)] este o relație relativ simplu de aplicat și care poate fi utilizată cu bune rezultate în proiectarea unor astfel de mașini cu largi perspective în prelucrarea materialelor plastice.

LISTĂ DE NOTAȚII

N_0 — consumul de putere la mers în gol;
N_1 — consumul de putere în zona de alimentare;
N_2 — consumul de putere în zona de topitură;

* Pentru calcul, $p_a = 1$ daN/cm² [4], $\mu = 0{,}25$ [4] și $l_a = 4$ cm, corespunzător construcției mașinii experimentale.

N_3 — consumul de putere în capul de extrudere;
Q_v — debitul volumic de topitură;
Δp_{cap} — căderea de presiune în capul de extrudere;
n — turaţia discului;
D — diametrul discului;
l_a — distanţa de la axa gurii de alimentare la suprafaţa discului;
μ — coeficient de frecare polietilenă (granule) — oţel;
p_a — presiunea materialului în zona de alimentare;
τ_{rz}; $\tau_{\theta z}$ — componentele de forfecare ale tensorului eforturilor unitare;
v_r; v_θ — componentele vitezei pe direcţiile r şi θ;
m, ν — caracteristici reologice din relaţia Ostwald—de Waele;
α^*; β^* — caracteristici reologice corespunzătoare componentelor normale ale tensorului eforturilor unitare;
ω_0 — viteza unghiulară a discului;
R — raza discului;
H — fanta dintre disc şi stator.

Primită la redacţie la 26 februarie 1980

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Iordache şi M. Renert, Materiale plastice, **16**, *4*, 252—254 (1979).
2. Gh. Iordache şi M. Renert, Materiale plastice, sub tipar.
3. Gh. Iordache, Materiale plastice, **10**, *10*, 550 (1973).
4. Iu. G. Ostapciuk, ş. a. *Discovie extruderi*, Izd. Tehnika, Kiev, 1972, p. 52, 20.
5. N. A. Kozulin ş.a. Plasticeskie massî, *10*, 30 (1964).
6. J. E. Henry şi C. E. Plymale, SPE Journal, **21**, *4*, 391 (1965).
7. Gh. Iordache, Teză de doctorat, Institutul Politehnic Bucureşti, 1978, p. 66 şi 67, 103, 104.

STUDII ŞI CERCETĂRI
DE
MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 39 1980

INDEX ALFABETIC

ABRUDAN, GLIGOR, GH. ACHIMAŞ, FL. CIŞMAŞIU, Stabilirea profilului de ieşire la matriţe destinate extrudării la cald a burghielor elicoidale . . 4 603
ACHIMAŞ, GHEORGHE v. ABRUDAN, GLIGOR 4 603
ANGHEL, ALEXANDRU v. POSEA, NICOLAE 6 833
ARICIUC, MIRCEA, Formularea problemei la limită în tensiuni în cazul modelului liniar al cristalelor moleculare cu structură complexă. Teorema de unicitate 4 467
ARICIUC, MIRCEA, Vibraţii şi microvibraţii acustice şi optice în corpuri cristaline cu structură complexă 5 639
BAGNARU, DAN v. BUCULEI, MIHAI 1 123
BĂDOIU, TRAIAN, Algoritmi de generare automată de elemente finite conforme şi de înaltă precizie pentru problemele la limită ale teoriei elasticităţii, I 2 167
BĂDOIU, TRAIAN, Algoritmi de generare automată de elemente finite conforme şi de înaltă precizie pentru problemele la limită ale teoriei elasticităţii. II 3 359
BĂNUŢ, VALERIU, LUCIA MIHĂILESCU, Stabilitatea structurilor spaţiale 2 247
BENCHE, VICTOR v. IVAN MIRCEA 5 461
BORCIA, ECATERINA, Consideraţii asupra modelării fenomenului de lichefiere 2 159
BORCIA, ECATERINA, Caracterizarea răspunsului principalelor tipuri de pămînturi la solicitări seismice. I. Caracterizarea proprietăţilor elastice şi disipative 4 559
BORCIA, ECATERINA, Caracterizarea răspunsului principalelor tipuri de pămînturi la solicitări seismice 5 705
BRATU, POLIDOR, Dinamica compactoarelor autopropulsate cu ambele rulouri vibratoare 1 139
BUCULEI, MIHAI, Ecuaţii de mişcare globale pentru multipolii elastocinematicei ai mecanismelor plane 4 521
BUCULEI, MIHAI, Relaţii globale în elastocinematica mecanismelor plane cu bare 5 679
BUCULEI, MIHAI, DAN BAGNARU, Multipoli dinamici cu elemente rigide 1 123
BUCULEI, MIHAI, D. MARGHITU, Ecuaţii de mişcare pentru vibraţiile elementelor cinematice ale mecanismelor plane, cu axa linie poligonală 3 415
BUCULEI, MIHAI, SEVASTULA MIŢIS, Asupra vibraţiilor elementelor cinematice ale mecanismelor plane cu cuple de translaţie 2 195
BUICULESCU-MASSIER, DOINA, Asupra transformărilor Lorentz 1 49
CĂMĂRĂSCU, DAN D., v. SIMA, PETRE 5 789

CĂPITANU, LUCIAN, Aspecte ale influenței durității asupra coeficientului de frecare uscată, la o cuplă de tip Timken, material plastic armat cu fibre de sticlă/oțel 1 131
CĂPITANU, LUCIAN, ALEXANDRU SANDU, Cercetări privind creșterea durabilității articulațiilor bolț-bucșă, la lanțurile de șenile ale tractoarelor agricole și industriale 3 441
CHIROIU, VETURIA v. NICOLAE, VIOREL 4 473
CIMOCA, GHEORGHE v. MARȚIAN, IRONIM 1 101
CIȘMAȘIU, FLAVIU v. ABRUDAN, GLIGOR 4 603
CONSTANTINESCU, DORIN, GABRIEL TEODOR PRIPOAE, Metoda de calcul a diametrului sapelor cu trei conuri 2 311
COSTIN, GRIGORE v. SIMA, PETRE 5 789
COȘEREANU, IOAN, I. GOIA, S. VLASE, V. MIHALCICA, Metoda transmiterii nodale utilizată la ridicarea nedeterminărilor arborelui cotit 2 301
CRĂCIUN, IOAN, Contribuții la sinteza sistemelor în lanț și ramificate ce execută vibrații de torsiune I. 3 391
CRĂCIUN, IOAN, Contribuții la sinteza sistemelor în lanț și ramificate ce execută vibrații de torsiune II. 4 535
CRISTIAN, IOAN v. IVAN, MIRCEA 5 761
DELLA-GIACOMO, ERMANDO v. STAN, ALEXANDRU D. 4 501
DOBRE, GEORGE, Suma lungimilor liniilor de contact la angrenajul cilindric cu dinți înclinați în evolventă 3 421
DOBRE, GEORGE, Calculul dimensiunilor flancării la o roată dințată și la cremaliera generatoare conjugată în cazul angrenajelor cilindrice cu dinți drepți 4 597
GOIA, IOAN v. COȘEREANU, IOAN 2 301
GRASU, CONSTANTIN, Asupra mișcării fluidelor viscoase la numere Reynolds mici în prezența corpurilor poroase neomogene 6 813
IORDACHE, GHEORGHE, M. RENERT, Puterea necesară acționării mașinilor de extrudere cu disc. 6 941
IOVĂNESCU, RADU, Metoda de calcul a stărilor de tensiune dintr-o structură axial simetrică de tip mixt, alcătuită dintr-o învelitoare cilindrică îmbinată cu o învelitoare sferică 3 329
IVAN, MIRCEA, I. CRISTIAN, V. BENCHE, Studiul teoretic și experimental al variației presiunii electrolitului în zona de lucru la prelucrarea electrochimică a suprafețelor sferice 5 761
JELEV, IOAN, Calculul hidrodinamic al paletajului rotoric al unei turbomașini axiale bulb. I 5 655
JELEV, IOAN, Calculul hidrodinamic al paletajului rotoric al unei turbomașini axiale bulb. II. Aplicarea practică a metodei. Rezultate experimentale 6 861
JERCA, ȘTEFAN, Calculul structurilor static nedeterminate realizate din materiale cu comportare viscoelastică. II. Metoda deplasărilor 2 237
KROMEK, CAROL v. POSEA, NICOLAE 6 833
LARIONESCU, DAN, Aspecte matematice ale sintezei mecanismelor ce utilizează aproximarea în sensul lui Cebîșev 3 383
MANEA, CONSTANTIN v. POSEA, NICOLAE 5 719
MARGHITU, DAN v. BUCULEI, MIHAI 3 415
MARȚIAN, IRONIM, GHEORGHE CIMOCA, Placă dreptunghiulară cu deformații mari rezemată pe contur 1 101
MATEESCU, C. v. PAVEL, ALECSANDRU 5 741

MIHALCICA, VIRGIL, v. COŞEREANU, ION 2 301
MIHĂILESCU, LUCIA v. BĂNUŢ, VALERIU 2 247
MIHĂIŢĂ, GHEORGHE, Stabilitatea dinamică spaţială a cadrelor din bare cu pereţi subţiri de secţiuni deschise, excitate exterior de forţe periodice următoare 1 59
MITRACHE, MARIN v. TRUICĂ, NICOLAE 2 283
MITRACHE, MARIN v. TRUICĂ, NICOLAE 4 571
MIŢIS, SEVASTULA v. BUCULEI, MIHAI 2 195
NEGRUŢIU, RADU, Introducere în analiza dinamică a structurilor cu dale. I 1 83
NEGRUŢIU, RADU, Introducere în analiza dinamică a structurilor cu dale. II 2 261
NGUYEN XUAN MINH, TEODOR OROVEANU, Asupra transportului prin conducte al petrolului brut saturat cu gaze 4 511
NICOLAE, VIOREL, VETURIA CHIROIU, Unde de suprafaţă într-un semispaţiu viscoelastic stratificat 4 473
OLARIU, ION v. POCANSCHI, ADRIAN 3 349
ORĂŞANU, MIRCEA, O clasă de mişcări de filtraţie cu suprafaţa liberă . . . 1 3
OROVEANU, TEODOR v. NGUYEN XUAN MINH 4 511
PASCU, VASILE, Consideraţii privind optimizarea traiectoriilor aproape verticale ale rachetelor care evoluează în mediu rezistent, cu restricţii flexibile asupra modului tracţiunii 2 183
PAVEL,ALECSANDRU, Evaluarea posibilităţii de prelungire a duratei efective de serviciu, dincolo de durata de serviciu de calcul, la serpentinele de reacţie ale cuptoarelor tubulare tehnologice petrochimice. I 3 449
PAVEL, ALECSANDRU, Evaluarea posibilităţii de prelungire a duratei efective de serviciu, dincolo de durata de serviciu de calcul la serpentinele de reacţie ale cuptoarelor tubulare tehnologice petrochimice. II 4 611
PAVEL, ALECSANDRU, Calculul serpentinelor tehnologice elicoidale 6 913
PAVEL, ALECSANDRU, L. RIZEA, C. MATEESCU, Studii şi cercetări teoretico-experimentale privind securitatea tehnică a mantalei cilindrice a unui expandor de înaltă presiune 5 741
PETRESCU, GEORGE, Teoria generală a sistemelor de bare concurente static nedeterminate 1 75
POCANSCHI, ADRIAN, ION OLARIU, Diafragme absorbante cu inserţie elastic biliniară 3 349
POPA, GABRIEL D., Extinderea soluţiei prin serii duble trigonometrice pentru placa rigidizată cu nervuri dispuse pe o singură parte 2 221
POPA, GABRIEL D., Metodă de calcul, utilizînd seriile duble trigonometrice, pentru placa rigidizată cu nervuri înguste excentrice dispuse pe două direcţii 5 687
POPESCU, MIHAI, Asupra transferului optim al vehiculelor spaţiale în punctele de libraţie echidistante din sistemul Pămînt—Lună 1 29
POPESCU, MIHAI, Asupra unei reprezentări asimptotice privind integrarea ecuaţiei de mişcare a rachetei în mediu rezistent 4 485
POPESCU, MIHAI, Asupra atingerii punctelor de libraţie ale sistemului Pămînt—Lună în timp minim 5 633
POPESCU, MIHAI, Asupra integrării analitice a ecuaţiilor de mişcare a vehiculelor spaţiale cu coeficienţi variabili ai forţelor aerodinamice 6 797
POPOVICIU, SABIN v. STAN, ALEXANDRU D. 6 877
POSEA, NICOLAE, C. MANEA, Analiza stării de eforturi şi deformaţii ale compensatoarelor lenticulare de dilataţie, cu lentile de tip „U" executate multistrat 5 719

POSEA, NICOLAE, AL. ANGHEL, C. KROMEK, Calculul static al sistemelor de conducte 6 833
PRIPOAE, TEODOR v. CONSTANTINESCU, DORIN 2 311
RADEŞ, MIRCEA, Influenţa amortizării lagărelor asupra turaţiilor critice ale rotorilor 6 903
RAŞEEV, DUMITRU v. ZECHERU, GHEORGHE 3 431
RENERT, MIHAI v. IORDACHE, GHEORGHE 6 941
RIZEA, L. v. PAVEL ,ALECSANDRU 5 741
SANDU, ALEXANDRU v. CĂPITANU, LUCIAN 3 441
SILVESTRU, CONSTANTIN v. ZĂTREANU, GHEORGHE 6 895
SIMA, PETRE, GR. COSTIN, D. D. CĂMĂRĂSCU, Instalaţie pentru studiul oscilaţiilor neliniare de răsucire ale arborilor drepţi sau cotiţi 5
SOARE, MIRCEA V., O metodă generală de rezolvare a plăcilor ortotrope dreptunghiulare 2 203
SPULBER, CĂTĂLIN v. SPULBER, ION 5 777
SPULBER, CĂTĂLIN v SPULBER, ION 6 933
SPULBER, ION, C. SPULBER, Contribuţii la studiul prelucrării prin eroziune electrochimică cu depasivizare hidrodinamică 5 777
SPULBER, ION, C. SPULBER, Motor pneumatic cu extensiune şi ajutaje mobile 6 933
STAN, ALECSANDRU D., Mişcarea printr-un spaţiu inelar permeabil 3 371
STAN, ALECSANDRU D., ER. DELLA-GIACOMO, Mişcarea nestaţionară printr-un spaţiu inelar 4 501
STAN, ALECSANDRU D., S. POPOVICIU, Infiltraţiile gazeifere în imobile generate de defecţiunile conductelor 6 877
STANCIU, ŞTEFAN, Asupra utilizării regulatorului radial la lagăre radiale hidrostatice 4 583
TEMPEA, IOSIF, Sinteza structurală a lanţurilor cinematice plane articulate cu $N=4$ contururi şi grad de libertate $L_3 = 5$,,total'' sau ,,parţial'' 4 543
TRUICĂ, NICOLAE, M. MITRACHE, Un arc elicoidal cilindric cu rigiditate progresivă cu sarcina, destinat suspensiei automobilului Dacia 1302. I. 2 283
TRUICĂ, NICOLAE, M. MITRACHE, Un arc elicoidal cilindric cu rigiditate progresivă cu sarcina, destinat suspensiei automobilului Dacia 1302. II. Rezultate experimentale 4 571
VLASE, SORIN v. COŞEREANU, IOAN 2 301
ZĂTREANU, GHEORGHE, CONSTANTIN SILVESTRU, Echilibrajul momentelor externe care subzistă în fiecare linie de cilindri la motoarele în H . . 6 895
ZECHERU, GHEORGHE, D. RAŞEEV, O metodă pentru estimarea rezistenţei la iniţierea ruperii în piesele metalice destinate exploatării la temperaturi scăzute 3 431

BUDAPESTI MOSZAKI EGYETEM 1848 KÖZPONTI KÖNYVTÁRA